Q Gleichungssysteme

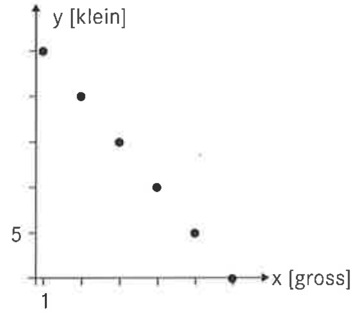
Eine lineare Gleichung mit 2 Variablen

Q1

a)

grosse Flaschen x	16	13	10	7	4	1
kleine Flaschen y	0	5	10	15	20	25

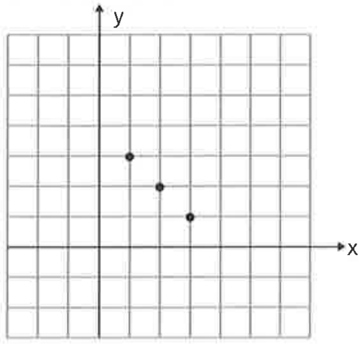
b)



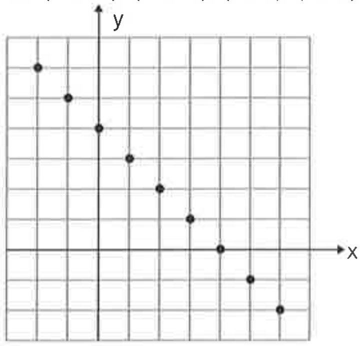
c) $2.5x + 1.5y = 40$

Q2

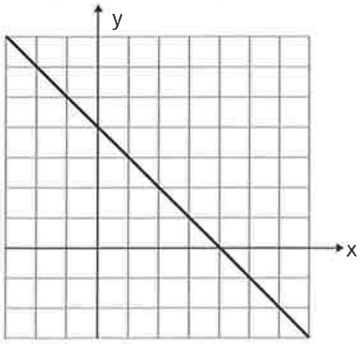
a) (1/3), (2/2), (3/1)



b) ..., (−2/6), (−1/5), (0/4), (1/3), (2/2), ...



c) {P(x/y) | x + y = 4}

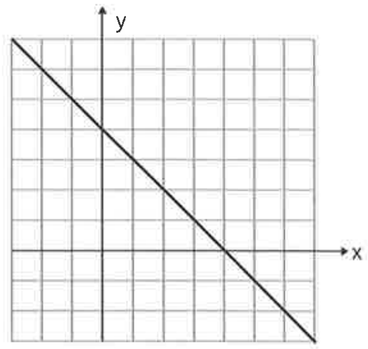


Menge der natürlichen Zahlen:
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

Menge der ganzen Zahlen:
$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0\ 1, 2, ...\}$

Menge der rationalen Zahlen:
$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

d) $\{P(x/y) \mid x + y = 4\}$

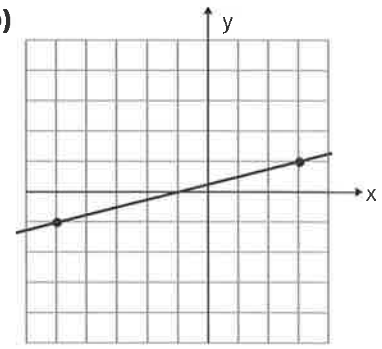


Menge der reellen Zahlen:
$\mathbb{R} = \{x \mid x$ ist als abbrechender oder nichtabbrechender Dezimalbruch darstellbar$\}$

Q3

a) Z.B. $P(3/1)$, $Q(-6/-1)$

b)



c) $P\left(-\frac{3}{2} / 0\right)$, $Q\left(0 / \frac{1}{3}\right)$

d) $9 \cdot 0 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \qquad 9 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 0 = 3$

e) Schnittpunkt mit der x-Achse: Setze in der Gleichung $y = 0$ und löse sie nach x auf.
Schnittpunkt mit der y-Achse: Setze in der Gleichung $x = 0$ und löse sie nach y auf.

Für eine Skizze sind Punkte mit ganzzahligen Koordinaten von Vorteil.
Man ersetzt eine der beiden Variablen durch eine Zahl, so dass die Gleichung mit der verbleibenden Variablen möglichst eine ganzzahlige Lösung besitzt. Zum Beispiel folgt aus $y = 3$ die Gleichung $27 - 2x = 3$ und daraus $x = 12$, also $P(12/3)$.
Andere Möglichkeit: Gleichung nach y auflösen: $y = \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$ und für x eine geeignete ganze Zahl einsetzen, so dass die y-Koordinate ebenfalls ganzzahlig wird.

Q4

$3x - 2y = -6$ oder $6x - 4y = -12$

Es gibt unendlich viele Gleichungen zu der abgebildeten Gerade.
Setze in deine Gleichung die Punkte $(-2/0)$ und $(0/3)$ ein. Wenn dann die Gleichung in beiden Fällen stimmt, so beschreibt sie die Gerade.

Q5

a) ja $\quad 24 - 0 = 24$
b) nein $\quad 0 - 24 \neq 24$
c) nein $\quad -12 + 12 \neq 24$

Q6

a) ja $\quad 10 - 12 = -2$
b) ja $\quad 55 - 57 = -2$
c) nein $\quad -140 + 135 \neq -2$

Q7

a) ja $\frac{7}{6} = \frac{7}{6}$

b) ja $\frac{7}{6} = \frac{7}{6}$

c) ja $\frac{7}{6} = \frac{7}{6}$

Q8

a) ja 6.3 = 6.3
b) ja 6.3 = 6.3
c) ja 6.3 = 6.3

Q9

a) nein $-c \neq c$
b) nein $-c \neq c$
c) ja $c = c$

Q10

a) $y = -2x + \frac{3}{2}$ **b)** $y = \frac{15}{7}x - \frac{5}{2}$

Q11

a) $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ **b)** $y = \frac{b}{a}x - \frac{cd}{a}$

Q12

276 Strecken

Bei kleinen Gitternetzen lassen sich die Strecken systematisch abzählen:

Koordinatengitter	1x1	2x2	3x3	4x4
Anzahl Strecken	6	20	38	60
Differenz der Anzahl Strecken n + 1 und n	14	18	22	

Jetzt kann man vermuten, dass die Differenzen der Streckenzahl eine arithmetische Folge mit der Differenz 4 bilden und daraus die folgenden Zahlen bestimmen:

Koordinatengitter	5x5	6x6	7x7	8x8	9x9	10x10
Anzahl Strecken	86	116	150	188	230	276
Differenz Anzahl Strecken n+1 und n	26	30	34	38	42	46

Q13

a) A(13/2), B(9/7), C(5/12) und D(1/17)

Die vier Punkte lassen sich leicht aus einer Zeichnung bestimmen.

b) Im Punkt B(9/7)

Pythagoras:
$\overline{OA} = \sqrt{173}$, $\overline{OB} = \sqrt{130}$,
$\overline{OC} = \sqrt{169}$, $\overline{OD} = \sqrt{290}$

c) $\{(x/y) \mid 17 \leq x \leq 20 \text{ und } -4 \leq y \leq 0\}$

Lineare Gleichungssysteme

Q14

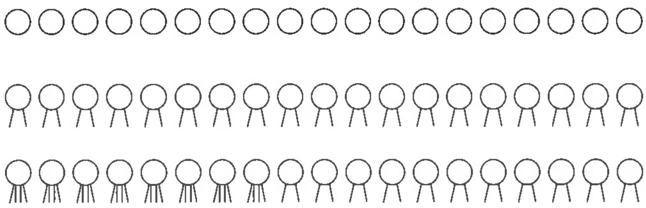
Basislänge: $\frac{13}{3}$ cm

Schenkellänge: $\frac{47}{6}$ cm

Das entsprechende Gleichungssystem lautet:

$$\left| \begin{array}{l} b + 2s = 20 \\ s - b = 3.5 \end{array} \right|$$

Q15 8 Schafe und 11 Hühner



Anschaulich: Man zeichnet pro Tier einen Kopf und jeweils ein Paar Beine. Die übrigen Beine verteilt man paarweise.
Das entsprechende Gleichungssystem lautet:

$$\left| \begin{array}{r} h + s = 19 \\ 2h + 4s = 54 \end{array} \right|$$

Q16 34 Einzelzimmer und 18 Doppelzimmer

Probieren:

Einzelzimmer	22	32	33	34
Doppelzimmer	30	20	19	18
insgesamt	82	72	71	70

Das entsprechende Gleichungssystem lautet:

$$\left| \begin{array}{r} e + d = 52 \\ e + 2d = 70 \end{array} \right|$$

Q17 13 Diebe und 83 Stoffballen

Idee: Wenn jeder Dieb 6 Ballen erhält, sind es 5 zuviel. Wenn jeder Dieb einen Ballen mehr erhält, sind es acht zuwenig. Die Differenz von 13 Ballen entspricht gerade der Anzahl der Diebe. Daraus lässt sich die Anzahl Stoffballen bestimmen:
$D = 13 \cdot 6 + 5 = 83$
Das entsprechende Gleichungssystem lautet:

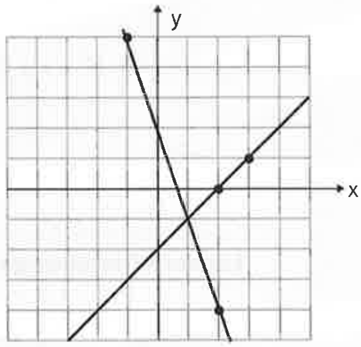
$$\left| \begin{array}{l} 6d + 5 = s \\ 7d - 8 = s \end{array} \right|$$

Q18 Stadtbevölkerung nach einem Jahr: 1 223 592
Landbevölkerung nach einem Jahr: 1 776 408

Mit den gegenwärtigen Zahlen aus Stadt und Land
$s_0 = 1\,154\,400$, $l_0 = 1\,845\,600$
erhalten wir aus der «Bevölkerungsbilanz»
$s_1 = s_0 - s_0 \cdot 0.02 + l_0 \cdot 0.05 = 1\,223\,592$
$l_1 = l_0 - l_0 \cdot 0.05 + s_0 \cdot 0.02 = 1\,776\,408$

Q19 Schnittpunkt S(1/−1)

Graphische Lösung:



Rechnerische Lösung:

$$\left| \begin{array}{l} y = x - 2 \\ y = -3x + 2 \end{array} \right|$$

Gleichsetzen und nach x auflösen. Dann y berechnen.

