J4 Pyramiden und Kegel

J41 -

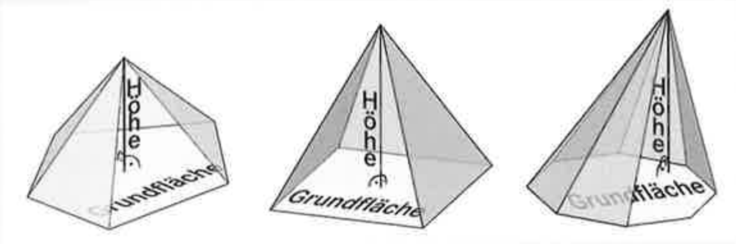
J42 a - d

$V_{Pyramide}$

d Das Volumen einer Pyramide

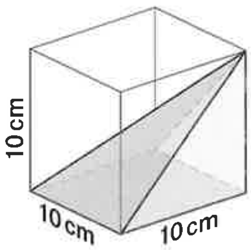
Ein Massevergleich zwischen einer Pyramide und einem Prisma mit der gleichen Grundfläche und der gleichen Höhe zeigt, dass die Pyramide genau **einen Drittel** des Prismenvolumens aufweist.

Das Volumen V einer Pyramide lässt sich demnach aus der Grundfläche G und der Höhe h berechnen.



Volumen = Grundfläche mal Höhe durch 3 $\qquad$ $\mathbf{V_{Pyramide} = G \cdot h : 3}$

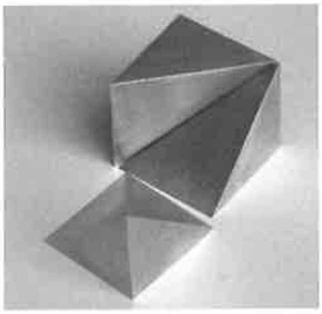
J43



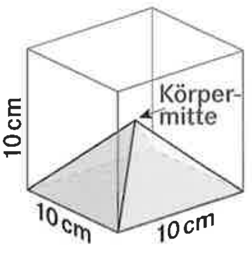
G = Quadrat
$G = (10\,cm)^2 = 100\,cm^2$

h = Würfelhöhe
$h = 10\,cm$

$\mathbf{V} = G \cdot h : 3 = 100\,cm^2 \cdot 10\,cm : 3$
$= \mathbf{333\,^1/_3\,cm^3}$
Dies ist $^1/_3$ des Würfelvolumens.



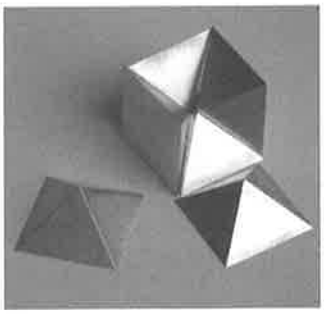
Drei solche Pyramiden, füllen den Würfel vollständig aus.



G = Quadrat
$G = (10\,cm)^2 = 100\,cm^2$

h = halbe Würfelhöhe
$h = 5\,cm$

$\mathbf{V} = G \cdot h : 3 = 100\,cm^2 \cdot 5\,cm : 3$
$= \mathbf{166\,^2/_3\,cm^3}$
Dies ist $^1/_6$ des Würfelvolumens.



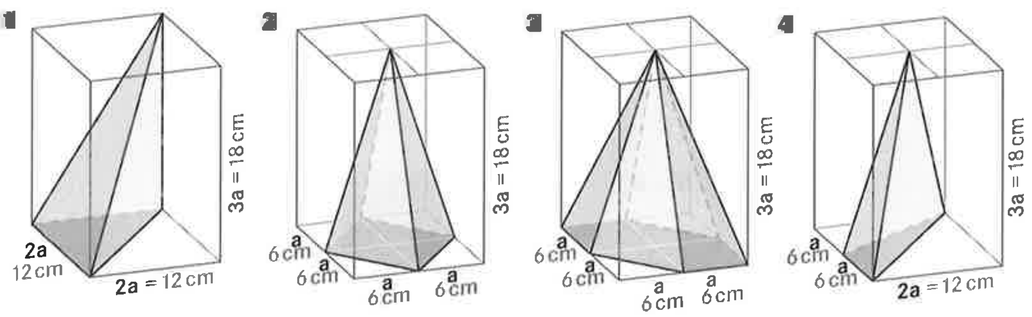
Sechs Pyramiden dieser Art füllen den Würfel vollständig aus.

Fazit
Beide Resultate bestätigen die Richtigkeit der Volumenformel $V = G \cdot h : 3$.

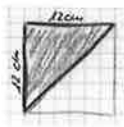
Lösung auf **Kopiervorlagen**

J44 Die **Herleitung der Volumenformel** für Pyramiden befindet sich auf **zwei Kopiervorlagen** im hinteren Teil dieses Begleitordners (Seiten 15 und 16 der Kopiervorlagen).

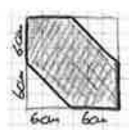
J45



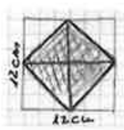
a 1 $G = (12\,\text{cm})^2 : 2 = 72\,\text{cm}^2$
$h = 18\,\text{cm}$
$V = G \cdot h : 3 = \mathbf{432\,cm^3}$



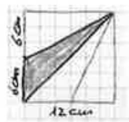
3 $G = (12\,\text{cm})^2 - (6\,\text{cm})^2 = 108\,\text{cm}^2$
$h = 18\,\text{cm}$
$V = G \cdot h : 3 = \mathbf{648\,cm^3}$



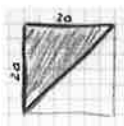
2 $G = (12\,\text{cm})^2 : 2 = 72\,\text{cm}^2$
$h = 18\,\text{cm}$
$V = G \cdot h : 3 = \mathbf{432\,cm^3}$



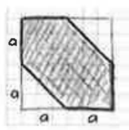
4 $G = (12\,\text{cm})^2 : 4 = 36\,\text{cm}^2$
$h = 18\,\text{cm}$
$V = G \cdot h : 3 = \mathbf{216\,cm^3}$



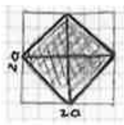
b 1 $G = (2a)^2 : 2 = 2a^2$
$h = 3a$
$V = G \cdot h : 3 = \mathbf{2a^3}$



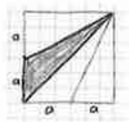
3 $G = (2a)^2 - a^2 = 3a^2$
$h = 3a$
$V = G \cdot h : 3 = \mathbf{3a^3}$



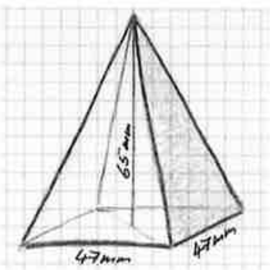
2 $G = (2a)^2 : 2 = 2a^2$
$h = 3a$
$V = G \cdot h : 3 = \mathbf{2a^3}$



4 $G = (2a)^2 : 4 = a^2$
$h = 3a$
$V = G \cdot h : 3 = \mathbf{a^3}$



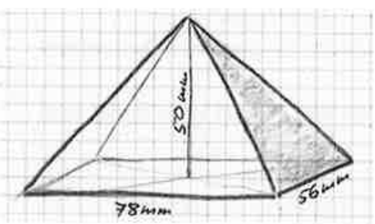
J46 **a**



$G = (47\,\text{mm})^2 = 2\,209\,\text{mm}^2$
$h = 65\,\text{mm}$

$V = G \cdot h : 3$
$= 47\,861.666...\,\text{mm}^3$
$\approx \mathbf{47\,862\,mm^3}$

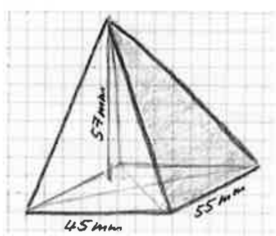
b



$G = 78\,\text{mm} \cdot 56\,\text{mm} = 4368\,\text{mm}^2$
$h = 50\,\text{mm}$

$V = G \cdot h : 3$
$= \mathbf{72\,800\,mm^3}$

c



$G = 45\,\text{mm} \cdot 55\,\text{mm} = 2\,475\,\text{mm}^2$
$h = 57\,\text{mm}$

$V = G \cdot h : 3$
$= \mathbf{47\,025\,mm^3}$

J47 Das Volumen verändert sich bei beiden Pyramiden auf die gleiche Art:

a Das Volumen **verdoppelt** sich.

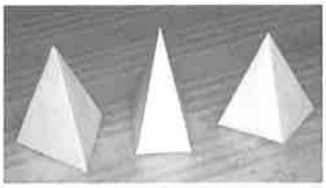
In Formeln: $V_{\text{ursprünglich}} = \frac{G \cdot h}{3}$ $\qquad V_{\text{neu}} = \frac{G \cdot \mathbf{2}h}{3} = \mathbf{2} \cdot \frac{G \cdot h}{3} = \mathbf{2} \cdot V_{\text{ursprünglich}}$

b Das Volumen **vervierfacht** sich, weil sich die Grundfläche vervierfacht.

In Formeln: $V_{\text{ursprünglich}} = \frac{G \cdot h}{3}$ $\qquad V_{\text{neu}} = \frac{\mathbf{4}G \cdot h}{3} = \mathbf{4} \cdot \frac{G \cdot h}{3} = \mathbf{4} \cdot V_{\text{ursprünglich}}$

c Das Volumen **verachtfacht** sich.

In Formeln: $V_{\text{ursprünglich}} = \frac{G \cdot h}{3}$ $\qquad V_{\text{neu}} = \frac{\mathbf{4}G \cdot \mathbf{2}h}{3} = \mathbf{8} \cdot \frac{G \cdot h}{3} = \mathbf{8} \cdot V_{\text{ursprünglich}}$



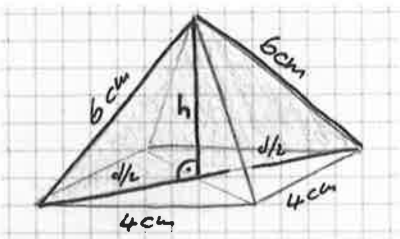
J48 **a** Regelmässige, vierseitige Pyramide
Grundkanten: 4 cm
Seitenkanten: 6 cm

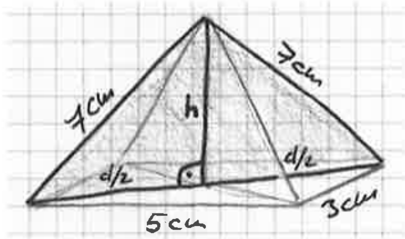
Grundfläche: $G = (4\,\text{cm})^2 = 16\,\text{cm}^2$
Höhe: $h = ?$

Gerade, vierseitige Pyramide (G = Rechteck)
Grundkanten: 3 cm, 5 cm
Seitenkanten: s = 7 cm

Grundfläche: $G = 5\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 15\,\text{cm}^2$
Höhe: $h = ?$

Die Höhe einer qudratischen oder rechteckigen Pyramide ist **Höhe im gleichschenkligen Schnittdreieck**, das von 2 Seitenkanten und der Diagonale der Grundfläche gebildet wird:





Sie kann somit mit Hilfe des Satzes von Pythagoras aus der **Seitenkante** und der **halben Diagonale** berechnet werden:

$d/2 = \sqrt{4^2+4^2}\,\text{cm} : 2 = 2.828...\,\text{cm}$

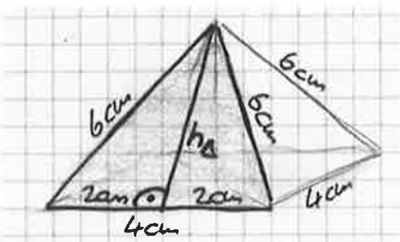
$h = \sqrt{(6\,\text{cm})^2 - (d/2)^2} = 5.291...\,\text{cm}$

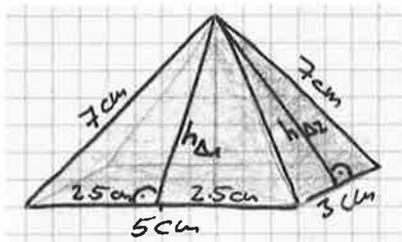
$d/2 = \sqrt{5^2+3^2}\,\text{cm} : 2 = 2.915...\,\text{cm}$

$h = \sqrt{(7\,\text{cm})^2 - (d/2)^2} = 6.363...\,\text{cm}$

Damit kann nun das Volumen berechnet werden:
$V = G \cdot h : 3 \approx \mathbf{28.22\,cm^3}$ | $V = G \cdot h : 3 \approx \mathbf{31.82\,cm^3}$

b Die Mantelfäche der quadratischen Pyramide besteht aus 4 kongruenten **gleichschenkligen** Dreiecken, jene der rechteckigen aus 2 Paaren von kongruenten **gleichschenkligen** Dreiecken.