Q20

35 Meilen

Weg eines Boten in Abhängigkeit der Zeit t wenn für den Start des Boten B t = 0 gewählt wird.

$\left(v = \frac{s}{t} \Rightarrow s = v \cdot t\right)$

$s_A(t) = \frac{7}{2}(t+1)$ $\qquad s_B(t) = \frac{8}{3}t$

Aus $s_A + s_B = 59$ folgt $t = 9$ h und damit $s_A(9) = 35$ Meilen.

Q21

a) (0.5, 0.5)
b) (0, 0)

x = y: die gesuchten Zahlen sind identisch

Q22

a) (2, −1)
b) (2, 0)

y = −1 einsetzen
Die einzige Zahl, die man ohne Einfluss aufs Resultat addieren oder subtrahieren kann ist die Null.

Q23

a) keine Lösungspaare

Die Differenz zweier Zahlen ist eindeutig.

b) unendlich viele Lösungspaare: $\{(x, y) \mid x - y = 1\}$

Jedes Lösungspaar der ersten Gleichung erfüllt auch die zweite Gleichung.

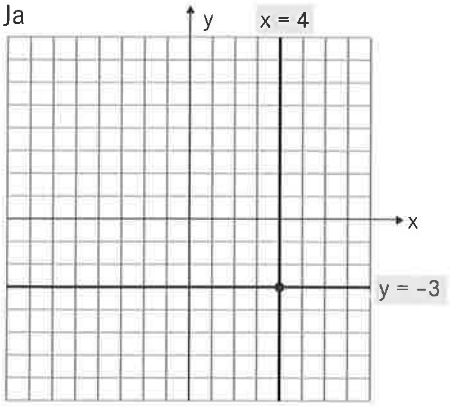
Q24

a) $a_1 = 1, b_1 = -1, c_1 = 1, a_2 = \frac{1}{5}, b_2 = -\frac{3}{8}, c_2 = \frac{2}{9}$
b) $a_1 = 5, b_1 = -2, c_1 = 0, a_2 = 1, b_2 = 0, c_2 = 9$
c) $a_1 = \chi$ [chi], $b_1 = \zeta$ [zeta], $c_1 = \mu$ [mü], $a_2 = \xi$ [xi], $b_2 = -\kappa$ [kappa], $c_2 = \upsilon$ [theta]

Griechische Buchstaben: siehe Lernspuren

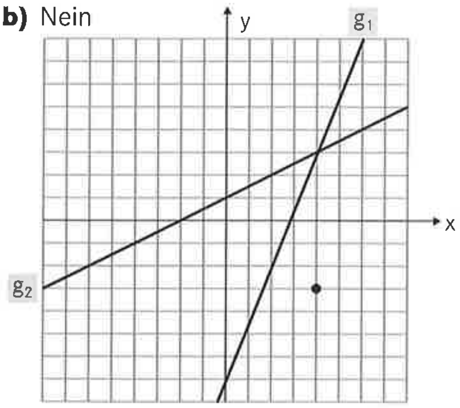
Q25

a) Ja



Die einzige Anforderung an die Zahlenpaare (x_0, y_0), welche die Gleichung x = 4 erfüllen, ist $x_0 = 4$. Da die y-Koordinate frei gewählt werden kann, ergibt sich graphisch eine Parallele zur y-Achse. Analoges gilt für die zweite Gleichung y = -3.

b) Nein

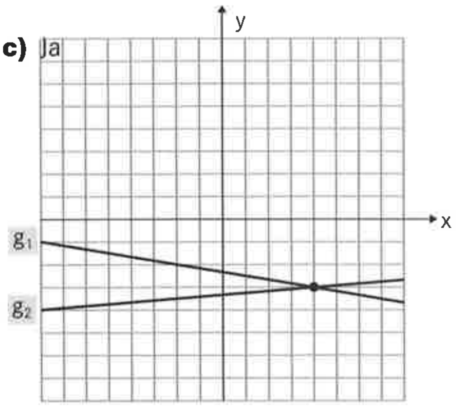


Vor dem Skizzieren können die linearen Gleichungen in die Form y = ax + b gebracht werden.

g_1: $y = \frac{5}{2}x - 7$

g_2: $y = \frac{1}{2}x + 1$

c) Ja



Die Form $y = ax + b$ ist hier unpraktisch. Besser: Zwei Koordinatenpaare geschickt raten:

$y = -1 \Rightarrow x = -8$ und $y = -3 \Rightarrow x = 4$

$y = -4 \Rightarrow x = -8$ und $y = -3 \Rightarrow x = 4$

g_1: $y = -\frac{1}{16}x - \frac{7}{3}$

g_2: $y = \frac{1}{12}x - \frac{10}{3}$

Q26

a) nein — Einsetzen ergibt: $\left| \begin{matrix} -15 \cdot 9 \\ -3 \cdot 5 \end{matrix} \right|$

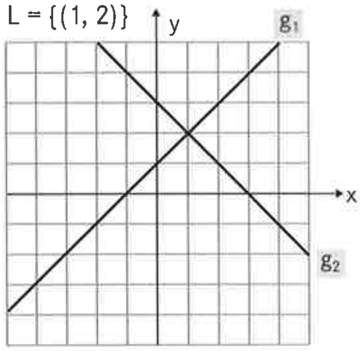
b) ja — Einsetzen ergibt: $\left| \begin{matrix} 8 = 8 \\ -17 = -17 \end{matrix} \right|$

c) ja — Einsetzen ergibt: $\left| \begin{matrix} -8 = -8 \\ 11 = 11 \end{matrix} \right|$

d) nein — Einsetzen ergibt: $\left| \begin{matrix} -6 \cdot 6 \\ 11 = 11 \end{matrix} \right|$

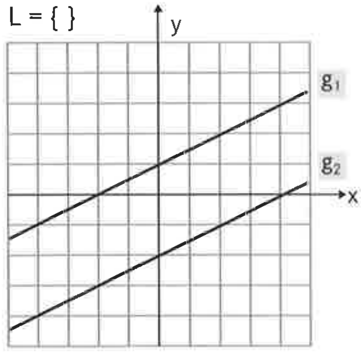
Q27

a) $L = \{(1, 2)\}$



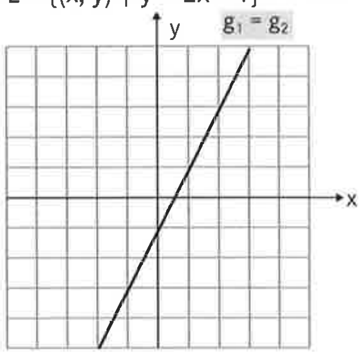
g_1: $y = x + 1$
g_2: $y = -x + 3$

b) $L = \{\ \}$



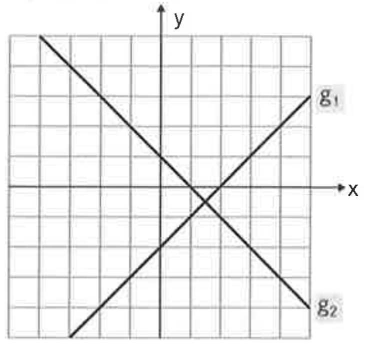
g_1: $y = 0.5x + 1$
g_2: $y = 0.5x - 2$

c) $L = \{(x, y) \mid y = 2x - 1\}$



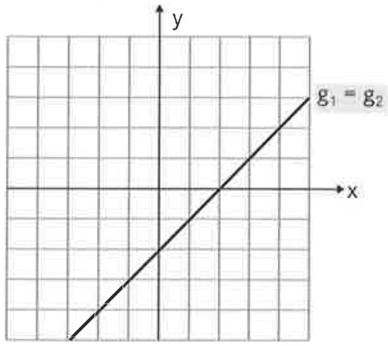
$y = 2x - 1$
$y = 2x - 1$

Q28 **a)** L = {(1.5, −0.5)}



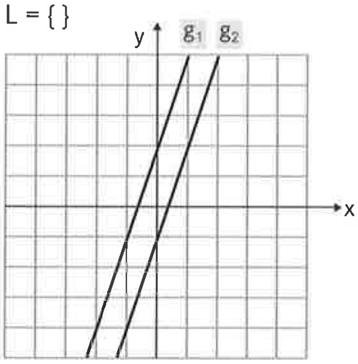
g_1: y = −x + 1
g_2: y = x − 2

b) L = {(x, y) | y = x − 2}



g_1: y = x − 2
g_2: y = x − 2

c) L = { }



g_1: y = 3x + 2
g_2: y = 3x − 1

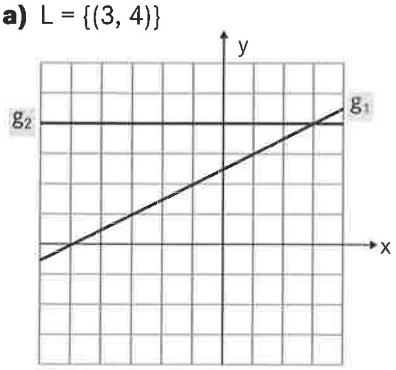
Q29

a) keine Schnittpunkte
b) unendlich viele Schnittpunkte
c) genau einen oder unendlich viele Schnittpunkte
d) genau einen Schnittpunkt
e) keinen Schnittpunkt
f) unendlich viele Schnittpunkte

Bei dieser Aufgabe geht es um das Vorstellungsvermögen.
Fragestellung **c)** ist bewusst offen

Grafische Lösungsmethode

Q30 **a)** L = {(3, 4)}

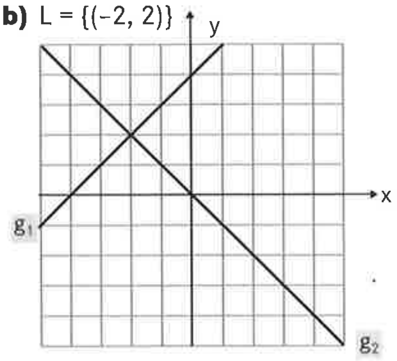


Geradengleichungen:

g_1: $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

g_2: y = 4

b) $L = \{(-2, 2)\}$

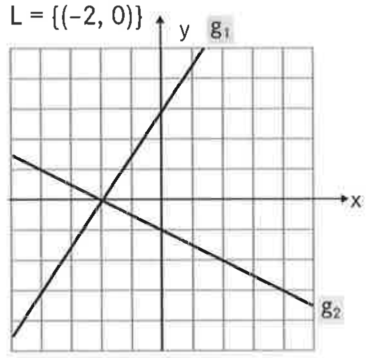


Geradengleichungen:

g_1: $y = -x$

g_2: $y = x + 4$

c) $L = \{(-2, 0)\}$



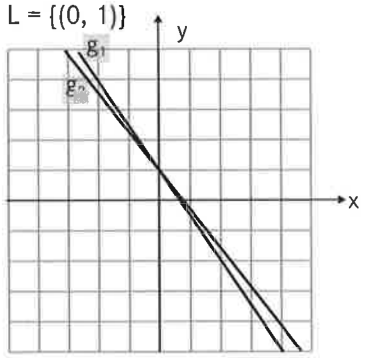
Geradengleichungen:

g_1: $y = \frac{3}{2}x + 3$

g_2: $y = -\frac{1}{2}x - 1$

Q31

a) $L = \{(0, 1)\}$



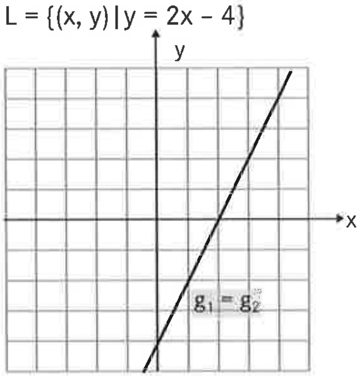
Geradengleichungen:

g_1: $y = -\frac{3}{2}x + 1$

g_2: $y = -\frac{4}{3}x + 1$

In dieser Aufgabe erkennt man deutlich die Grenzen der grafischen Lösungsmethode.

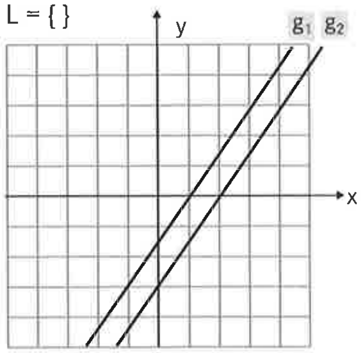
b) $L = \{(x, y) \mid y = 2x - 4\}$



Geradengleichungen:
g_1: $y = 2x - 4$
g_2: $y = 2x - 4$

Identische Geraden

c) $L = \{\,\}$



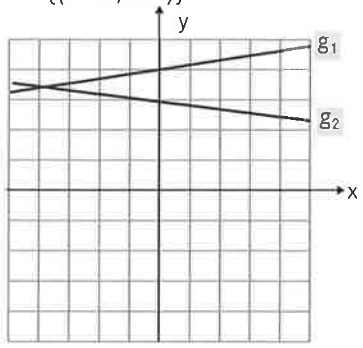
Geradengleichungen:

g_1: $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

g_2: $y = \frac{3}{2}x - 3$

Gleiche Steigung: parallele Geraden

Q32 **a)** $L = \{(-3.5,\ 3.5)\}$

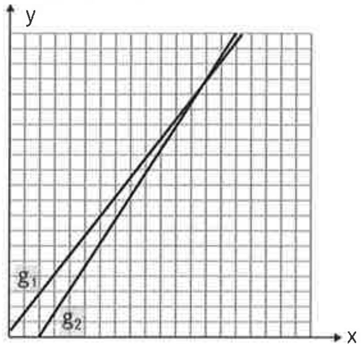


Geradengleichungen:

g_1: $y = \frac{1}{7}x + 4$

g_2: $y = -\frac{1}{7}x + 3$

b) $L = \{(14,\ 18)\}$



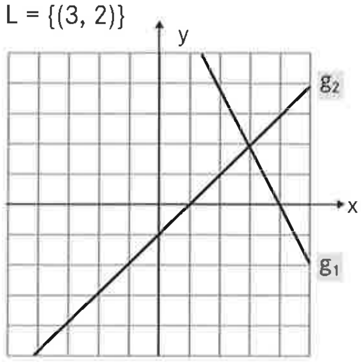
Geradengleichungen:

g_1: $y = \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$

g_2: $y = \frac{3}{2}x - 3$

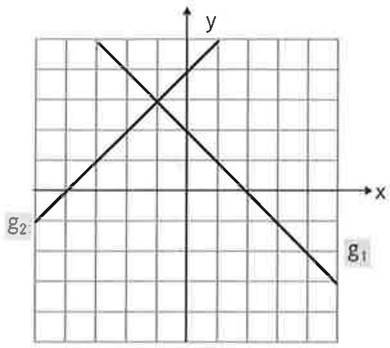
Graphen brauchen sehr viel Platz.

c) $L = \{(3,\ 2)\}$



Geradengleichungen:
g_1: $y = -2x + 8$
g_2: $y = x - 1$

Q33

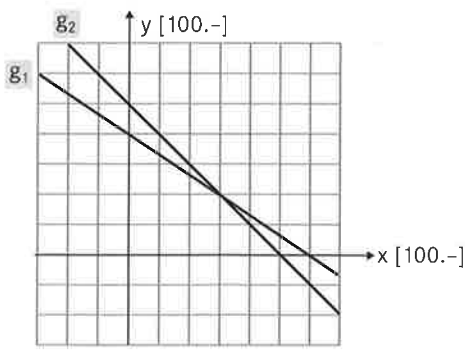


1. Zahl: x
2. Zahl: y

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} g_1: y = -x + 2 \\ g_2: y = x - 4 \end{array}$$

Die Zahlen heissen $x = -1$ und $y = 3$.

Q34



1 Einheit entspricht Fr. 100.-

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 12 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} g_1: y = -x + 5 \\ g_2: y = -\frac{2}{3}x + 4 = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Xaver besass vor den Ferien Fr. 300.- und verdiente Fr. 300.-
Yolanda besass vor den Ferien Fr. 200.- und verdiente Fr. 600.-

Das Einsetzungsverfahren

Q35

a) $L = \{(400, 300)\}$

x = 400 ist geschenkt, y = 300 ergibt sich durch Einsetzen der ersten Lösung in die zweite Gleichung.

b) $L = \{(25, 17)\}$

Verfahren analog wie in 35 a) beschrieben

c) $L = \{(2.5, 0.5)\}$

Verfahren analog wie in 35 a) beschrieben

Q36

a) $L = \{(1, 3)\}$

Verfahren analog wie in 35 a) beschrieben

b) $L = \{(0, -3)\}$

Aus $x + y = y$ folgt $x = 0$.
Setzen wir dies in die 2. Gleichung ein, erhalten wir $y = -3$

c) $L = \{(6, 27)\}$

Wir ersetzen in der zweiten Gleichung 2y durch 9x und erhalten: $x + 9x = 60$ und somit $x = 6$. In die erste Gleichung einsetzen ergibt $y = 27$.