Um die Flächen dieser Dreiecke zu berechnen, muss man zuerst ihre Höhen kennen. Diese lassen sich wiederum mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen:

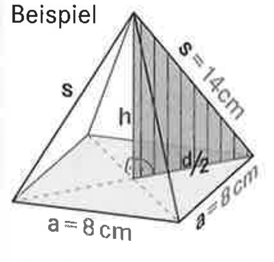
$h_\triangle = \sqrt{6^2 - 2^2}\,\text{cm} = 5.656...\,\text{cm}$
$A_\triangle = 4\,\text{cm} \cdot h_\triangle : 2 = 11.313...\,\text{cm}^2$

$\mathbf{M = 4 \cdot A_\triangle \approx 45.25\,cm^2}$

$h_{\triangle 1} = \sqrt{7^2 - 2.5^2}\,\text{cm} = 6.538...\,\text{cm}$
$A_{\triangle 1} = 5\,\text{cm} \cdot h_{\triangle 1} : 2 = 16.345...\,\text{cm}^2$
$h_{\triangle 2} = \sqrt{7^2 - 1.5^2}\,\text{cm} = 6.837...\,\text{cm}$
$A_{\triangle 2} = 3\,\text{cm} \cdot h_{\triangle 2} : 2 = 10.256\,\text{cm}^2$
$\mathbf{M = 2 \cdot A_{\triangle 1} + 2 \cdot A_{\triangle 2} \approx 53.20\,cm^2}$

J49 Berechnungen von Kanten, Körperhöhe, Seitenhöhen und Mantel

a **1** Beispiel



Es gibt 4 kongruente Dreiecke, die für die **Berechnung von h aus s und a** in Frage kommen.

a = 8 cm s = 14 cm

$\mathbf{h} = \sqrt{s^2 - (d/2)^2}$ $d = \sqrt{8^2 + 8^2}\,\text{cm} = 11.313\ldots\,\text{cm}$

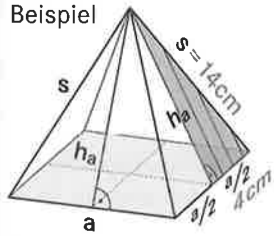
$= \sqrt{14^2 - (11.313\ldots : 2)^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{12.81\,cm}$

oder

$\mathbf{h} = \sqrt{s^2 - \frac{d^2}{4}}$ $d^2 = 2a^2$

$= \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{196 - 32}\,\text{cm} = \sqrt{164}\,\text{cm} \approx \mathbf{12.81\,cm}$

2 Beispiel



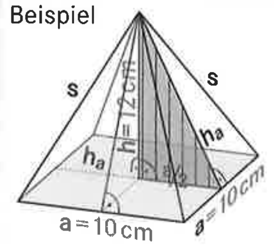
Es gibt 8 kongruente Dreiecke, die für die **Berechnung von h_a aus s und a** in Frage kommen.

$\mathbf{h_a} = \sqrt{s^2 - (a/2)^2} = \sqrt{14^2 - 4^2}\,\text{cm} = 13.416\ldots\,\text{cm} \approx \mathbf{13.42\,cm}$

oder $= \sqrt{180}\,\text{cm}$

$M = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} = 2 \cdot a \cdot h_a = 2 \cdot 8\,\text{cm} \cdot 13.416\ldots\,\text{cm} \approx \mathbf{214.66\,cm^2}$

b Beispiel

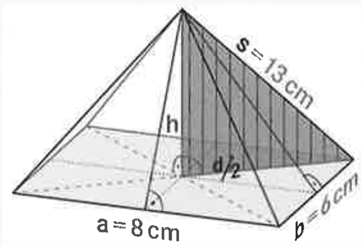


Es gibt 4 kongruente Dreiecke, die für die **Berechnung von h_a aus a und h** in Frage kommen.

a = 10 cm h = 12 cm

$\mathbf{h_a} = \sqrt{h^2 + (a/2)^2} = \sqrt{12^2 + 5^2}\,\text{cm} = \mathbf{13\,cm}$

c **1** zu berechnen: h
aus: a = 8 cm b = 6 cm s = 13 cm

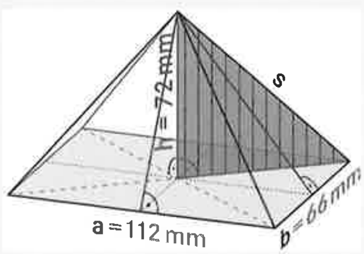


$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 6^2}\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$

$\mathbf{h} = \sqrt{s^2 - (d/2)^2} = \sqrt{13^2 - 5^2}\,\text{cm} = \mathbf{12\,cm}$

Hinweis an die Lehrperson
Wir vernetzen die Berechnung der Seitenkanten erst später mit der Berechnung der Quaderdiagonale, um die Lernenden hier nicht zu überfordern.

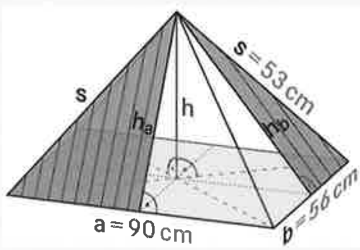
2 zu berechnen: s
aus: a = 112 mm b = 66 mm h = 72 mm



$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{112^2 + 66^2}\,\text{mm} = 130\,\text{mm}$

$\mathbf{s} = \sqrt{h^2 + (d/2)^2} = \sqrt{72^2 + 65^2}\,\text{mm} = \mathbf{97\,mm}$

3 zu berechnen: h_a, h_b, M
aus: a = 90 cm b = 56 cm s = 53 cm

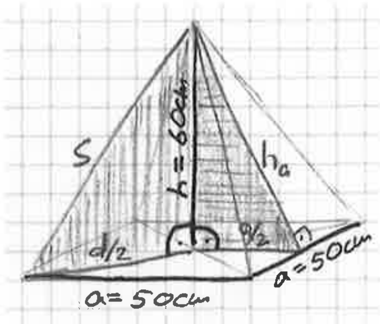


$\mathbf{h_a} = \sqrt{s^2 - (a/2)^2} = \sqrt{53^2 - 45^2}\,\text{cm} = \mathbf{28\,cm}$

$\mathbf{h_b} = \sqrt{s^2 - (b/2)^2} = \sqrt{53^2 - 28^2}\,\text{cm} = \mathbf{45\,cm}$

$\mathbf{M} = 2 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_b}{2} = a \cdot h_a + b \cdot h_b = \mathbf{5\,040\,cm^2}$

J410 **a** $a = 50\,\text{cm}$ $\qquad h = 60\,\text{cm}$ $\qquad$ zu berechnen: s, M, V



$d = \sqrt{50^2 + 50^2}\,\text{cm} = 50\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} = 70.710\ldots\text{cm}$

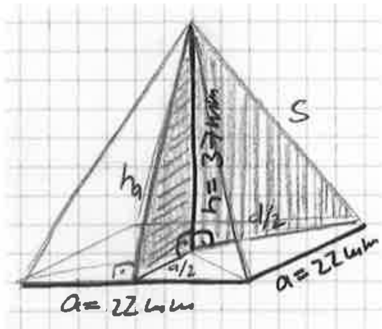
$\mathbf{s} = \sqrt{h^2 + (d/2)^2} \approx \mathbf{69.64\,cm}$

$h_a = \sqrt{h^2 + (a/2)^2} = 65\,\text{cm}$

$\mathbf{M} = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} = 2 \cdot a \cdot h_a = 2 \cdot 50\,\text{cm} \cdot 65\,\text{cm} = \mathbf{6\,500\,cm^2}$

$\mathbf{V} = G \cdot h : 3 = (50\,\text{cm})^2 \cdot 60\,\text{cm} : 3 = \mathbf{50\,000\,cm^3}$

b $a = 22\,\text{mm}$ $\qquad h = 37\,\text{mm}$ $\qquad$ zu berechnen: s, M, V



$d = 22\,\text{mm} \cdot \sqrt{2} = 31.112\ldots\text{mm}$

$\mathbf{s} = \sqrt{h^2 + (d/2)^2} \approx \mathbf{40.14\,mm}$

$h_a = \sqrt{h^2 + (a/2)^2} = 38.600\ldots\text{mm}$

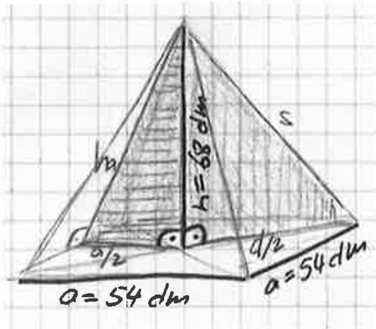
$\mathbf{M} = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} = 2 \cdot a \cdot h_a \approx \mathbf{1\,698.42\,mm^2}$

$\mathbf{V} = G \cdot h : 3 = (22\,\text{mm})^2 \cdot 37\,\text{mm} : 3 \approx \mathbf{5969.33\,mm^3}$

Folgefehler vermeiden

Folgefehler können vermieden werden, indem man – falls möglich – beim Berechnen der gesuchten Grössen die **vorgegebenen Grössen** verwendet.

c $a = 54\,\text{dm}$ $\qquad h = 68\,\text{dm}$ $\qquad$ zu berechnen: s, M, V



$d = a \cdot \sqrt{2} = 76.367\,\text{dm}$

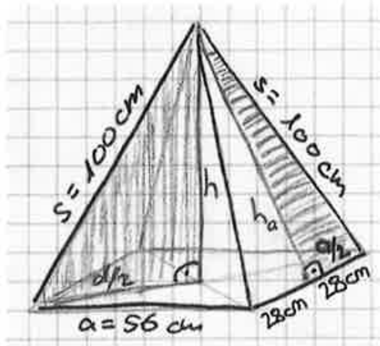
$\mathbf{s} = \sqrt{h^2 + (d/2)^2} \approx \mathbf{77.99\,dm}$

$h_a = \sqrt{h^2 + (a/2)^2} = 73.164\ldots\text{dm}$

$\mathbf{M} = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} = 2 \cdot a \cdot h_a \approx \mathbf{7\,901.73\,dm^2}$

$\mathbf{V} = G \cdot h : 3 = (54\,\text{dm})^2 \cdot 68\,\text{mm} : 3 = \mathbf{66\,096\,dm^3}$

d $a = 56\,\text{cm}$ $\qquad s = 100\,\text{cm}$ $\qquad$ zu berechnen: h, M, V



$d = a \cdot \sqrt{2} = 79.195\ldots\text{cm}$

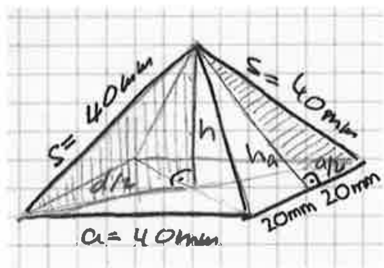
$\mathbf{h} = \sqrt{s^2 - (d/2)^2} = 91.825\ldots\text{cm} \approx \mathbf{91.83\,cm}$

$h_a = \sqrt{s^2 - (a/2)^2} = 96\,\text{cm}$

$\mathbf{M} = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} = 2 \cdot a \cdot h_a \approx \mathbf{10\,752\,cm^2}$

$\mathbf{V} = G \cdot h : 3 = (56\,\text{cm})^2 \cdot h : 3 \approx \mathbf{95\,989\,cm^3}$

e $a = 40\,\text{mm}$ $\qquad s = 40\,\text{mm}$ $\qquad$ zu berechnen: h, M, V



$d = a \cdot \sqrt{2} = 56.568\ldots\text{mm}$

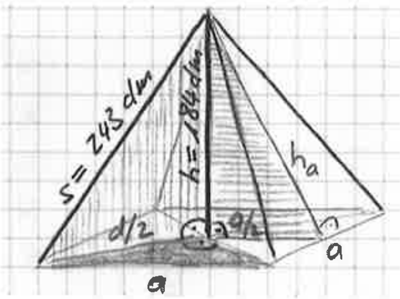
$\mathbf{h} = \sqrt{s^2 - (d/2)^2} = 28.284\ldots\text{mm} \approx \mathbf{28.28\,mm}$

$h_a = \sqrt{s^2 - (a/2)^2} = 34.641\ldots\text{mm}$

$\mathbf{M} = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} = 2 \cdot a \cdot h_a \approx \mathbf{2\,771\,mm^2}$

$\mathbf{V} = G \cdot h : 3 = (40\,\text{mm})^2 \cdot h : 3 \approx \mathbf{15\,085\,mm^3}$

f $h = 184\,dm$ $s = 243\,dm$ zu berechnen: a, M, V



$^d/_2 = \sqrt{s^2 - h^2} = 158.723\ldots dm$

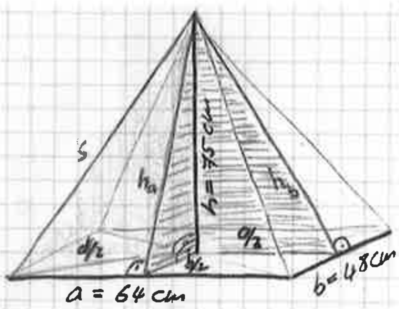
$\mathbf{a} = {}^d/_2 \cdot \sqrt{2} = 224.468\ldots dm \approx \mathbf{224.47\,dm}$

$h_a = \sqrt{h^2 + (^a/_2)^2} = 215.528\ldots dm$

$\mathbf{M} = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} = 2 \cdot a \cdot h_a \approx \mathbf{96\,759\,dm^2}$

$\mathbf{V} = G \cdot h : 3 = (56\,cm)^2 \cdot h : 3 \approx \mathbf{3\,090\,341\,dm^3}$

J411 **a** $a = 64\,cm$ $b = 48\,cm$ $h = 75\,cm$ zu berechnen: s, M, V



$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64^2 + 48^2}\,cm = 80\,cm$

$\mathbf{s} = \sqrt{h^2 + (^d/_2)^2} = \sqrt{75^2 + 40^2}\,cm = \mathbf{85\,cm}$

$h_a = \sqrt{h^2 + (^b/_2)^2} = \sqrt{75^2 + 24^2}\,cm = 78.746\ldots cm$

$h_b = \sqrt{h^2 + (^a/_2)^2} = \sqrt{75^2 + 32^2}\,cm = 81.541\ldots cm$

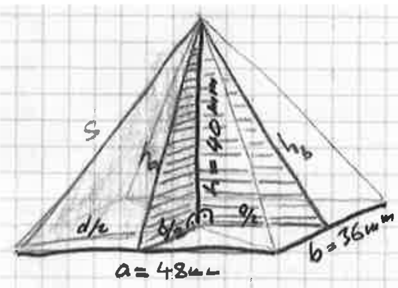
$\mathbf{M} = 2 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_b}{2} = a \cdot h_a + b \cdot h_b \approx \mathbf{8954\,cm^2}$

$\mathbf{V} = G \cdot h : 3 = (64\,cm \cdot 48\,cm) \cdot 75\,cm : 3 = \mathbf{76\,800\,cm^3}$

Folgefehler vermeiden

Folgefehler können vermieden werden, indem man – falls möglich – beim Berechnen der gesuchten Grössen die **vorgegebenen Grössen** verwendet.

b $a = 48\,mm$ $b = 36\,mm$ $h = 40\,mm$ zu berechnen: s, M, V



$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{48^2 + 36^2}\,mm = 60\,mm$

$\mathbf{s} = \sqrt{h^2 + (^d/_2)^2} = \sqrt{40^2 + 30^2}\,mm = \mathbf{50\,mm}$

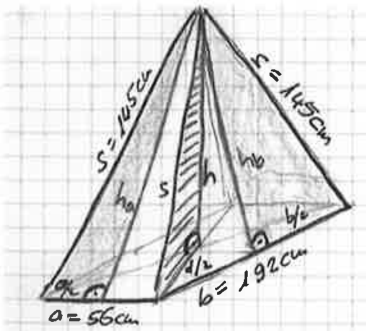
$h_a = \sqrt{h^2 + (^b/_2)^2} = \sqrt{40^2 + 18^2}\,mm = 43.863\ldots mm$

$h_b = \sqrt{h^2 + (^a/_2)^2} = \sqrt{40^2 + 24^2}\,mm = 46.647\ldots mm$

$\mathbf{M} = 2 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_b}{2} = a \cdot h_a + b \cdot h_b \approx \mathbf{3785\,mm^2}$

$\mathbf{V} = G \cdot h : 3 = (48\,mm \cdot 36\,mm) \cdot 40\,mm : 3 = \mathbf{23\,040\,mm^3}$

d $a = 56\,cm$ $b = 192\,cm$ $s = 145\,cm$ zu berechnen: h, M, V



$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{56^2 + 192^2}\,cm = 200\,cm$

$\mathbf{h} = \sqrt{s^2 - (^d/_2)^2} = \sqrt{145^2 - 100^2}\,cm = \mathbf{105\,cm}$

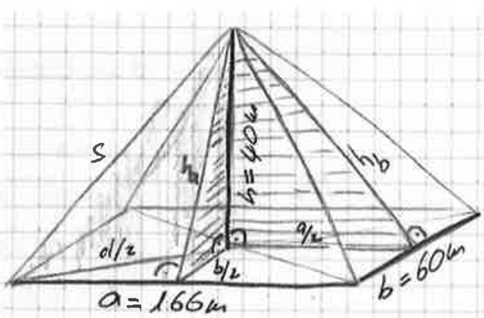
$h_a = \sqrt{s^2 - (^a/_2)^2} = \sqrt{145^2 - 28^2}\,cm = 142.270\ldots cm$

$h_b = \sqrt{s^2 - (^b/_2)^2} = \sqrt{145^2 - 96^2}\,cm = 108.669\ldots cm$

$\mathbf{M} = 2 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_b}{2} = a \cdot h_a + b \cdot h_b \approx \mathbf{28\,832\,cm^2}$

$\mathbf{V} = G \cdot h : 3 = (56\,cm \cdot 192\,cm) \cdot 105\,cm : 3 = \mathbf{376\,320\,cm^3}$

J412 $a = 166\,m$ $b = 60\,m$ $h = 40\,m$



a $d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{166^2 + 60^2}\,m = 176.510\ldots m$

$\mathbf{s} = \sqrt{h^2 + (^d/_2)^2} \approx \mathbf{96.90\,m}$

Die Pyramide hat 96.90 m lange Seitenkanten.

b $h_a = \sqrt{h^2 + (^b/_2)^2} = \sqrt{40^2 + 30^2}\,m = 50\,m$

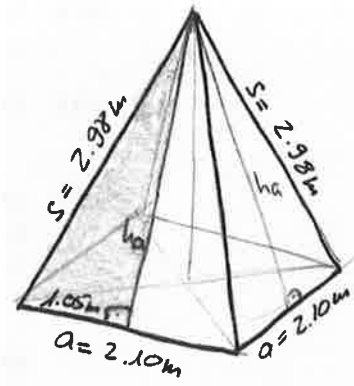
$h_b = \sqrt{h^2 + (^a/_2)^2} = \sqrt{40^2 + 83^2}\,m = 92.135\ldots m$

$\mathbf{M} = a \cdot h_a + b \cdot h_b \approx \mathbf{13\,828\,m^2}$

Die Mantelfläche ist fast 14 000 m² gross.

Holzschindeln
Holzschindeln werden in der Breite nahtlos nebeneinander gelegt. In der Höhe überdecken sie sich 3- bis 4-fach. Der Grundverbrauch (Breitenmeter) an Holzschindeln hängt deshalb von der Länge der Schindeln und dem gewählten Reihenabstand ab. Wir benutzen in der Aufgabe Schindeln der Länge 30 cm bei einem Reihenabstand von 9 cm.

J413 Grundkanten a = 2.10 m Seitenkanten s = 2.98 m



Dachfläche

$h_a = \sqrt{s^2 - (a/2)^2} = \sqrt{2.98^2 - 1.05^2}\ \text{m} = 2.788\ldots\ \text{m}$

$M = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} = 2 \cdot a \cdot h_a \approx \mathbf{11.71\ m^2}$

Schindelverbrauch

11.11 Breitenmeter pro Quadratmeter

$11.71 \cdot 11.11 \approx 130.10$ Breitenmeter für das ganze Dach

Breite einer Schindel: 8.8 cm

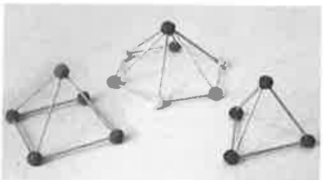
Anzahl Schindeln ohne Verschnitt: 13 010 cm : 8.8 cm = 1478.409...

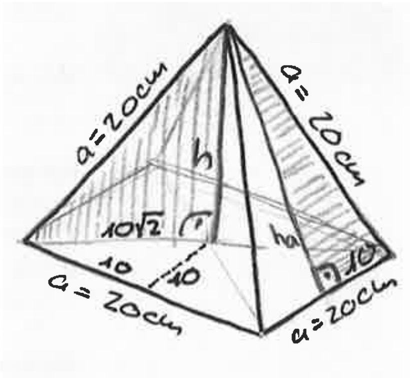
Anzahl Schindeln mit Verschnitt: $1478.409\ldots \cdot 1.04 \approx$ **1 538**

Der Lehrling muss **ungefähr 1 550 Schindeln** bereitstellen.

Und: Der Meister hätte übrigens die Seitenhöhe gemessen und weniger gerechnet...

J414 **a** a = 20 cm zu berechnen: h, V, M





$d/2 = \sqrt{10^2 + 10^2}\ \text{cm} = \sqrt{200}\ \text{cm}$ oder $10\ \text{cm} \cdot \sqrt{2}$

$(d/2)^2 = 200\ \text{cm}^2$

$\mathbf{h} = \sqrt{a^2 - (d/2)^2} = \sqrt{20^2 - 200}\ \text{cm} = 14.142\ldots\ \text{cm}$

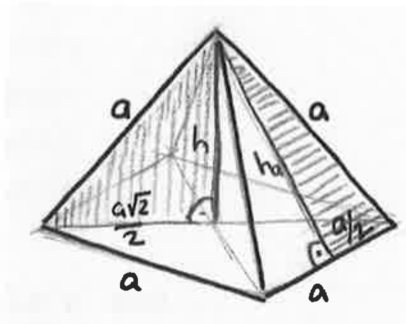
$\approx \mathbf{14.14\ cm}$

$\mathbf{V} = G \cdot h : 3 = (20\ \text{cm})^2 \cdot h : 3 = \mathbf{1\,885.62\ cm^3}$

$h_a = \sqrt{20^2 - 10^2}\ \text{cm} = 17.320\ldots\ \text{cm}$

$\mathbf{M} = 4 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} = 2 \cdot 20\ \text{cm} \cdot 17.320\ldots\ \text{cm} \approx \mathbf{692.82\ cm^2}$

b a = 20 cm zu berechnen: h, V, M



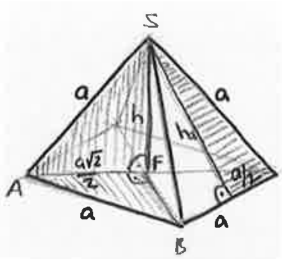
$d/2 = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad (d/2)^2 = \frac{a^2}{2}$

$\mathbf{h} = \sqrt{a^2 - (d/2)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sqrt{2}}}$ oder $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{\sqrt{2}}$

$\mathbf{V} = G \cdot h : 3 = a^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} : 3 = \frac{\mathbf{a^3}}{\mathbf{6}} \cdot \mathbf{\sqrt{2}}$

$h_a = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$

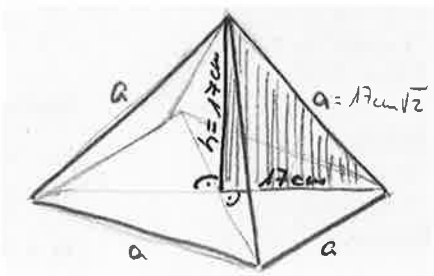
$\mathbf{M} = 2 \cdot a \cdot h_a = 2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \mathbf{a^2 \cdot \sqrt{3}}$



Spezielle Höhe

Die Höhe lässt sich in diesem Fall auch ohne langwierige Rechnerei bestimmen: △AFS und △ABF sind gemäss SsW kongruent (AS = AB = a, AF gemeinsam, 90°-Winkel gegenüber AS bzw. AB). Daraus lässt sich sofort schliessen, das $\mathbf{h = d/2}$.

J415 $d/2 = h = 17\ \text{cm}$ (siehe **J414**)



Daraus folgt sofort:

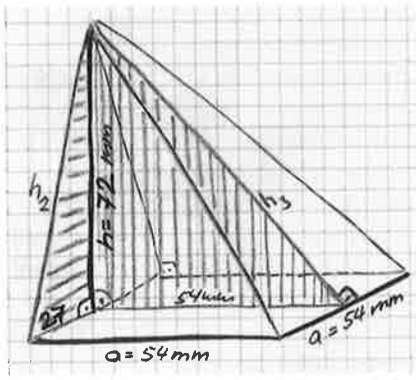
$\mathbf{a} = 17\ \text{cm} \cdot \sqrt{2} \approx \mathbf{24.04\ cm}$

J416 Arbeitsblatt

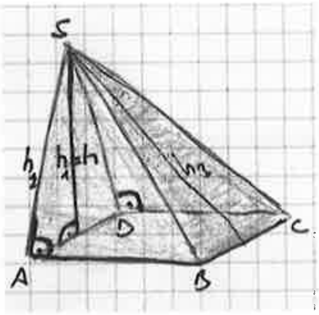
J417 Zwei Arbeitsblätter

J418 **Volumen**

$G = (54\,mm)^2$
$h = 72\,mm$
$V = G \cdot h : 3 = (54\,mm)^2 \cdot 72\,mm : 3 = \mathbf{69\,984\,mm^3}$



Mantel
Der Mantel besteht aus **zwei** verschiedenen **gleichschenkligen** und **zwei kongruenten rechtwinkligen** Dreiecken.
Alle haben die Grundlinie a = 54 mm.