Q37

a) $L = \{(-4, 7)\}$
b) $L = \{(5, 2)\}$
c) $L = \{(10, 0)\}$

Q38

a) $L = \{(x, y) \mid x - 3y = 6\}$
b) $L = \{(15, 9)\}$
c) $L = \{(8, 6)\}$

Q39

a) $L = \left\{\left(\frac{5}{3}, -\frac{15}{8}\right)\right\}$
b) $L = \left\{\left(\frac{5}{12}, 0\right)\right\}$
c) $L = \{(5, 13)\}$

Q40

a) $L = \{\ \}$
b) $L = \{(-10, 30)\}$
c) $L = \{(-2, 12)\}$

Q41

a) $L = \left\{\left(-\frac{4}{3}, \frac{6}{5}\right)\right\}$
b) $L = \{(x, y) \mid 3x - 2y = 6\}$
c) ~~L = { }~~ $\mathbb{L} = \left\{\left(3, -\frac{3}{4}\right)\right\}$

Q42

1. Zahl $x = 12$
2. Zahl $y = 15$

Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y = 42 \\ y + 2x = 39 \end{array} \right|$$

Q43

Alter des Vaters heute: $v = 40$
Alter des Sohnes heute: $s = 13$

Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{c} v - s = 27 \\ (v - 10) = 10(s - 10) \end{array} \right|$$

Q44 **a)** richtig

b) falsch

Korrekt wäre

$$\begin{vmatrix} x - 2y = -3 \\ 5x + 2y = 5 \\ \hline 6x = 2 \end{vmatrix}$$

Q45 **a)** $L = \{(10, 14)\}$

[I] + [2]: $2x - x = 10 \Rightarrow x = 10$
[I]: $-10 + y = 4 \Rightarrow y = 14$

b) $L = \{(-1, -9.5)\}$

[I] + [2]: $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x = 9 - 8 \Rightarrow x = -1$
$\Rightarrow y = -9.5$

Q46 **a)** $11x = 33$

$$\begin{vmatrix} 6x + 6y = 30 \\ 5x - 6y = 3 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{(3, 2)\}$$

b) $y = 22$

$$\begin{vmatrix} 10x + 5y = 30 \\ -10x - 4y = -8 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{(-8, 22)\}$$

Q47 **a)** $L = \{(1, -3)\}$ **b)** $\{(14, -2)\}$ **c)** $\{\ \}$

Q48 **a)** $\left\{\left(3, -\frac{3}{4}\right)\right\}$ **b)** $\{(5, 2)\}$ **c)** $\{(8, 3)\}$

Q49 **a)** $\{(3, 5)\}$ **b)** $\{(4, -6)\}$ **c)** $\{(3, -1)\}$

Q50 **a)** $\left\{\left(\frac{10}{3}, 5\right)\right\}$ **b)** $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)\right\}$ **c)** $\{(x, y) \mid x - 3y = -4\}$

Q51 **a)** $\{(5.5, 2.5)\}$ **b)** $\{\ \}$ **c)** $\{(25, 16.875)\}$

Q52 z. B. $\alpha = 20°$,
$\beta = 110°, \gamma = 50°$

$\alpha = 20°$, $\begin{vmatrix} \beta + \gamma = 180 - \alpha = 160 \\ \beta - \gamma = 3\alpha = 60 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \beta = 110°, \gamma = 50°$

Q53 erste Zahl: $x = 5$
zweite Zahl: $y = 11$

Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix} 7x + 4y = 97 \\ 4x + 7y = 79 \end{vmatrix}$$

Q54
a) $\{(16, 13)\}$ — Lösungsvorschlag: [I] + 4[II]
b) $\{(4, 1)\}$ — Lösungsvorschlag: 9[I] + 7[II]
c) $\{(3.5, 4.5)\}$ — Lösungsvorschlag: [II]
$\Rightarrow y = 1 + x$ in [I] einsetzen

Q55
a) $\{(1.5, 2.5)\}$ — Lösungsvorschlag: 14[I] - 9[II]
b) $\{(10, 6)\}$ — Lösungsvorschlag: 5[I] + 3[II]
c) $\{(-9918, -38711)\}$ — Lösungsvorschlag: [I] + 20[II]

Q56 **a)** $\{(5, 2)\}$

Vereinfachen: $\begin{vmatrix} 8x - 9y = 22 \\ 3x - 5y = 5 \end{vmatrix}$

b) $\{(-2, 3)\}$

Vereinfachen: $\begin{vmatrix} -2x + 7y = 25 \\ x - 9y = -29 \end{vmatrix}$

Q57 **a)** $\{(1, 0)\}$

Ausmultiplizieren und zusammenfassen: $\left|\begin{array}{l} 2x + 5y = 2 \\ -2x + y = -2 \end{array}\right|$

b) $\{(7, -3)\}$

Ausmultiplizieren und zusammenfassen: $\left|\begin{array}{r} 3x + 5y = 6 \\ -3x - 9y = 6 \end{array}\right|$

Q58 **a)** $\{(84, 60)\}$

Lösungsvorschlag: 2[I] - 3[II]

b) $\left\{\left(\frac{77}{2}, 70\right)\right\}$

Lösungsvorschlag: 14[I] – [II]

Q59 **a)** $\left\{\left(20, \frac{1}{2}\right)\right\}$

Lösungsvorschlag: [I] – [II]

b) $\{(10, 7)\}$

Brüche wegschaffen:

$\begin{array}{l} 5[I] \\ 6[II] \end{array}\left|\begin{array}{l} 10x + y - 2 = 105 \\ 24y + x - 4 = 174 \end{array}\right|$ usw.

Q60 **a)** $\{(6, 0)\}$

Brüche wegschaffen:

$\begin{array}{l} 6[I] \\ 6[II] \end{array}\left|\begin{array}{r} 2x + 2y - 12 + 3x = 18 \\ 3x - 2x - 2y = 6 \end{array}\right|$ usw.

b) $\{(4, 0)\}$

Brüche wegschaffen:

$\begin{array}{l} 24[I] \\ 12[II] \end{array}\left|\begin{array}{l} 9x + 36 + 16y - 48 = 24 \\ 3x - 12 - 10y - 60 = -60 \end{array}\right|$ usw.

Textaufgaben

Q61 Die erste Zahl heisst 9 und die zweite 8.

1. Zahl: x
2. Zahl: y

$\left|\begin{array}{l} x + 7 = 2y \\ y - 5 = \frac{1}{3}x \end{array}\right|$

Q62 Die ersten drei Noten waren eine 4.25, die letzte eine 5.25.

1. bis 3. Note: x
4. Note: y

$\left|\begin{array}{r} 3x + y = 4 \cdot 4.5 \\ y - x = 1 \end{array}\right|$

Q63 Anna und Toni sind heute 12 bzw. 4 Jahre alt

Alter Anna heute: a
Alter Toni heute: t

$\left|\begin{array}{r} a = 3t \\ a + 4 = 2(t + 4) \end{array}\right|$

Q64 Die beiden Sorten wurden im Verhältnis 1 : 9 gemischt

Kg Kaffeesorte A: a
Kg Kaffeesorte B: b
Wir nehmen an, es werden 100 kg gemischt:

$\left|\begin{array}{r} a + b = 100 \\ 5a + 7b = 680 \end{array}\right|$

a = 10 und b= 90

Q65 Die Zinssätze betragen 3 % und 4 %.

1. ursprünglicher Zinsfuss: x
2. ursprünglicher Zinsfuss: y

$$\left| \begin{array}{r} 12\,000x - 15\,000y = 930 \\ 12\,000(x - 0.01) = 15\,000(y - 0.01) \end{array} \right|$$

Q66 Die Hypothek beträgt Fr. 120 000.–, Tilgungsrate Fr. 5000.–.

Hypothek: h
Tilgungsrate: t

$$\left| \begin{array}{r} 0.06h + t = 12\,200 \\ 0.06(h - t) + t = 11\,900 \end{array} \right|$$

Q67 Die Winkel messen $\alpha = 44°$ und $\beta = 48°$.

In einem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.

$$\left| \begin{array}{r} \alpha + 2\beta + 40 = 180 \\ 3\alpha + \beta = 180 \end{array} \right|$$

Q68 Ursprüngliche Anzahl Herren: h = 20
Ursprüngliche Anzahl Damen: d = 16

$$\left| \begin{array}{r} h = \frac{5}{4}d \\ \frac{4}{3}(h - 5) = d + 4 \end{array} \right|$$

Q69 Taschengeld von Xaver in Fr.: x = 17
Taschengeld von Yves in Fr.: y = 13

$$\left| \begin{array}{l} x + 3 = 2(y - 3) \\ x - 2 = y + 2 \end{array} \right|$$

Q70 Erstes Kapital: x = 450
Zweites Kapital: y = 400

$$\left| \begin{array}{r} 0.04x + 0.05y = 38 \\ 0.05x = 0.04y + 6.5 \end{array} \right|$$

Q71 Durchschnittsleistung Lampe: ca. 68 W
Durchschnittsleistung Herdplatte: ca. 744 W

Die Aufgabenstellung stimmt nicht ganz mit den realen Gegebenheiten in einem Haushalt überein, denn sonst müsste nach jedem Gebrauch mehrerer Herdplatten die Sicherungen gewechselt werden. In Wirklichkeit sind Herdplatten durch eigene Sicherungen geschützt.
Mit der Beziehung «Leistung = Stromstärke · Spannung» lässt sich das Gleichungssystem aufstellen.

$$\left| \begin{array}{r} 9x + 2y = 10 \cdot 220 \\ x + 3y = 10 \cdot 220 \end{array} \right|$$

Q72 Länge und Breite messen 12 cm und 5 cm.