$\triangle ADS$: gleichschenkig — Höhe $h_1 = h = 72\,mm$

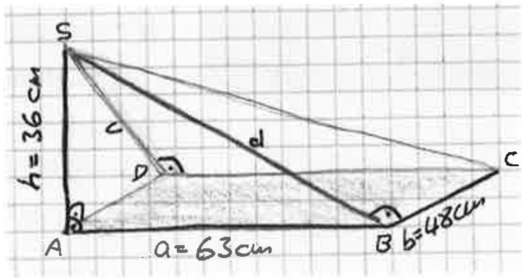
$\triangle ABS \cong \triangle DCS$: rechtwinklig — Höhe $h_2 = \sqrt{72^2 + 27^2}\,mm = 76.896...\,mm$

$\triangle BCS$: gleichschenkig — Höhe $h_3 = \sqrt{72^2 + 54^2}\,mm = 90\,mm$

$M = a \cdot (h_1 + 2h_2 + h_3) : 2 \approx \mathbf{8\,526.39\,mm^2}$

J419 **Volumen**

$G = 63\,cm \cdot 48\,cm$
$h = 36\,cm$
$V = G \cdot h : 3$
$= (63\,cm \cdot 48\,cm) \cdot 36\,cm : 3 = \mathbf{36\,288\,cm^3}$



Mantel
Der Mantel besteht aus **vier** verschiedenen **rechtwinkligen** Dreiecken.

$\triangle ABS$: $A_{ABS} = a \cdot h : 2 = 63\,cm \cdot 36\,cm : 2$

$\triangle BCS$: $A_{BCS} = b \cdot d : 2 = 48\,cm \cdot \sqrt{63^2 + 36^2}\,cm : 2$

$\triangle CDS$: $A_{CDS} = a \cdot c : 2 = 63\,cm \cdot \sqrt{48^2 + 36^2}\,cm : 2$

$\triangle ADS$: $A_{ADS} = b \cdot h : 2 = 48\,cm \cdot 36\,cm : 2$

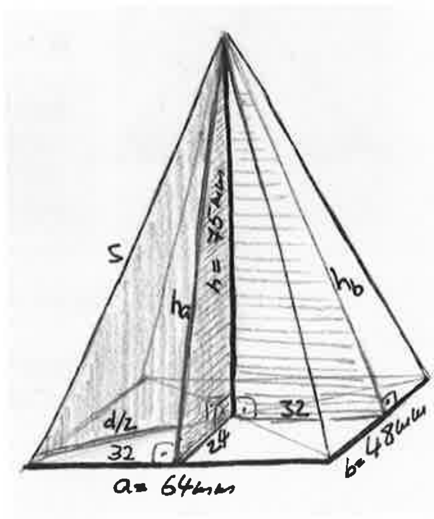
$M = A_{ABS} + A_{BCS} + A_{CDS} + A_{ADS} \approx \mathbf{5629.45\,cm^2}$

J420 **1 Volumen**

$V = G \cdot h : 3$
$= (64\,mm \cdot 48\,mm) \cdot 75\,mm : 3 = \mathbf{76\,800\,mm^3}$

Berechnung der Seitenkante

Die Seitenkante lässt sich auch direkt als Körperdiagonale eines Quaders mit den Seiten 32 mm, 24 mm und 75 mm berechnen – ohne Umweg über das rechtwinklige Dreieck.



Seitenkanten
Die Pyramide ist gerade. Alle vier Seitenkanten sind gleich lang.

$s = \sqrt{(d/2)^2 + h^2}$ $\qquad d/2 = \sqrt{24^2 + 32^2}\,mm$

$= \sqrt{24^2 + 32^2 + 75^2}\,mm = \mathbf{85\,mm}$

Mantel

$h_a = \sqrt{24^2 + 75^2}\,mm = 78.746...\,mm$

$h_b = \sqrt{32^2 + 75^2}\,mm = 81.541...\,mm$

$M = a \cdot h_a + b \cdot h_b \approx \mathbf{8\,953.76\,mm^2}$

Berechnung der Seitenkanten

Die Seitenkante lässt sich auch direkt als Körperdiagonale eines Quaders mit den Seiten 26.5 mm, 26.5 mm und 53 mm berechnen.

2 Volumen

$V = G \cdot h : 3$

$= (53\,\text{mm})^2 \cdot 53\,\text{mm} : 3 \approx \mathbf{49\,626\,mm^3}$

Seitenkanten

Die Pyramide ist regelmässig. Alle vier Seitenkanten sind gleich lang.

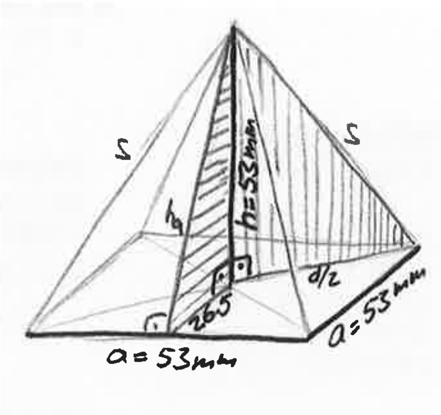
$s = \sqrt{(d/2)^2 + h^2}$ $\qquad d/2 = 26.5\,\text{mm} \cdot \sqrt{2}$

$= \sqrt{26.5^2 \cdot 2 + 53^2}\,\text{mm} \approx \mathbf{64.91\,mm}$

Mantel

$h_a = \sqrt{26.5^2 + 53^2}\,\text{mm} = 59.255\ldots\,\text{mm}$

$M = 2 \cdot a \cdot h_a \approx \mathbf{6\,281\,mm^2}$



Berechnung der Seitenkanten

Die Seitenkante s_2 lässt sich als Körperdiagonale eines Quaders mit den Seiten a, b und h berechnen.

3 Volumen

$V = G \cdot h : 3$

$= (48\,\text{mm} \cdot 63\,\text{mm}) \cdot 36\,\text{mm} : 3 = \mathbf{36\,288\,mm^3}$

Seitenkanten

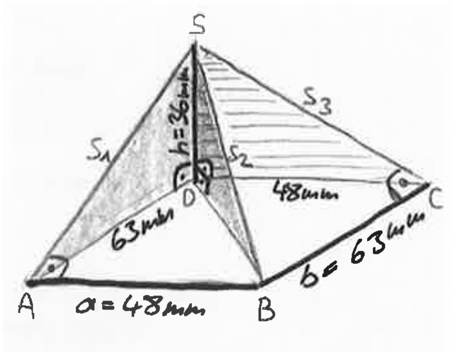
Die Pyramide ist schief. Alle vier Seitenkanten sind verschieden lang.

$s_1 = \sqrt{63^2 + 36^2}\,\text{mm} \approx \mathbf{72.56\,mm}$

$s_2 = \sqrt{63^2 + 48^2 + 36^2}\,\text{mm} = \mathbf{87\,mm}$

$s_3 = \sqrt{48^2 + 36^2}\,\text{mm} = \mathbf{60\,mm}$

$s_4 = h = \mathbf{36\,mm}$



Mantel

Alle vier Seitendreiecke sind rechtwinklig.

$\triangle ABS$: $A_{ABS} = a \cdot s_1 : 2 = 48\,\text{mm} \cdot \sqrt{63^2 + 36^2}\,\text{mm} : 2$

$\triangle BCS$: $A_{BCS} = b \cdot s_3 : 2 = 63\,\text{mm} \cdot 60\,\text{mm} : 2$

$\triangle CDS$: $A_{CDS} = a \cdot h : 2 = 48\,\text{mm} \cdot 36\,\text{mm} : 2$

$\triangle ADS$: $A_{ADS} = b \cdot h : 2 = 63\,\text{mm} \cdot 36\,\text{mm} : 2$

$M = A_{ABS} + A_{BCS} + A_{CDS} + A_{ADS} \approx \mathbf{5629.45\,mm^2}$

Berechnung der Seitenkanten

Die Seitenkante s_2 lässt sich als Körperdiagonale eines Quaders mit den Seiten $a/2$, b und h berechnen.

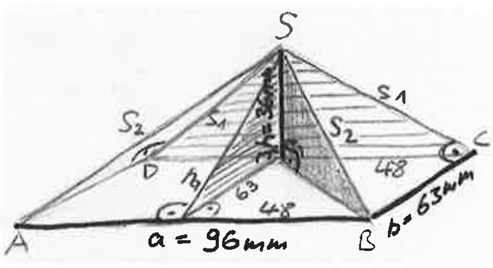
4 Volumen

$V = G \cdot h : 3$

$= (96\,\text{mm} \cdot 63\,\text{mm}) \cdot 36\,\text{mm} : 3 = \mathbf{72\,576\,mm^3}$

Seitenkanten

Die Pyramide ist symmetrisch, ihre Spitze ist über der Mitte der Hinterkante CD. Es gibt zwei Paare von gleich langen Seitenkanten.



$s_1 = \sqrt{48^2 + 36^2}\,\text{mm} = \mathbf{60\,mm}$ $\qquad s_2 = \sqrt{63^2 + 48^2 + 36^2}\,\text{mm} = \mathbf{87\,mm}$

Mantel

Der Mantel besteht aus **zwei** verschiedenen **gleichschenkligen** und **zwei kongruenten rechtwinkligen** Dreiecken.

$\triangle ABS$: gleichschenklig, Höhe h_a $\qquad A_{ABS} = a \cdot h_a : 2 = 96\,\text{mm} \cdot \sqrt{63^2 + 36^2}\,\text{mm} : 2$

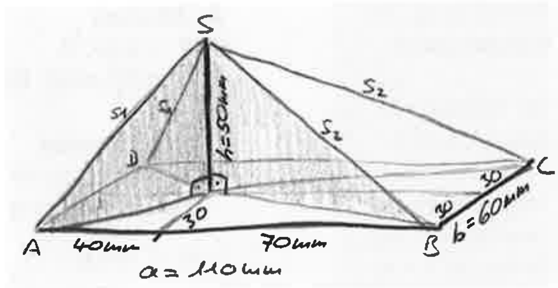
$\triangle BCS \cong \triangle ADS$: rechtwinklig $\qquad A_{BCS} = b \cdot s_1 : 2 = 63\,\text{mm} \cdot 60\,\text{mm} : 2$

$\triangle CDS$: gleichschenklig, Höhe h $\qquad A_{CDS} = a \cdot h : 2 = 96\,\text{mm} \cdot 36\,\text{mm} : 2$

$M = A_{ABS} + 2A_{BCS} + A_{CDS} \approx \mathbf{8\,990.90\,mm^2}$

5 Volumen

$V = G \cdot h : 3 = (110\,mm \cdot 60\,mm) \cdot 50\,mm : 3$
$= \mathbf{110\,000\,mm^3}$



Berechnung der Seitenkanten

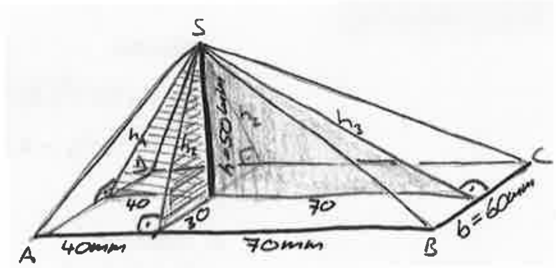
Beide Seitenkanten lassen sich direkt als Körperdiagonalen von Quadern berechnen.

Seitenkanten

Die Pyramide ist symmetrisch. Sie hat 2 Paare von gleich langen Seitenkanten.

$s_1 = \sqrt{40^2 + 30^2 + 50^2}\,mm \approx \mathbf{70.71\,mm}$

$s_2 = \sqrt{70^2 + 30^2 + 50^2}\,mm = \mathbf{91.10\,mm}$



Mantel

Der Mantel besteht aus **zwei** verschiedenen **gleichschenkligen** und **zwei kongruenten allgemeinen** Dreiecken.

$\triangle ABS \cong \triangle CDS$: Höhe h_2
$\triangle BCS$: gleichschenklig, Höhe h_3
$\triangle ADS$: gleichschenklig, Höhe h_1

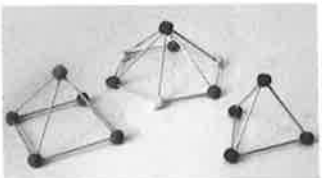
$A_{ABS} = a \cdot h_2 : 2 = 110\,mm \cdot \sqrt{30^2 + 50^2}\,mm : 2$
$A_{BCS} = b \cdot h_3 : 2 = 60\,mm \cdot \sqrt{70^2 + 50^2}\,mm : 2$
$A_{ADS} = b \cdot h_1 : 2 = 60\,mm \cdot \sqrt{40^2 + 50^2}\,mm : 2$

$M = 2A_{ABS} + A_{BCS} + A_{ADS} \approx \mathbf{10\,915.68\,mm^2}$

J421 Arbeitsblatt (Kopiervorlage)
Das Lösungsblatt ist bei den Lösungen der Arbeitsblätter.

J422 Zwei Arbeitsblätter (Kopiervorlage)
Die Lösungsblätter sind bei den Lösungen der Arbeitsblätter.

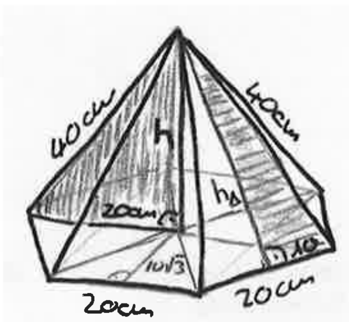
J423 **a Höhe und Volumen**



$\mathbf{h} = \sqrt{40^2 - 20^2}\,cm = 34.641\ldots cm$

$G = 6 \cdot 20\,cm \cdot 10\,cm \cdot \sqrt{3} : 2 = 1039.230\ldots cm^2$

$V = G \cdot h : 3 = \mathbf{12\,000\,cm^3}$

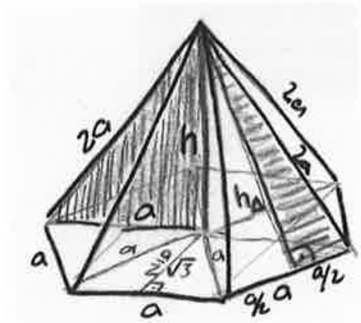


Mantel

$h_\triangle = \sqrt{40^2 - 10^2}\,cm = 38.729\ldots cm$

$M = 6 \cdot \frac{20\,cm \cdot h_\triangle}{2} \approx \mathbf{2323.79\,cm^2}$

b Höhe und Volumen



$\mathbf{h} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \mathbf{a\sqrt{3}}$

$G = 6 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$

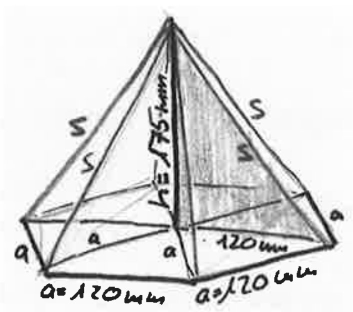
$\mathbf{V} = G \cdot h : 3 = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} : 3 = \frac{3}{2}a^3 = \mathbf{1.5\,a^3}$

Mantel

$h_\triangle = \sqrt{(2a)^2 - (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{15a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{15}$

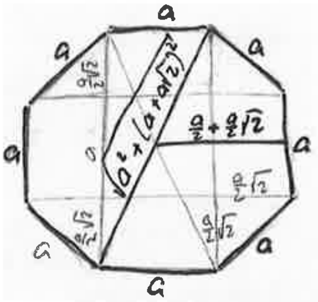
$\mathbf{M} = 6 \cdot \frac{a \cdot h_\triangle}{2} = 3 \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{15} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{15} = \mathbf{1.5\,a^2\sqrt{15}}$

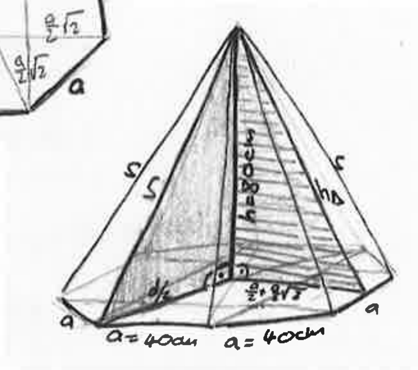
J424



$s = \sqrt{175^2 + 120^2}\,\text{mm} \approx \mathbf{212.19\,mm}$

J425 $a = 40\,\text{cm}$ $h = 80\,\text{cm}$





a Seitenkanten

$d = \sqrt{a^2 + (a + a\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{40^2 + (40 + 40\sqrt{2})^2}\,\text{cm}$

$= 104.525\ldots\,\text{cm}$

$s = \sqrt{(d/2)^2 + h^2} \approx \mathbf{95.56\,cm}$

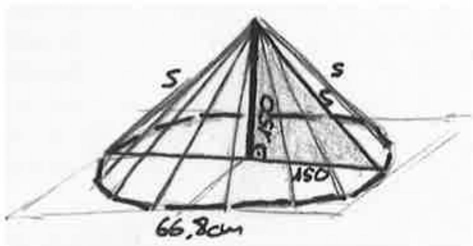
b Mantel

$h_\triangle = \sqrt{h^2 + (\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{80^2 + (20 + 20\sqrt{2})^2}\,\text{cm} = 93.441\ldots\,\text{cm}$

$M = 8 \cdot \frac{a \cdot h_\triangle}{2} = 4 \cdot 40\,\text{cm} \cdot h_\triangle \approx \mathbf{14\,951\,cm^2}$

J426 a Seitenkante s



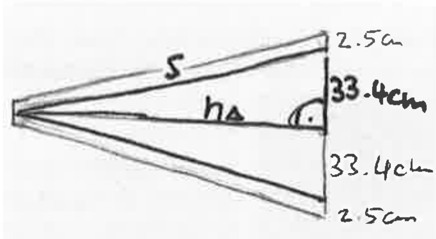
$s = \sqrt{150^2 + 150^2}\,\text{cm} = 212.132\ldots\,\text{cm}$

$\approx \mathbf{212.1\,cm}$

Die Seitenkanten sind ungefähr 212.1 cm lang.

b Gesamte Blechfläche

1



$h_\triangle = \sqrt{s^2 - (33.4\,\text{cm})^2} = 209.486\ldots\,\text{cm}$

$A_{Blech} = 14 \cdot (\frac{66.8\,\text{cm} \cdot h_\triangle}{2} + 2 \cdot 2.5\,\text{cm} \cdot h_\triangle)$

$= 112\,619.745\ldots\,\text{cm}^2$

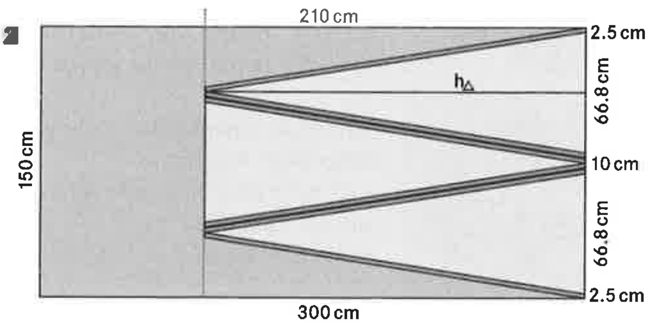
$V_{Blech} = A_{Blech} \cdot 0.13\,\text{cm} = 14\,640.556\ldots\,\text{cm}^3$

$m_{Blech} = 14\,640.556\ldots \cdot 7.4\,\text{g} \approx \mathbf{108\,340\,g}$

Das gesamte Blechdach ist **fast 110 kg** schwer.

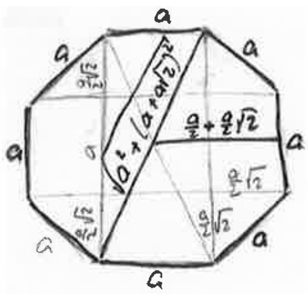
Hinweis für die Lehrperson
Die Massangaben für das Blechdach sind absichtlich überbestimmt.
Kantenlänge x:
$\frac{x}{2} = 1.5\,\text{m} \cdot \sin(360° : 28)$
$= 0.33378\ldots\,\text{m}$
$x = 0.66756\ldots\,\text{m}$

2



Pro Blechstück kann der Spengler nur 3 Dachstücke schneiden. Er braucht also 5 Blechstücke.
Je nachdem, ob er die Resten der Stücke verwenden kann oder nicht, wird er alle **fünf Blechstücke ganz oder nur je 2.1 m davon** verrechnen.

J427 $a = 5\,m \qquad h = 11.5\,m$



a Dachfläche

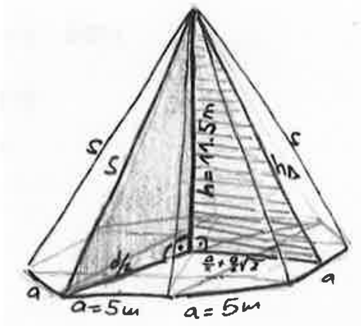
$h_\triangle = \sqrt{h^2+(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{11.5^2+(2.5+2.5\sqrt{2})^2}\,cm = 12.987...\,m$

$M = 8\cdot\frac{a\cdot h_\triangle}{2} = 4\cdot 5\,m\cdot h_\triangle \approx \mathbf{260\,m^2}$

Anzahl Biberschwanz-Ziegel:

67 Stück/m^2 $\Rightarrow$ Total: $260\cdot 67 = 17\,420$ Stück

Es müssen **ungefähr 17 500** Biberschwanz-Ziegel bestellt werden.



b Seitenkanten

$d = \sqrt{a^2+(a+a\sqrt{2})^2} = \sqrt{5^2+(5+5\sqrt{2})^2}\,m = 13.065...\,m$

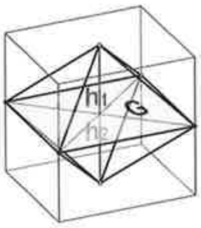
$s = \sqrt{(d/2)^2+h^2} \approx \mathbf{13.23\,m}$

Anzahl Firstziegel:

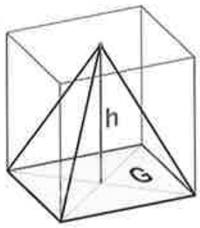
4.1 Stück/m $\Rightarrow$ Total: $8\cdot 13.23\cdot 4.1 \approx 434$ Stück

Es müssen **ungefähr 450** Biberschwanz-Ziegel bestellt werden.

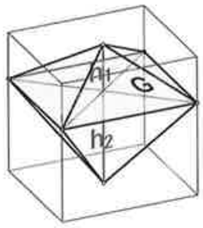
J428 **a** 1



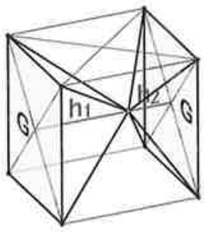
2



3



4



Alle vier Körper beanspruchen **genau gleich viel** Raum:

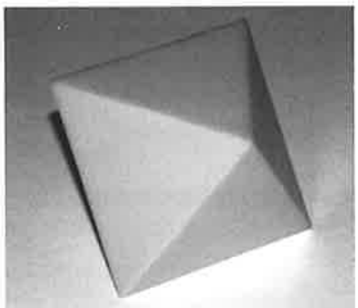
- Die Grundfläche G des Körpers (**2**) oder der Teilkörper (**1, 3, 4**) entspricht immer der Grundfläche des Würfels.
- Die Höhe entspricht bei (2) der Höhe h des Würfels. Bei (1, 3, 4) entsprechen die beiden Höhen h_1 und h_2 zusammen der Würfelhöhe h.

Für die Volumen gilt somit:

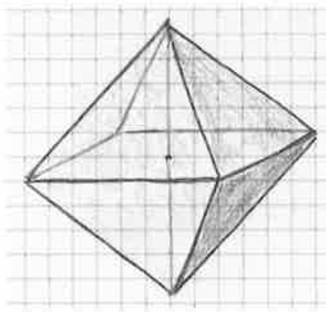
2 $\quad V = \mathbf{G\cdot h:3}$ $\qquad$ **1, 3, 4** $\quad V = G\cdot h_1:3 + G\cdot h_2:3 = G\cdot(h_1+h_2):3 = \mathbf{G\cdot h:3}$

b Alle Körper beanspruchen einen Drittel des Würfelvolumens, das sind **33⅓ %**.

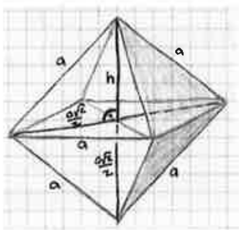
J429 **a** Es entsteht eine spezielle Doppelpyramide, deren Oberfläche aus 8 kongruenten, gleichseitigen Dreiecken besteht. Der Körper heisst **Oktaeder** (griech., Achtflächner).



Er hat 6 Ecken und 12 Kanten. Je **vier Kanten** bilden zusammen ein **Quadrat**. Es kommt nicht drauf an, welche beiden – sich gegenüberliegenden – Ecken man als Spitzen nimmt. Der Körper sieht immer genau gleich aus.



b



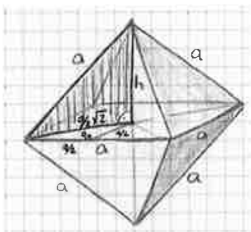
Grundfläche der beiden Pyramiden: $G = a^2$

Höhe einer Pyramide:

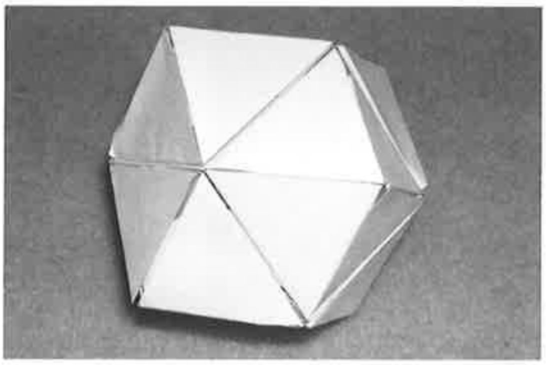
h ist die halbe Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge a: $\quad h = \frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}$

(h kann auch mit der Figur rechts berechnet werden.)