Länge des Rechtecks in cm: l
Breite des Rechtecks in cm: b

$$\left| \begin{array}{r} l + b = 17 \\ l^2 + b^2 = 169 \end{array} \right|$$

Erste Gleichung nach l auflösen:
$l = 17 - b$
In die 2. Gleichung einsetzen:
$(17 - b)^2 + b^2 = 169$
Dies führt auf die quadratische Gleichung $b^2 - 17b + 60 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 5$, $x_2 = 12$.
Da die Schülerinnen und Schüler zum jetzigen Zeitpunkt solche Gleichungen noch nicht lösen

können, müssen sie sich mit Probieren helfen:

b:	1	2	3	4	5
l:	16	15	14	13	12
$b_2 + l_2$:	257	229	205	185	169

Q73 Der erste Sessellift befördert 1080, der zweite 720 Personen pro Stunde.

Leistung des 1. Liftes [Pers./h]: x
Leistung des 2. Liftes [Pers./h]: y

$$\left| \begin{array}{l} 6x + 4y = 9360 \\ 4x + 6y = 8640 \end{array} \right|$$

Q74 Der erste Läufer rennt 2.9 m pro Sekunden, der zweite 2.1 m pro Sekunde.

Geschw. 1. Läufer: v_1
Geschw. 2. Läufer: v_2

$$\left| \begin{array}{l} v_1 + v_2 = \dfrac{400}{80} \\ v_1 - v_2 = \dfrac{400}{500} \end{array} \right|$$

Q75 Der Tourist wechselt 15 DM-Scheine und 16 Dollar-Scheine

Anzahl 10-DM-Noten: x
Anzahl 10-$-Noten: y

$$\left| \begin{array}{r} x + y = 31 \\ 8.5x + 14y = 351.50 \end{array} \right|$$

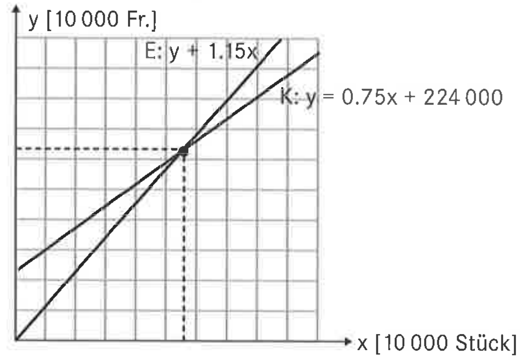
Q76 Onkel Peter ist 60 Jahre und sein Neffe Fritz 12 Jahre alt.

Alter von Fritz heute: f
Alter von Onkel Peter heute: p

$$\left| \begin{array}{r} 5f = p \\ 4(f + 4) = p + 4 \end{array} \right|$$

Q77 **Lump: Nutzschwelle**

a) Gesamtkosten: y = 0.75x + 224 000
b) Gesamterlös: y = 1.15x
c)



Die Nutzschwelle liegt bei 560 000 Stück Seife.
Kosten und Erlös betragen dann Fr. 644 000.–.

$$\left| \begin{array}{l} y = 0.75x + 224\,000 \\ y = 1.15x \end{array} \right|$$

Q78 **Lump: Die Legehennen**

Die schwarzen Hennen legen 1.5 Mal so viele Eier wie die weissen Hennen.

Anzahl Eier der schwarzen Hennen: s
Anzahl Eier der weissen Hennen: w
Anzahl Eier der 1. Gruppe: 4s + 2w
Anzahl Eier der 2. Gruppe: 2s + 3w
Gleichung: 3(4s + 2w) = 4(2s + 3w)

Lösungen der Gleichung: $s = \frac{3}{2}w$

Kontrollaufgaben

Q79 **a)** $L = \{(213, 179)\}$ **b)** $L = \{(3, 1)\}$

Q80 **a)** $L = \{(1.6, 0)\}$ **b)** $L = \left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}\right)\right\}$

Q81 **a)** $L = \left\{\left(-1, -\frac{6}{7}\right)\right\}$ **b)** $L = \left\{\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)\right\}$

Q82 **a)** $L = \{(0.3, 0.2)\}$ **b)** $L = \{(3.5, 13.5)\}$

Q83 Es werden 32 kg von der ersten und 18 kg von der zweiten Sorte gemischt.

Kg der 1. Sorte: x
Kg der 2. Sorte: y

$$\left| \begin{array}{r} x + y = 50 \\ 30x + 80y = 50 \cdot 48 \end{array} \right|$$

Q84 Die kleinere Seite misst 3 cm, die grössere Seite 4 cm.

kleinere Seite: k
grössere Seite: g

$$\left| \begin{array}{l} \frac{k+3}{g+5} = \frac{2}{3} \\ \frac{k+1}{g+6} = \frac{2}{5} \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 3k + 9 = 2g + 10 \\ 5k + 5 = 2g + 12 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 3k - 2g = 1 \\ 5k - 2g = 7 \end{array} \right|$$

Q85 Die erste Leitung liefert 120 Liter, die zweite 80 Liter pro Minute.

Leistung 1. Leitung: x
Leistung 2. Leitung: y

$$\left| \begin{array}{r} 60(x + y) = 12\,000 \\ 30x + 90y = 10\,800 \end{array} \right|$$

Lösbarkeitsbedingungen

Q86

keine Lösung: falls (u = 0 und s ≠ 0) oder (v = 0 und t ≠ 0)

genau eine Lösung falls u ≠ 0 und v ≠ 0

unendlich viele Lösungen falls (u = 0 und s = 0) oder (v = 0 und t = 0)

Q87 $x = \frac{ce - fb}{ae - bd}$, $y = \frac{af - cd}{ae - bd}$

e[I] - b[II]: aex - bdx = ce - fb
a[II] - d[I]: aey - bdy = af - cd
x(ae - bd) = ce - fb
y(ae - bd) = af - cd

Q88 **a)** Die Determinante ist eine Zahl, die durch eine bestimmte Vorschrift aus der quadratischen Zahlentabelle

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

berechnet wird. Für ein 2 x 2 Schema lautet diese Rechenvorschrift: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Die beiden vertikalen Balken fordern dazu auf, diese Rechenvorschrift auszuführen. Je grösser die quadratische Zahlentabelle, desto komplizierter wird die Vorschrift.

b) Die Cramersche Regel ist eine Methode, die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Variablen aus Determinanten zu berechnen, sofern die Lösung existiert und eindeutig ist. Für das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right|$$

lautet sie

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Q89

a) $a \neq 1$, $\left(\frac{1}{a-1}, \frac{a-2}{a-1}\right)$

Genau eine Lösung, falls
$1 \cdot 1 - a \cdot 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$
Koeffizienten in die Lösungsformel einsetzen.

b) $a \neq 10$, $\left(\frac{1}{a-10}, \frac{2a-25}{3(a-10)}\right)$

Genau eine Lösung, falls
$3 \cdot a - 5 \cdot 6 \neq 0 \Rightarrow a \neq 10$
Koeffizienten in die Lösungsformel einsetzen.

Q90

a) $a \neq 0$, $\left(\frac{5}{3a}, \frac{2}{3}\right)$

Genau eine Lösung, falls
$0 \cdot 2 - a \cdot 3 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$
Koeffizienten in die Lösungsformel einsetzen.

b) $a \neq 1$, $(1,0)$

Genau eine Lösung, falls
$1 \cdot a - 1 \cdot 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$
Koeffizienten in die Lösungsformel einsetzen.
Die Lösung ist unabhängig von a.

Q91

a) $a \neq 1$,

Da die linken Seiten der Gleichungen identisch sind, gibt es keine Lösungen bei $a \neq 1$.

b) $a \neq \frac{2}{3}$

Fall 2b ist erfüllt, wenn
$3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0$ und
$1 \cdot 4 - a \cdot 6 \neq 0$ oder
$a \cdot 3 - 1 \cdot 2 \neq 0$

Q92

a) $a = \frac{1}{9}$

Fall 2a ist erfüllt, wenn
$1 \cdot 9 - 3 \cdot 3 = 0$ und
$3a \cdot 9 - 1 \cdot 3 = 0$ und
$1 \cdot 1 - 3 \cdot 3a = 0$

b) $a = 1$ oder $a = -1$

Fall 2a ist erfüllt, wenn $a^2 - 1 = 0$ und $a = a$ und $a^2 = 1$

Q93

$a = 3$ und $b = -3$

$x = 1$ und $y = 2$ einsetzen:

$$\left| \begin{array}{r} a + 2b = -3 \\ b + 6 = a \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{r} a + 2b = -3 \\ a - b = 6 \end{array} \right|$$

Q94

unendlich viele Lösungen:
$a = 4$ und $b = 10$ oder $a = -4$ und $b = -10$
keine Lösungen:
$b = 2.5a$ und $a \neq \pm 4$

Fall 2a: $-2b + 5a = 0$ und
$-ba + 40 = 0$ und $16 - a^2 = 0$
Fall 2b: $-2b + 5a = 0$ und
$-ba + 40 \neq 0$ und $16 - a^2 \neq 0$

Q95 **Lump: Gleichungssysteme würfeln**

a) 64 Systeme

Für jeden der sechs Koeffizienten gibt es zwei Möglichkeiten. Also sind insgesamt $2^6 = 64$ Gleichungssysteme möglich.

b) 40 Systeme

Prinzip: Wir subtrahieren von der gesamten Anzahl möglicher Gleichungen (64) die Anzahl der Gleichungen, welche einen Spezialfall darstellen:
Einen Sonderfall erhalten wir genau dann, wenn $a_1b_2 = a_2b_1$.
Die 6 Fälle, welche diese Gleichung erfüllen, sind rasch gefunden.
Da c_1 und c_2 auf 2 x 2 Arten frei gewählt werden können, ergibt sich die vierfache Anzahl von Sonderfällen, also 24. Somit ist $64 - 24 = 40$ die Anzahl der Systeme mit genau einer Lösung.

c) 42 120 Systeme

Insgesamt sind hier $6^6 = 46\,656$ Gleichungssysteme möglich.
Nun überlegt man sich, sorgfältig welche Produkte mit gleichem Resultat aus zwei gewürfelten Zahlen möglich sind und auf wieviele Arten sie kombiniert werden können.:

4-mal dieselbe Zahl: 6 Produkte
$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1, \ldots, 6 \cdot 6 = 6 \cdot 6$

2 verschiedene Zahlen: 60 Produkte
$1 \cdot 2 = 1 \cdot 2, \ldots, 1 \cdot 6 = 1 \cdot 6, \ldots, 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3, \ldots, 2 \cdot 6 = 2 \cdot 6, \ldots,$
$5 \cdot 6 = 5 \cdot 6$
Das sind 15 Fälle mit je 4 Anordnungsmöglichkeiten

3 verschiedene Zahlen: 12 Produkte
Der einzige Fall $4 \cdot 1 = 2 \cdot 2$ kann auf 12 Arten realisiert werden.

4 verschiedene Zahlen: 48 Produkte
$1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$ und $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ können auf je 24 Arten dargestellt werden.

Folglich haben wir $6 + 60 + 12 + 48 = 126$ Produkte, welche mit den 36 Möglichkeiten für c_1 und c_2 kombiniert werden können.
Also gibt es $46\,656 - 126 \cdot 36 = 42\,120$ Gleichungssysteme mit genau einer Lösung.

Q96 **Lump: Gleichungssysteme mit Tabellenkalkulation**

Der Lösungsvorschlag wurde mit Excel® erstellt.
Zellenbezüge gemäss Aufgabe

a) ohne Berücksichtigung der Spezialfälle:
I5 = (G5*D6–G6*D5)/(A5*D6–A6*D5)
I6 = (G6*A5–A6*G5)/(A5*D6–A6*D5)

b) mit Berücksichtigung der Spezialfälle:
I5 = WENN(A5*D6–A6*D5<>0;
(G5*D6–G6*D5)/(A5*D6–A6*D5);
WENN(UND(A5*D6–A6*D5=0; G6*A5–A6*G5=0);
unendlich viele"; keine"))
I6 = WENN(A5*D6–A6*D5<>0;
(G6*A5–A6*G5)/(A5*D6–A6*D5);
WENN(UND(G5*D6–G6*D5=0; G6*A5–A6*G5=0);
unendlich viele"; keine")

Aus Gründen der Übersichtlichkeit empfiehlt es sich, die Determinanten A5*D6–A6*D5, G5*D6–G6*D5 und G6*A5–A6*G5 in separaten Feldern zu berechnen.

Das Substitutionsverfahren

Q97

a) $L = \{(1, 0)\}$
b) $L = \{(1, 0)\}$

Aufgrund der Lösung in **a)** müssen $\sqrt{x} = 1$ und $\sqrt{y} = 0$ gelten.

Q98 **a)** $L = \{(-2, 1)\}$
b) $L = \{\ \}$

Aufgrund der Lösung in **a)** müssen $x^2 = -2$ und $y^2 = 1$ gelten.

Q99 **a)** $L = \{(9, 4)\}$
b) $L = \left\{\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{4}\right)\right\}$

Aufgrund der Lösung in **a)** müssen $\frac{1}{x} = 9$ und $\frac{1}{y} = 4$ gelten.

Q100 $L = \{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, 1)\}$

Substitution:
$x^2 = a$ und $y^2 = b \Rightarrow a = 1, b = 1$

Q101 $L = \{(x, y) \mid x^2 + 3y^2 = 1\}$

Substitution:
$x^2 = a$ und $y^2 = b \Rightarrow a + 3b = 1$

Q102 $L = \{(2, 4), (2, -4), (-2, 4), (-4, -2)\}$

Substitution:
$x^2 = a$ und $y^2 = b \Rightarrow a = 4, b = 16$

Q103 $L = \{\ \}$

Substitution:
$x^2 = a$ und $y^2 = b \Rightarrow a = 7, b = -6$

Q104 $L = \{(9, 1)\}$

Substitution:
$\sqrt{x} = a$ und $\sqrt{y} = b \Rightarrow a = 3, b = 1$

Q105 $L = \{\ \}$

Substitution:
$\sqrt{x} = a$ und $\sqrt{y} = b \Rightarrow a = -7, b = 9$

Q106 $L = \{(0, 25)\}$

Substitution:
$\sqrt{x} = a$ und $\sqrt{y} = b \Rightarrow a = 0, b = 5$

Q107 $L = \{(4, -3)\}$

Substitution:
$\frac{1}{x} = a$ und $\frac{1}{y} = b \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{3}$

Q108 **L =** $\left\{\left(\frac{13}{7}, -11\right)\right\}$

Substitution:
$\frac{1}{x+1} = a$ und $\frac{1}{y+1} = b$
$\Rightarrow a = \frac{7}{20}, b = -\frac{1}{10}$

Q109 $L = \{(0, 1)\}$

Substitution:
$\frac{1}{x+y} = a$ und $\frac{1}{x-y} = b$
$\Rightarrow a = 1, b = -1 \Rightarrow \left| \begin{matrix} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{matrix} \right|$

Q110 Gleichungssysteme, die «fast» linear abhängige Gleichungen enthalten, bereiten den Taschenrechnern numerische Schwierigkeiten. Stichwort: Schlechte Konditionierung des Gleichungssystems. Beispiel: Das Gleichungssystem

$$\left| \begin{matrix} 100\,001x - 100\,000y = 100\,000 \\ 100\,002x - 100\,001y = 100\,000 \end{matrix} \right|$$

besitzt offensichtlich die Lösungen $x = 100\,000$ und $y = 100\,000$. Man prüfe, ob der eigene Taschenrechner auf das gleiche Resultat kommt. Vergleiche auch mit Aufgabe Q114. **Moral:** Verlasse dich nicht auf deinen Taschenrechner!

Q111 **a)** $L = \{(-1, 2)\}$ **b)** $L = \{(180, 88.75)\}$
c) $L = \{(-0.02, -2.63)\}$

Q112 **a)** $L = \{(956.98, -769.36)\}$ **b)** $L = \{(-9, 9.35)\}$
c) $L = \{(270, 133.75)\}$

Q113 **a)** $L = \{(6.92, -2.80)\}$ **b)** $L = \{(3, -1)\}$
c) $L = \{\ \}$

Q114 $L = \{(1, 1)\}$ und $L = \{(500, -499)\}$

Q115 $L = \{(-6, 4, -4)\}$

[III]: $\Rightarrow z = -4$
[II]: $y - 8 = -y \Rightarrow y = 4$
[I]: $x + 12 - 16 = -10 \Rightarrow x = -6$

Q116 $L = \{(4, 1, 3)\}$

[III]: $\Rightarrow z = 3$
[II]: $y - 15 = -14 \Rightarrow y = 1$
[I]: $x + 2 + 3 = 9 \Rightarrow x = 4$

Q117 $L = \left\{\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)\right\}$

[II]: $\Rightarrow z = \frac{5}{2}$
[I]: $3y - 10 = -11 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$
[III]: $-\frac{5}{3} - 2x + \frac{5}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

Q118 $L = \left\{\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{3}\right)\right\}$

1. Zahl: x, 2. Zahl: y, 3. Zahl: z

$$\left|\begin{array}{r} x + 1 = y \\ y + 1 = z \\ x + y + z = 8 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{r} x - y = -1 \\ y - z = -1 \\ x + y + z = 8 \end{array}\right|$$

[II] + [III] = [I']: $x + 2y = 7$
[I'] − [I]: $3y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{3}$
[I]: $x - \frac{8}{3} = -1 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$
[II]: $\frac{8}{3} - z = -1 \Rightarrow z = \frac{11}{3}$

Q119 $L = \{(2, 3, 4)\}$

[I] − [II]: $2z = 8 \Rightarrow z = 4$
[I] − [III]: $\Rightarrow x = 2$
[III]: $y + 4 = 7 \Rightarrow y = 3$

Q120 $L = \{(1, -4, -12)\}$

[I] − [II]: $\Rightarrow y = -4$
[III] − [II]: $4x = 4 \Rightarrow x = 1$
[II]: $1 - 4 - z = 9 \Rightarrow z = -12$

Q121 $x + 7z = 17$

$2 \cdot [I] + 3 \cdot [II]$

Q122 $7u + 21w - 2x + 3z = -5$

$3 \cdot [I] + 5 \cdot [II]$

Q123 Magali pèse 51 kg, Pierre pèse 72 kg et Aria pèse 15 kg

a: Masse von Aria, m: Masse von Magali, p: Masse von Pierre

$$\left|\begin{array}{l} a + p = 87 \\ m + p = 123 \\ a + m = 66 \end{array}\right|$$