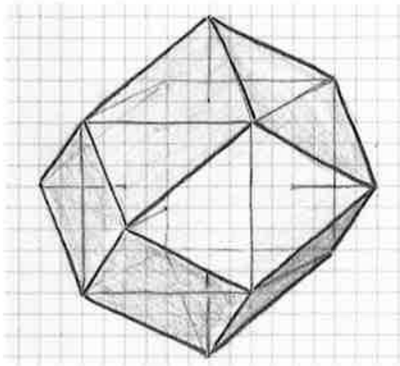
$V_{ganz} = 2\cdot G\cdot h:3 = 2\cdot a^2\cdot\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}:3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,a^3$

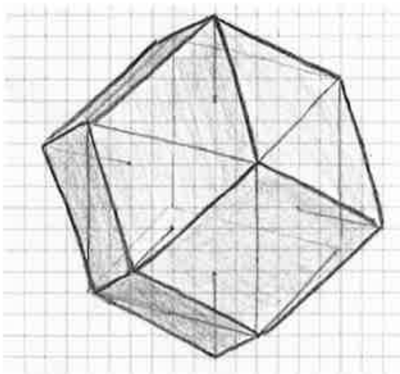


J430 **a**



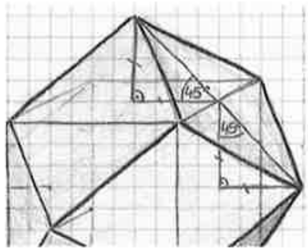
b





Es sind nur die sichtbaren Kanten skizziert.

Die beiden Dreiecke, die in einer Würfelkante aneinander stossen, liegen in derselben Ebene, sie bilden zusammen einen Rhombus. Insgesamt bilden 12 solche Rhomben die Oberfläche des Körpers. Dieser hat 14 Ecken und 24 Kanten und heisst **Rhombendodekaeder** (griech., Rhomben-Zwölf-Flächner).



c **Würfel**:

Kantenlänge = 2a	$\mathbf{V_W} = (2a)^3 = \mathbf{8a^3}$	$\mathbf{S_W} = 6 \cdot (2a)^2 = \mathbf{24a^2}$
Kantenlänge = 20 cm	$\mathbf{V_W} = (20\,cm)^3 = \mathbf{8\,000\,cm^3}$	$\mathbf{S_W} = 6 \cdot (20\,cm)^2 = \mathbf{2\,400\,cm^2}$

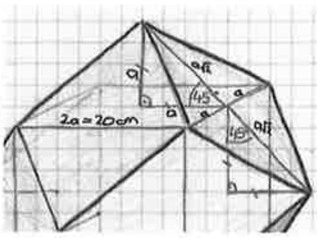
Rhombendodekaeder:

Volumen

Kantenlänge = 2a $\quad \mathbf{V_{RD}} = V_W + 6\,V_{Pyramide} = 8a^3 + 6 \cdot \frac{(2a)^2 \cdot a}{3} = 8a^3 + 8a^3 = \mathbf{16a^3}$

Kantenlänge = 20 cm $\quad \mathbf{V_{RD}} = V_W + 6\,V_{Pyramide} = 8\,000\,cm^3 + 6 \cdot \frac{(20\,cm)^2 \cdot 10\,cm}{3} = \mathbf{16\,000\,cm^3}$

Das **Volumen** hat sich **verdoppelt.**
Die aufgesetzten Pyramiden lassen sich zu einem Würfel zusammensetzen (vgl. **J43**).



Oberfläche

Kantenlänge = 2a $\quad$ Diagonalen der Rhomben: $e = 2a$ und $f = 2 \cdot a\sqrt{2}$

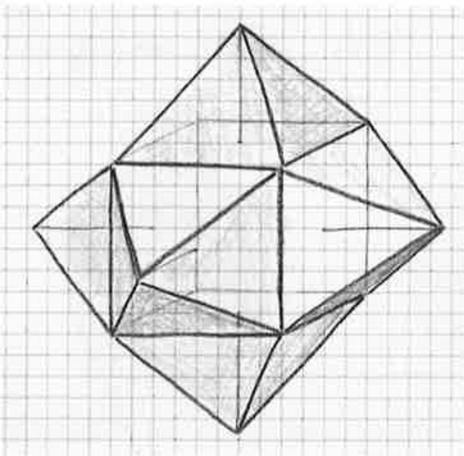
$A_{Rhombus} = e \cdot f : 2 = 2a^2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S_{RD}} = 12 \cdot A_{Rhombus} = \mathbf{24a^2\sqrt{2}}$

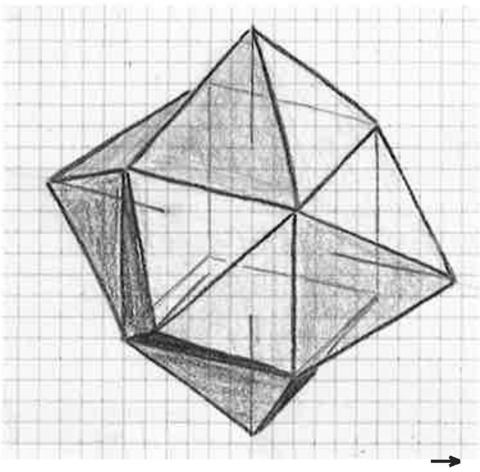
Kantenlänge = 20 cm $\quad$ Diagonalen der Rhomben: $e = 20\,cm$ und $f = 20\,cm \cdot \sqrt{2}$

$A_{Rhombus} = e \cdot f : 2 = 282.842...\,cm^2 \Rightarrow \mathbf{S_{RD}} = 12 \cdot A_{Rhombus} \approx \mathbf{3\,394.11\,cm^2}$

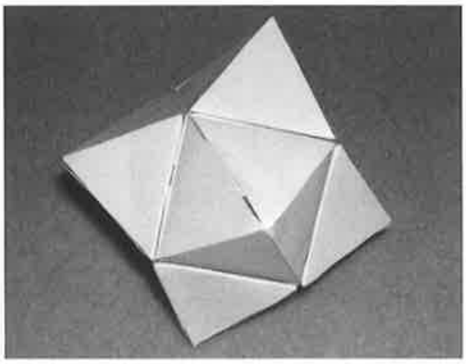
Die Oberfläche hat sich **mit $\sqrt{2}$ vervielfacht.**

J431 **a**





→

→ 

Es entsteht ein sternförmiger Körper mit 6 Spitzen und 8 inneren Ecken.
In jeder Spitze kommen 4 gleichseitige Dreiecke zusammen, in jeder inneren Ecke treffen 6 dieser Dreiecke zusammen.

Die Oberfläche wird von insgesamt 24 gleichseitigen Dreiecken gebildet.

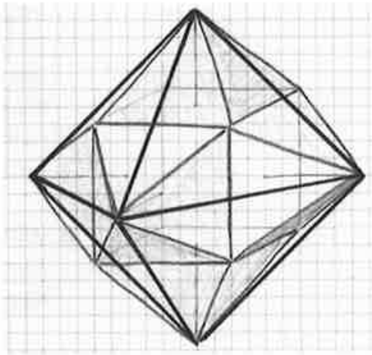
Der Körper hat $6 \cdot 4 + 12 = 36$ Kanten.

b **Würfel:** Kantenlänge = 2a $\quad$ $V_W = (2a)^3 = \mathbf{8a^3}$

Sternkörper: Höhe einer Pyramide = halbe Diagnale = $a\sqrt{2}$ (vgl. **J429**)

$\mathbf{V_{Stern}} = V_W + 6 \cdot V_{Pyramide} = 8a^3 + 6 \cdot \frac{(2a)^2 \cdot a\sqrt{2}}{3} = 8a^3 + 8a^3\sqrt{2} = \mathbf{8a^3(1+\sqrt{2})}$

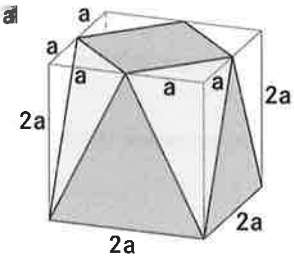
Das Volumen ist **fast zweieinhalb mal so gross** wie dasjenige des Würfels.



c Jede Ecke lässt sich mit 4 andern Ecken verbinden. So entstehen insgesamt 8 gleichseitige Dreiecke, die jeweils zu viert in einer Ecke zusammenstossen.
(Es sind nur die sichtbaren Kanten eingezeichnet.)

Es entsteht ein Oktaeder (vgl. **J429**).

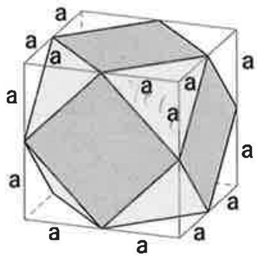
J432 **a**



Links:
Es wurden 4 Pyramiden mit $G = \frac{a^2}{2}$ und $h = 2a$ weggeschnitten.

$\mathbf{V_{Rest}} = V_{Würfel} - 4V_{Pyramide} = 8a^3 - 4 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot 2a : 3 = 8a^3 - \frac{4a^3}{3} = \mathbf{\frac{20a^3}{3}}$

Eine weggeschnittene Pyramide links hat das gleiche Volumen wie zwei weggeschnittene Pyramiden rechts, da diese nur die halbe Höhe haben.



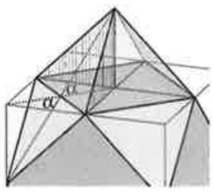
Rechts:
Es wurden 8 Pyramiden mit $G = \frac{a^2}{2}$ und $h = a$ weggeschnitten.

$\mathbf{V_{Rest}} = V_{Würfel} - 8V_{Pyramide} = 8a^3 - 8 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a : 3 = 8a^3 - \frac{4a^3}{3} = \mathbf{\frac{20a^3}{3}}$

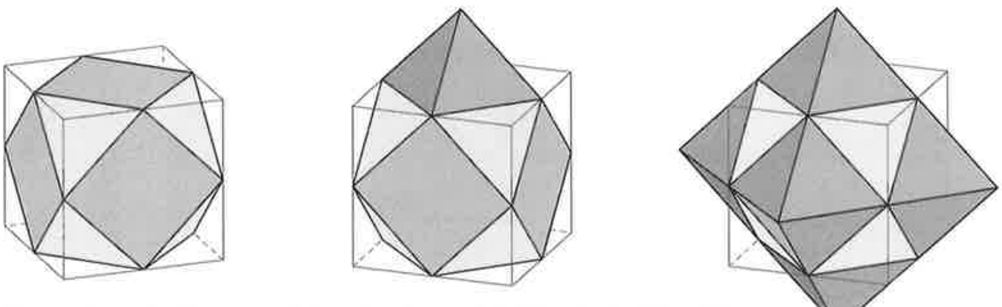
b Volumen Würfel: $8a^3$ $\quad$ Volumen weggeschnitten: $\mathbf{\frac{4a^3}{3}}$ $\quad \Rightarrow \quad$ $\frac{4a^3}{3} : 8a^3 = \frac{1}{6}$

Es wurde bei beiden Körpern **⅙ des Würfels** weggeschnitten.

Jede Seitenfläche der aufgesetzten Pyramide liegt in der gleichen Ebene wie eine Schnittfläche.

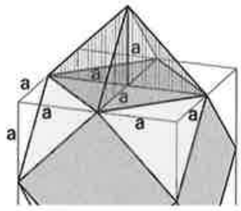


J433 **a**



Es entsteht ein Oktaeder. Es hat 6 Ecken und 8 Flächen (gleichseitige Dreiecke). Die Schnittflächen des Kuboktaeders sind Mittendreiecke der Oktaederflächen.

b Mit 4 weggeschnittenen Eckpyramiden lässt sich eine aufgesetzte Pyramide bilden. Alle 8 weggeschnittenen Ecken entsprechen 2 Pyramiden. Das Volumen des Oktaeders ist folglich um das Volumen von 4 Pyramiden grösser, als dasjenige des Würfels:



Würfel, Kantenlänge 2a: $V_W = (2a)^3 = \mathbf{8a^3}$

Oktaeder

Grundfläche einer Pyramide: $G = 2a^2$
Höhe einer Pyramide: $h = a$
Volumen einer Pyramide: $V_{Pyramide} = \frac{2a^3}{3}$

$V_{Okt} = V_W + 4V_{Pyramide} = \mathbf{8a^3} + \mathbf{\frac{8a^3}{3}}$

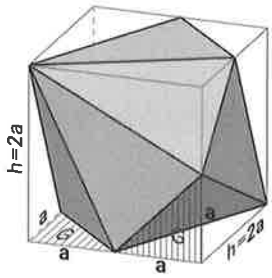
Das Volumen des Oktaeders ist **um ein Drittel grösser** als das Volumen des Würfels.

c Die Oberfläche des Oktaeders besteht aus 8 gleichseitigen Dreiecken, Seitenlänge: $2a\sqrt{2}$.