Q124 $L = \{(9, 7, 5)\}$

[I] - 2[II] = [I']:	$x - 6z = -21$
[III]:	$2x + z = 23$
2[I'] - [III]:	$-13z = -65 \Rightarrow z = 5$
[III]:	$2x + 5 = 23 \Rightarrow x = 9$
[II]:	$y + 15 = 22 \Rightarrow y = 7$

Q125 $L = \{(8, 5, 9)\}$

[I] - [II]:	$2y = 10 \Rightarrow y = 5$
[I] - [III]:	$2z = 18 \Rightarrow z = 9$
[II] + [III]:	$2x = 16 \Rightarrow x = 8$

Q126 $L = \{(3, 4, 5)\}$

[I] + 2[II] = [I']:	$13x - 3z = 24$
[I] + 3[III] = [II']:	$35x - 16z = 25$
16[I'] - 3[II']:	$103x = 309 \Rightarrow x = 3$
[I']	$39 - 3z = 24 \Rightarrow z = 5$

Q127 $L = \{(1, -1, 5)\}$

2[I] = [I']:	$5x + 4y + 2z = 11$
3[II] = [II']:	$4x - 5y + 3z = 24$
3[I'] - 2[II'] = [III']:	$7x + 22y = -15$
[III]:	$3x - 2y = 5$
3[III'] - 7[III]:	$80y = -80 \Rightarrow y = -1$
[III]:	$3x + 2 = 5 \Rightarrow x = 1$
[I']:	$5 - 4 + 2z = 11 \Rightarrow z = 5$

Q128 $L = \{(5, 7, 11)\}$

2[I] + [II] = [I']:	$24x + 5y = 155$
[I] - 2[III] = [II']:	$3x + 6y = 57$
[I'] - 8[II']:	$-43y = -301 \Rightarrow y = -7$
[II']:	$3x + 42 = 57 \Rightarrow x = 5$
[III]:	$15 + 14 - 4z = -15$
	$\Rightarrow z = 11$

Q129 $L = \{(a + c, a - b, b - c)\}$

[I] - [II]:	$2y = 2a - 2b \Rightarrow y = a - b$
[II] - [III]:	$2z = 2b - 2c \Rightarrow z = b - c$
[I] + [III]:	$2x = 2a + 2c \Rightarrow x = a + c$

Q130 Dreieck: $\frac{2}{19}$ kg Quadrat: $\frac{5}{19}$ kg

Kreis: $\frac{3}{19}$ kg Kreuz: $\frac{6}{19}$ kg

○ = a, □ = b, △ = c, ✚ = d

$$\left|\begin{array}{r} 3a + 2b = 1 \\ a + b = c + d \\ c + a = b \\ d = 3c \end{array}\right|$$

Q131 Andreas (a) ist 15 Jahre, Beatrice (b) ist 18 Jahre, Clemens (c) ist 17 Jahre und Denise (d) ist 19 Jahre alt. Also würde Andreas nicht ins Kino kommen

$$\left|\begin{array}{r} a + b + c + d = 69 \\ a + b + 3 = c + d \\ b + c - 1 = a + d \\ 2b = c + d \end{array}\right|$$

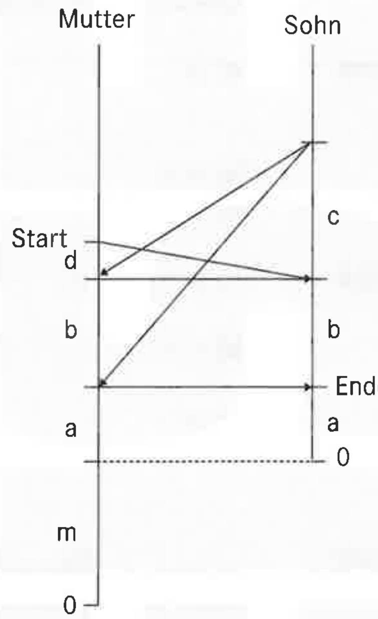
Q132 Im Frühling/Herbst werden 45 Paar Skis, 63 Velos und 72 Schlauchboote pro Tag hergestellt.

$$\left|\begin{array}{r} 240s + 350v + 50b = 36\,450 \\ 80s + 350v + 150b = 36\,450 \\ 480s + 350v + 25b = 45\,450 \end{array}\right|$$

Q133

Mutter: 4 J
Sohn: 2.4 J
Start = aktuelles Alter,
m = Alter der Mutter bei Geburt
Die Mutter ist doppelt so alt, wie der Affe war:
$m + a + b + d = 2(a+b)$
als die Mutter halb so alt war, wie der Affe sein wird:
$2(m + a + b) = a + b + c$
wenn er dreimal so alt sein wird, wie seine Mutter war:
$3(m + a) = a + b + c$
als sie dreimal so alt war wie ihr Sohn:
$a + m = 3a$
Affe und Mutter sind zusammen 6.4 Jahre alt:
$m + 2(a + b + d) = 6.4$
Das ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + b - d - m &= 0 \\ a + b - c + 2m &= 0 \\ 2a - b - c + 3m &= 0 \\ 2a - m &= 0 \\ 2a + 2b + 2d + m &= 6.4 \end{aligned}$$



Q134

$a = 1, b = 3, c = 2, d = -1$

[IV]: $2d = -2 \Rightarrow d = -1$
[III]: $-3c - 1 = -7 \Rightarrow c = 2$
[II]: $b + 4 - 1 = 6 \Rightarrow b = 3$
[I]: $3a + 12 + 2 - 9 = 8 \Rightarrow a = 1$

Q135

$u = 3, x = 6, y = 5, z = 4$

[I] + [II] = [I']: $2x + z - u = 13$
[I'] – 2[IV] = [II']: $z - 3u = -5$
[II'] + 3[III]: $4z = 16 \Rightarrow z = 4$
[III]: $4 + u = 7 \Rightarrow u = 3$
[IV]: $x + 3 = 9 \Rightarrow x = 6$
[II]: $6 + y = 11 \Rightarrow y = 5$

Q136

$u = -3, x = 1, y = -1, z = 2$

[I] + [II] = [I']: $2x + 2z = 6$
[I] + [III] = [II']: $-x + 2y = -3$
[I] – [IV] = [III']: $-2x - y = -1$
[II'] + 2[III']: $-5x = -5 \Rightarrow x = 1$
[III']: $-2 - y = -1 \Rightarrow y = -1$
[I']: $2 + 2z = 6 \Rightarrow z = 2$
[I]: $1 - 1 + 2 + u = -1$
$\Rightarrow u = -3$

Q137

Unfälle an der Kreuzung AC: 7
Unfälle an der Kreuzung BF: 6
Unfälle an der Kreuzung DE: 8
Also ereigneten sich die meisten Unfälle an Kreuzung DE.

x: Anzahl Unfälle an der Kreuzung AC
y: Anzahl Unfälle an der Kreuzung BF
z: Anzahl Unfälle an der Kreuzung DE
An jeder Kreuzung reduziert sich die Anzahl unfallfreier Autos. Daraus ergeben sich die «Unfallbilanzen»:

$$\left| \begin{aligned} 900 - x - y &= 887 \\ 800 - x - z &= 785 \\ 700 - z - y &= 686 \end{aligned} \right|$$

Lineare Ungleichungssysteme

Q138

a) ja

Setzt man die Koordinaten des Punktes ein, erhält man die wahre Aussage $0 \leq 4$.

b) nein

Einsetzen: $100 \leq 4$ (falsche Aussage)

c) ja

Einsetzen: $-200 \leq 4$ (wahre Aussage)

Q139

a) ja

Einsetzen: $4.25 \leq 4.5$ (wahre Aussage)

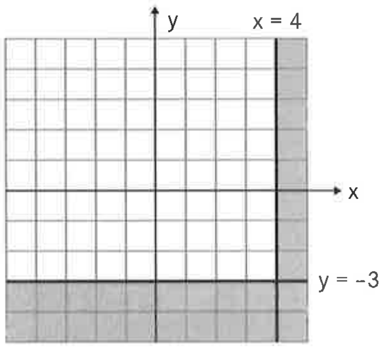
b) nein

Einsetzen: $10.5 \leq -14.4$ (falsche Aussage)

c) ja

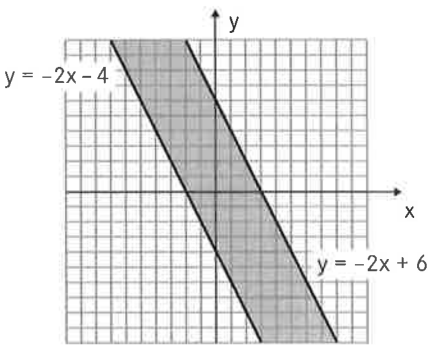
Tipp: $8\,999\,999\,999 = 9 \cdot 10^9 - 1$
$\Rightarrow\; 4.5 \cdot 10^{10} \leq 4.5 \cdot 10^{10}$
(wahre Aussage)

Q140



Zuerst sind die entsprechenden Gleichungen x = 4 und y = −3 grafisch darzustellen.
Dann prüft man durch Einsetzen, ob z. B. der Nullpunkt die betreffende Ungleichung erfüllt.
Ist diese Aussage wahr, so gehört die Halbebene, welche den Punkt enthält zur Lösungsmenge; ansonsten die andere Halbebene.
Die Geraden selbst gehören bei Ungleichungen mit ≤ oder ≥ immer zur Lösungsmenge.