$S_{Okt} = 8 \cdot A_\triangle = 8 \cdot \frac{2a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \mathbf{16a^2\cdot\sqrt{3}}$

J434 **a** **Volumen**

Lösungsweg 1: Körper = Würfel – 6 Eckpyramiden

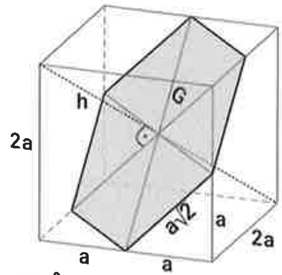


Volumen Eckpyramide: $V = \frac{a^2}{2} \cdot 2a : 3 = \frac{a^3}{3}$

Volumen: $\mathbf{V_{Körper}} = V_{Würfel} - 6\cdot V_{Pyramide} = 8a^3 - 2a^3 = \mathbf{6a^3}$

Für 2a = 10 cm: $\mathbf{V_{Körper} = 750\,cm^3}$

Lösungsweg 2: Der Körper besteht aus **2 Pyramiden**.



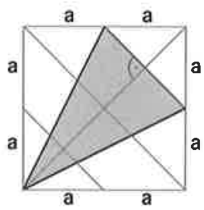
Grundfläche: regelmässiges Sechseck, Seite $a\sqrt{2}$

$G = 6 \cdot \frac{(a\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 3a^2\sqrt{3}$

Höhe: Halbe Würfeldiagonale: $h = \frac{1}{2}\cdot 2a\sqrt{3} = a\sqrt{3}$

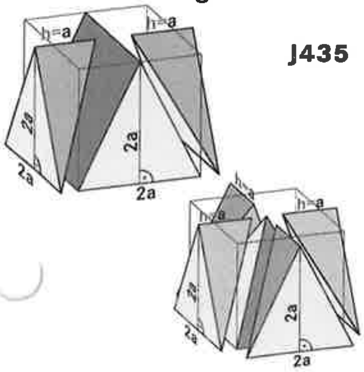
Volumen: $\mathbf{V_{Körper}} = 2\cdot V_{Pyramide} = 2\cdot G\cdot h : 3 = 2\cdot\cancel{3}a^2\sqrt{3}\cdot a\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}} = \mathbf{6a^3}$

b **Oberfläche**
Die Oberfläche des Körpers besteht aus 12 Dreiecken:
Grundseite $a\sqrt{2}$
Höhe $\frac{3}{4}\cdot 2a\sqrt{2}$ (Dreiviertel der Quadratdiagonale)
Fläche eines Dreiecks: $A_\triangle = a\sqrt{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 2a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = 1.5a^2$

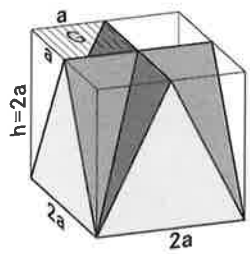


Gesamte Oberfläche: $\mathbf{S_{Körper}} = 12\cdot A_\triangle = \mathbf{18a^2}$

2 weitere Strategien



J435 **a** **Volumen = Würfel – 4 Eckpyramiden**



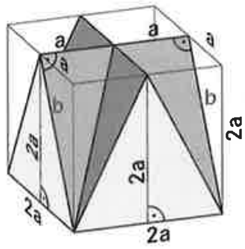
Eckpyramide: $G = a^2$ $h = 2a$ $\Rightarrow V = \frac{2}{3}a^3$

Körper: $\mathbf{V_{Körper}} = V_{Würfel} - 4\cdot V_{Pyramide} = 8a^3 - \frac{8}{3}a^3 = \mathbf{\frac{16}{3}a^3}$

Für 2a = 20 cm: $\mathbf{V_{Körper} = 5\,333\tfrac{1}{3}\,cm^3}$

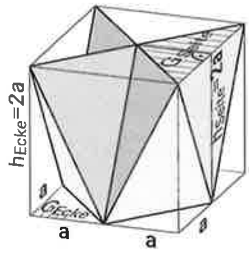
Ohne grosse Rechnung:
Ein Drittel des Würfels ist **weggeschnitten**. Die 4 weggeschnittenen Pyramiden lassen sich zu einer Pyramide in der Höhe des Würfels mit der Würfelgrundfäche zusammensetzen. →

→ **Oberfläche = Boden□ + 4 grosse △ + 8 kleine △**



Bodenquadrat:	$A_{\square} = 4a^2$
Grosses Dreieck:	$A_{gr\triangle} = 2a \cdot 2a : 2 = 2a^2$
Kleines Dreieck:	$A_{kl\triangle} = a \cdot b : 2 = a \cdot \sqrt{a^2 + (2a)^2} : 2 = \frac{1}{2} a^2\sqrt{5}$
Oberfläche total:	$S = A_{\square} + 4A_{gr\triangle} + 8A_{kl\triangle}$ $= 4a^2 + 8a^2 + 4a^2\sqrt{5} = \mathbf{4a^2(3 + \sqrt{5})}$
Für 2a = 20 cm:	$\mathbf{S \approx 2\,094.43\,cm^2}$

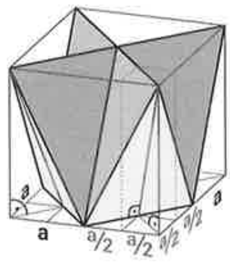
b Volumen = Würfel – 4 Seitenpyramiden – 4 Eckpyramiden



Seitenpyramide:	$G_{Seite} = a^2 \quad h_{Seite} = 2a \Rightarrow V_{Seite} = \frac{2}{3}a^3$
Eckpyramide:	$G_{Ecke} = \frac{1}{2}a^2 \quad h_{Ecke} = 2a \Rightarrow V_{Ecke} = \frac{1}{3}a^3$
Körper:	$\mathbf{V_{Körper}} = V_{Würfel} - 4 \cdot V_{Seite} - 4 \cdot V_{Ecke}$ $= 8a^3 - \frac{8}{3}a^3 - \frac{4}{3}a^3 = \mathbf{4a^3} \quad (= \frac{1}{2}\mathbf{V_{Würfel}})$
Für 2a = 20 cm:	$\mathbf{V_{Körper} = 4\,000\,cm^3}$

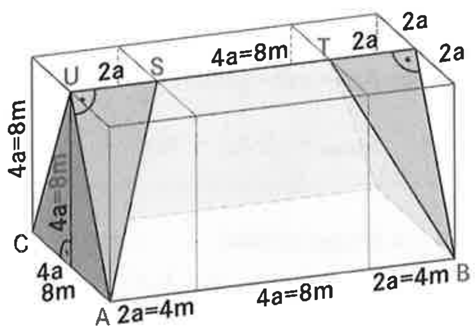
Ohne grosse Rechnung:
Alle weggeschnittenen Pyramiden haben die Höhe des Würfels. Insgesamt haben sie eine Grundfläche, die anderthalb mal so gross ist wie die des Würfels: $1.5 \cdot 4a^2 \cdot 2a : 3 = \mathbf{4a^3}$

Oberfläche = Boden□ + 12 kongruente△

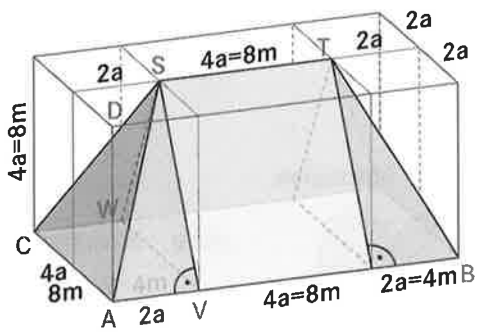


Bodenquadrat:	$A_{\square} = 2a^2$
Dreieck:	Grundlinie: $a\sqrt{2}$
	Höhe: $\sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2 + (2a)^2} = 1.5a\sqrt{2}$
	$A_{\triangle} = a\sqrt{2} \cdot 1.5a\sqrt{2} : 2 = 1.5\,a^2$
Oberfläche total:	$S = A_{\square} + 12A_{gr} = 4a^2 + 12 \cdot 1.5\,a^2 = \mathbf{20a^2}$
Für 2a = 20 cm:	$\mathbf{S \approx 2\,000\,cm^2}$

J436 **a** **1. Art**: Ergänzung zum Prisma



2.Art: 2 Schnitte → 2 Pyramiden, 1 Prisma



b Kantenlängen (beide Arten)

Grundkanten	$AB = 8a, \; AC = 4a$	$AB = 16\,m, \; AC = 8\,m$
First	$ST = 4a$	$ST = 8\,m$
Schrägkanten	$AS = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2 + (4a)^2} = a\sqrt{24} = 2a\sqrt{6}$	$AS = \sqrt{4^2+4^2+8^2}\,m \approx \mathbf{9.80\,m}$

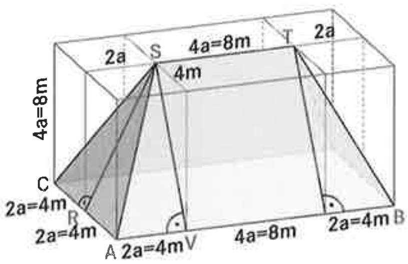
Volumen 1. Art: Dach = Langes Prisma – 2 Pyramiden

Langes Prisma:	Grundfläche AUC	$G = 4a \cdot 4a : 2 = 8a^2$	$G = 8\,m \cdot 8\,m : 2 = 32\,m^2$
	Höhe AB	$h = 8a$	$h = 16\,m$
	Volumen	$V_{Prisma} = 64a^3$	$V_{Prisma} = 512\,m^3$
Pyramide:	Grundfläche AUC	$G = 4a \cdot 4a : 2 = 8a^2$	$G = 8\,m \cdot 8\,m : 2 = 32\,m^2$
	Höhe US	$h = 2a$	$h = 4\,m$
	Volumen	$V_{Pyramide} = \frac{16}{3}a^3$	$V_{Pyramide} = 42.666...\,m^3$
Gesamtes Dach		$\mathbf{V_{Dach}} = V_{Prisma} - 2 \cdot V_{Pyramide} = \mathbf{\frac{160}{3}a^3}$	$\mathbf{V_{Dach}} \quad \approx \mathbf{426.67\,m^3}$

Volumen 2. Art: Dach = Kurzes Prisma + 2 Pyramiden

Kurzes Prisma:	Grundfläche ≅ AUC	$G = 4a \cdot 4a : 2 = 8a^2$	$G = 8\,m \cdot 8\,m : 2 = 32\,m^2$
	Höhe ST	$h = 4a$	$h = 8\,m$
	Volumen	$V_{Prisma} = 32a^3$	$V_{Prisma} = 256\,m^3$
Pyramide:	Grundfläche AVWC	$G = 2a \cdot 4a = 8a^2$	$G = 4\,m \cdot 8\,m = 32\,m^2$
	Höhe AD	$h = 4a$	$h = 8\,m$
	Volumen	$V_{Pyramide} = \frac{32}{3}a^3$	$V_{Pyramide} = 85.333...\,m^3$
Gesamtes Dach		$\mathbf{V_{Dach}} = V_{Prisma} + 2 \cdot V_{Pyramide} = \mathbf{\frac{160}{3}a^3}$	$\mathbf{V_{Dach}} \approx \mathbf{426.67\,m^3}$

Dachfläche, ohne Boden (beide Arten)
Die Dachfläche besteht aus 2 gleichschenkligen Dreiecken und 2 gleichschenkligen Trapezen:

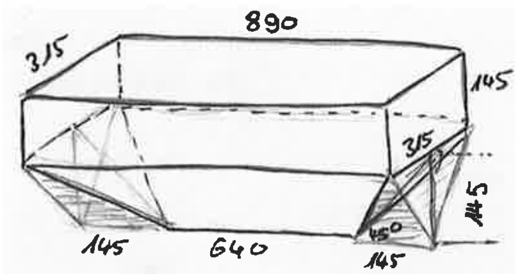


Trapez:	Mittellinie	$6a$	$12\,m$
	Höhe VS	$\sqrt{(2a)^2+(4a)^2} = a\sqrt{20} \;= 2a\sqrt{5}$	$\sqrt{4^2+8^2}\,m = 8.944...\,m$
	Fläche:	$A_{Trapez} = 12a^2\sqrt{5}$	$A_{Trapez} = 107.331...\,m^2$
Dreieck:	Basis AC	$4a$	$8\,m$
	Höhe RS	$\sqrt{(2a)^2+(4a)^2} = a\sqrt{20} \;= 2a\sqrt{5}$	$\sqrt{4^2+8^2}\,m = 8.944...\,m$
	Fläche:	$A_{Dreieck} = 4a^2\sqrt{5}$	$A_{Dreieck} = 35.77...\,m^2$
Gesamte Dachfläche		$\mathbf{A_{Dach}} = 2A_{Trapez} + 2A_{Dreieck} = \mathbf{32a^2\sqrt{5}}$	$\mathbf{A_{Dach}} \approx \mathbf{286.22\,m^2}$