Q141



Nach y aufgelöst lauten die Gleichungen der Begrenzungsgeraden:
$y = -2x + 6$
$y = 2x - 4$

Q142

$$\left|\begin{array}{r} y \geq 1 \\ x \leq 2 \\ 2y \leq x + 6 \end{array}\right|$$

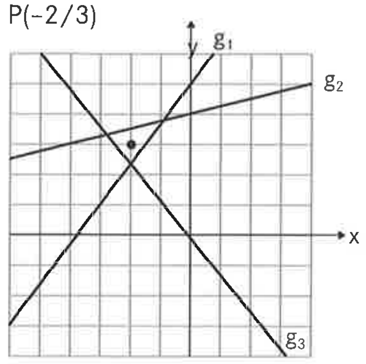
Geradengleichungen bestimmen und das Relationszeichen so setzen, dass ein beliebiger, zur Lösungsmenge gehörender Punkt die Ungleichung erfüllt.

Q143

$$\left|\begin{array}{l} y \leq x + 3 \\ y \leq -x + 3 \\ y \geq x - 3 \\ y \geq -x - 3 \end{array}\right| \quad \text{oder kürzer } |x| + |y| \leq 3$$

Analog zur Aufgabe Q142

Q144 P(-2/3)



Ungleichungen zunächst als Gleichungen deuten und diese nach y auflösen:

g_1: $y = \frac{4}{3}x + 5$

g_2: $y = \frac{1}{4}x + 4$

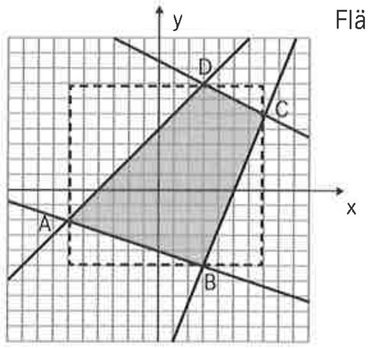
g_3: $y = -\frac{5}{4}x$

Vermutung: P(-2/3) ist der gesuchte Punkt

Probe: (ursprüngliches Ungleichungssystem)

$$\left| \begin{array}{r} -17 \leq -15 \\ -14 \leq -16 \\ 2 \geq 0 \end{array} \right|$$

Q145



Flächeninhalt: 78 LE^2

Hinweis: Diese Aufgabe ist sehr aufwändig, wenn kein Taschenrechner vorhanden ist, welcher lineare Gleichungssysteme lösen kann.

Schnittpunkte der Geraden:
A(-6/-2), B(3/-5), C(7/5), D(3/7)

Flächeninhalt des umschriebenen Rechtecks (gestrichelt): 156 Häuschen

Flächeninhalte der äusseren rechtwinkligen Dreiecke:
SW: 13.5, SO: 20, NO: 4, NW: 40.5

Nettofläche:
156 - 13.5 - 20 - 4 - 40.5 = 78

Aufgaben zur linearen Optimierung

Q146 maximal für s = 8 und t = 2
(Zusatzmaterial Q/4)

I. Nebenbedingungen

Es können nur positive Stückzahlen hergestellt werden:
$s \geq 0$ und $t \geq 0$

Es können höchstens 10 Möbelstücke hergestellt werden:
$s + t \leq 10$

Die Herstellkosten dürfen Fr. 800.- nicht übersteigen:
$50s + 200t \leq 800$ ($s + 4t \leq 16$)

Zusammenfassung der Nebenbedingungen:

$$\left| \begin{array}{r} s \geq 0 \\ t \geq 0 \\ s + t \leq 10 \\ s + 4t \leq 16 \end{array} \right|$$

Das Gebiet, welches durch dieses Ungleichungssystem bestimmt wird, heisst Planungspolygon. Alle Punkte im Innern oder auf dem Rand dieses Polygons haben Koordinaten t und s, welche die Bedingungen erfüllen.

II. Zielfunktion

Der Gewinn pro Tisch beträgt Fr. 90.-, der Gewinn pro Stuhl Fr. 40.-. Also lautet die Zielfunktion für den Gewinn: . Zu jedem Wert von z gehört genau eine Gerade. Diese Geraden sind offensichtlich alle parallel.

Gesucht wird eine Parallele, deren Durchschnitt mit dem Planungspolygon nicht leer ist und zu der ein möglichst grosses z gehört.
III. Lösung (Siehe Kopiervorlage)
Skizziert man einige dieser Geraden in ein Koordinatensystem, sieht man, dass sich bei der Tagesproduktion von t = 2 Tischen und s = 8 Stühlen der maximale Gewinn von z = 500 Franken ergibt.

Q147 a = 200 und b = 800 (Zusatzmaterial Q/5)

I. Nebenbedingungen
Ist a die Stückzahl von Artikel A und b die Stückzahl von Artikel B so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:
Negative Stückzahlen sind Unsinn: $a \geq 0$ und $b \geq 0$
Mehr als 700 Stück pro Tag können nicht hergestellt werden: $a + b \leq 700$
Produkt b beansprucht die Anlage zeitlich doppelt so stark wie Produkt a: $36a + 72b \leq 36\,000$ (Sekunden)
Vereinfacht lautet das Ungleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{r} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a + b \leq 700 \\ a + 2b \leq 1000 \end{array} \right|$$

In der grafischen Darstellung ist eine Häuschenlänge mit 100 Stück zu identifizieren.
II. Zielfunktion
Der Verkaufserlös beträgt $z = 5a + 3b$
III. Lösung
Für die Fabrikationsmenge von 700 Stück des Produktes A und 0 Stück des Produktes B ist der Gewinn unter den gegebenen Bedingungen maximal und beträgt Fr. 3500.–.
Dieses Resultat ist nicht verwunderlich: Produkt B hat zwei Nachteile gegenüber Produkt A: Es braucht doppelt so lange in der Herstellung und kann nicht so teuer verkauft werden. Produkt B müsste daher aus dem Sortiment genommen oder teurer verkauft werden.

Q148 L1 → G1: 2 t, L2 → G1: 3 t
L1 → G2: 2 t, L2 → G2: 0 t
L1 → G3: 0 t, L2 → G3: 2 t
(Zusatzmaterial Q/6)

I. Nebenbedingungen
Anzahl Tonnen L1 (G1: $x \geq 0$
Anzahl Tonnen L1 (G2: $y \geq 0$
Anzahl Tonnen L1 (G3: $4-x-y \geq 0$
Anzahl Tonnen L2 (G1: $5-x \geq 0$
Anzahl Tonnen L2 (G2: $2-y \geq 0$
Anzahl Tonnen L2 (G3: $6-(5-x)-(2-y) \geq 0$
Dies führt (nach Vereinfachung) auf das Ungleichungssystem

$$\left| \begin{array}{r} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ x \leq 5 \\ y \leq 2 \\ x + y \geq 1 \end{array} \right|$$

Die Bedingung $x \leq 5$ ist überflüssig, da sie sich von selbst aus den ersten drei Ungleichungen ergibt.

II. Zielfunktion

Die gesamten Transportkosten setzen sich aus den Kosten der Einzeltransporte zusammen:

Kosten L1 → G1: 40x

Kosten L1 → G2: 10y

Kosten L1 → G3: 70(4 - x - y)

Kosten L2 → G1: 50(5 - x)

Kosten L2 → G2: 60(2 - y)

Kosten L2 → G3: 20(x + y - 1)

Zusammengezählt, ausmultipliziert und zusammengefasst ergibt dies die Zielfunktion für die Gesamtkosten:

$z = -60x - 100y + 630$

III. Lösung

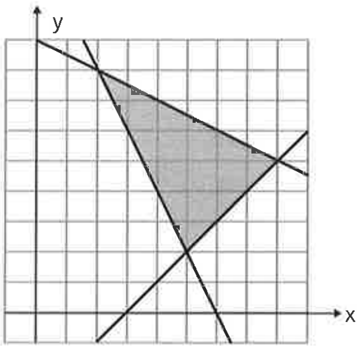
Die gesamten Transportkosten sind für $x = 2$ und $y = 2$ minimal und betragen Fr. 310.-.

Kontrollaufgaben

Q149 **a)** $L = \{(213, 179)\}$
b) $L = \{(3, 1)\}$
b) $L = \{(2, 4)\}$

Q150 $a = -8$ und $b = -\frac{20}{3}$

Q151



Die einzelnen Gleichungen lauten nach y aufgelöst:

$y = x - 3$, $y = -\frac{1}{2}x + 9$, $y = -2x + 12$

Setzt man der Einfachheit halber die Koordinaten (0/0) des Ursprungs in die Ungleichungen ein, so erhält man

$$\left|\begin{array}{l|l} 0 \geq -3 & w \\ 0 \leq 18 & w \\ 0 \geq 12 & f \end{array}\right.$$

Falls die jeweilige Aussage wahr ist, wird die Halbebene mit dem Nullpunkt schraffiert sonst die Halbebene ohne Nullpunkt. Die Schnittmenge ist schliesslich die Lösung.

Q152 $L = \{(-1, 1, -1)\}$

[II] + [III] = [I']:	$3x + 2y = -1$		
[I]:	$2x - 5 = -7$		
3[I] - 2[I']	$-19y = -19$	⇒	$y = 1$
[III]:	$2 + z = 1$	⇒	$z = -1$
[II]:	$3x + 1 = -2$	⇒	$x = -1$