J437 Wagen = Quader + Prisma – 2Pyramiden

Quader $V_{Quader} = 890\,cm \cdot 315\,cm \cdot 145\,cm = 40\,650\,750\,cm^3$

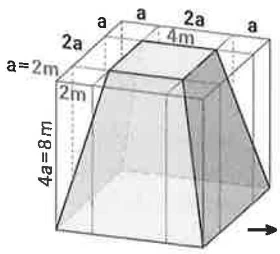
Prisma $G = 315\,cm \cdot 145\,cm : 2$
$h = 890\,cm$
$V_{Prisma} = G \cdot h = 20\,325\,375\,cm^3$



Pyramide $G = 315\,cm \cdot 145\,cm : 2$
$h = 145\,cm$
$V_{Pyramide} = G \cdot h : 3 = 1\,103\,812.5\,cm^3$

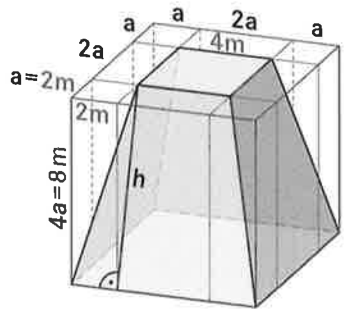
Wagen $V_{Wagen} = V_{Quader} + V_{Prisma} - 2 \cdot V_{Pyramide} = 58\,768\,500\,cm^3 = \mathbf{58\,768.5\ l = 59\,m^3}$

J438 a Kantenlängen



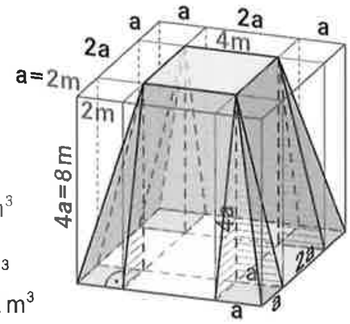
Grundkanten	$4a$	$8\,m$
Deckkanten	$2a$	$4\,m$
Seitenkanten	$\sqrt{a^2+a^2+(4a)^2}$ $= a\sqrt{18} = 3a\sqrt{2}$	$\sqrt{2^2+2^2+8^2}\,m$ $\approx 8.49\,m$

→ **Oberfläche = Boden□ + Deck□ + 4 Trapeze**



Boden□:	$A_{B\square} = 16a^2$	$A_{B\square} = 64\,m^2$
Deck□:	$A_{D\square} = 4a^2$	$A_{D\square} = 16\,m^2$
Trapez:	$m = 3a$ $h = \sqrt{(4a)^2+a^2} = a\sqrt{17}$	$m = 6\,m$ $h = \sqrt{8^2+2^2}\,m = 8.246\ldots\,m$
	$A_{\text{⏢}} = 3a^2\sqrt{17}$	$A_{\text{⏢}} = 49.477\ldots\,m^2$
	$S = A_{B\square} + A_{D\square} + 4A_{\text{⏢}} = \mathbf{4a^2(5+3\sqrt{17})}$	$S \approx \mathbf{277.91\,m^2}$

b **Volumen = Quader + 4 Prismen + 4 Pyramiden**



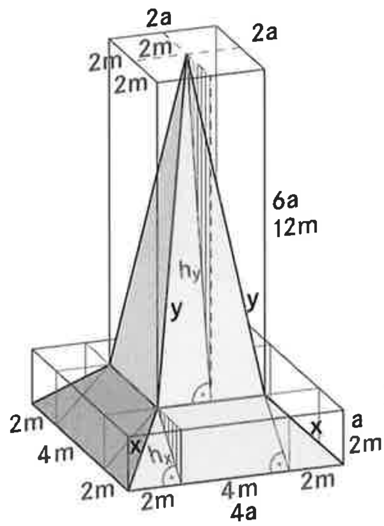
Quader: $V_{Quader} = (2a)^2 \cdot 4a = 16\,a^3$
$V_{Quader} = 4m \cdot 4m \cdot 8m = 128\,m^3$

Pyramide: $G = a^2 \quad h = 4a \quad \Rightarrow V_{Pyram} = \frac{4}{3}a^3$
$G = 4\,m^2 \quad h = 8\,m \quad \Rightarrow V_{Pyram} = 10.666\ldots\,m^3$

Prisma: $G = a \cdot 4a : 2 = 2a^2 \quad h = 2a \Rightarrow V_{Prisma} = 4a^3$
$G = 2\,m \cdot 8\,m : 2 = 8\,m^2 \quad h = 4\,m \Rightarrow V_{Prisma} = 32\,m^3$

P'stumpf: $\mathbf{V_{Stumpf}} = V_{Quader} + 4V_{Pyram} + 4V_{Prisma} = 16\,a^3 + \frac{16}{3}a^3 + 16a^3 = \mathbf{\frac{112}{3}a^3}$
$\mathbf{V_{Stumpf}} \approx \mathbf{298.67\,m^3}$

J439 **Körper links** **a = 2 m**



Kantenlängen

Grundkanten: 8 m
«Knick» 4 m
Schrägkanten: $\mathbf{x} = \sqrt{2^2+2^2+2^2}\,m \approx \mathbf{3.46\,m}$
$\mathbf{y} = \sqrt{2^2+2^2+12^2}\,m \approx \mathbf{12.33\,m}$

Volumen **Dach = Spitze + Stumpf**

Spitze: $G = 16\,m^2 \quad h = 12\,m \quad \Rightarrow \mathbf{V_{Spitze} = 64\,m^3}$

Stumpf: (Unterteilung siehe oben)
Quader $V_{Quader} = 4\,m \cdot 4\,m \cdot 2\,m = 32\,m^3$
Prisma $G = 2m^2 \quad h = 4\,m \quad \Rightarrow V_{Prisma} = 8\,m^3$
Pyramide $G = 4m^2 \quad h = 2\,m \quad \Rightarrow V_{Ecke} = \frac{8}{3}\,m^3$
$\mathbf{V_{Stumpf}} = V_{Quader} + 4V_{Prisma} + 4V_{Ecke} \approx \mathbf{74.67\,m^3}$

Dachvolumen: $\mathbf{V_{Dach}} = V_{Spitze} + V_{Stumpf} \approx \mathbf{138.67\,m^3}$

Dachfläche **Dach = 4 Dreiecke + 4Trapeze** (ohne Boden)

Dreieck: $h_y = \sqrt{12^2+2^2}\,m = \sqrt{148}\,m \quad \Rightarrow \quad A_{\triangle} = 4\,m \cdot \sqrt{148}\,m : 2$

Trapez: $h_x = 2 \cdot \sqrt{2}\,m \quad \Rightarrow \quad A_{\text{⏢}} = 6\,m \cdot 2 \cdot \sqrt{2}\,m$

Dachfläche: $\mathbf{A_{Dach}} = 4A_{\triangle} + 4A_{\text{⏢}} \approx \mathbf{165.21\,m^2}$

> **Fehlerhinweis:**
> In der 1. Auflage des Buches und des Arbeits- und Theorieheftes J sind leider die beiden Turmspitzen rechts falsch beschriftet. Alle Spitzen sind gleich hoch: **6a**
>
> Zudem soll die **Dachfläche** und **nicht** die **Oberfläche** berechnet werden.

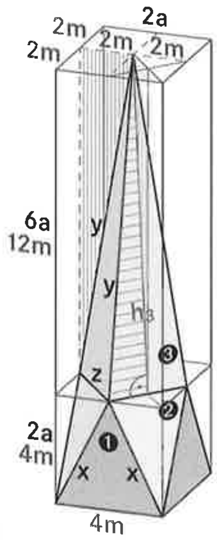
Körper Mitte **a = 2 m** Abbildung siehe gegenüberliegende Seite

Kantenlängen

Grundkanten: 4 m
«Knick» $\mathbf{z} = 2 \cdot \sqrt{2}\,m \approx \mathbf{2.83\,m}$
Schrägkanten: $\mathbf{x} = \sqrt{4^2+2^2}\,m = \sqrt{20}\,m \approx \mathbf{4.47\,m}$
$\mathbf{y} = \sqrt{2^2+12^2}\,m = \sqrt{148}\,m \approx \mathbf{12.17\,m}$

Fehlerhinweis:
In der 1. Auflage des Buches und des Arbeits- und Theorieheftes J sind leider die beiden Turmspitzen rechts falsch beschriftet. Alle Spitzen sind gleich hoch: **6a**

Zudem soll die **Dachfläche** und **nicht** die **Oberfläche** berechnet werden.



Volumen **Dach = Spitze + Unterteil**

Spitze: $G = 8\,m^2 \quad h = 12\,m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_{Spitze} = 32\,m^3}$

Unterteil: Würfel – 4Eckpyramiden

Würfel: $V_{Würfel} = (4\,m)^3 = 64\,m^3$

Pyramide: $G = 2m^2 \quad h = 4\,m \quad \Rightarrow \quad V_{Ecke} = \frac{8}{3}\,m^3$

$\mathbf{V_{unten}} = V_{Würfel} - 4V_{Ecke} \approx \mathbf{53.33\,m^3}$

Dachvolumen: $\mathbf{V_{Dach}} = V_{Spitze} + V_{unten} \approx \mathbf{85.33\,m^3}$

Dachfläche **Dach = 4 Dreiecke❶ + 4 Dreiecke❷ + 4 Dreiecke❸**

Dreieck❶: $\mathbf{A_{\triangle 1}} = 4\,m \cdot 4\,m : 2 = \mathbf{8\,m^2}$

Dreieck❷: $h_2 = \sqrt{x^2 - (z/2)^2}\,m = \sqrt{20-2}\,m = \sqrt{18}\,m$

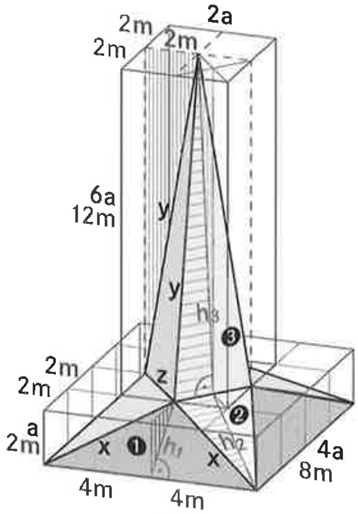
$\Rightarrow \quad \mathbf{A_{\triangle 2}} = z \cdot h_2 : 2 = 2 \cdot \sqrt{2}\,m \cdot \sqrt{18}\,m : 2 = \mathbf{6\,m^2}$

oder $h_3 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 12^2}\,m$

Dreieck❸: $h_3 = \sqrt{y^2 - (z/2)^2}\,m = \sqrt{148-2}\,m = \sqrt{146}\,m$

$\Rightarrow \quad \mathbf{A_{\triangle 3}} = z \cdot h_3 : 2 = 2 \cdot \sqrt{2}\,m \cdot \sqrt{146}\,m : 2 = \mathbf{\sqrt{292}\,m^2}$

Dachfläche: $\mathbf{A_{Dach}} = 4A_{\triangle 1} + 4A_{\triangle 2} + 4A_{\triangle 3} \approx \mathbf{124.35\,m^2}$



Körper rechts **a = 2 m**
Kantenlängen

Grundkanten: 8 m

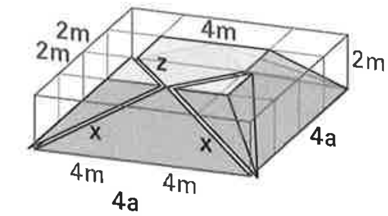
«Knick»: $\mathbf{z} = 2 \cdot \sqrt{2}\,m \approx \mathbf{2.83\,m}$

Schrägkanten: $\mathbf{x} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}\,m = \sqrt{24}\,m \approx \mathbf{4.90\,m}$

$\mathbf{y} = \sqrt{2^2 + 12^2}\,m = \sqrt{148}\,m \approx \mathbf{12.17\,m}$

Volumen **Dach = Spitze + Unterteil**

Spitze: $G = 8\,m^2 \quad h = 12\,m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_{Spitze} = 32\,m^3}$



Unterteil 1. Art: Stumpf – 4△Pyramiden

Stumpf: (wie bei **J439b**)

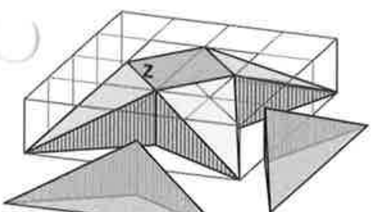
Quader: $\mathbf{V_{Quader}} = 16\,m^2 \cdot 2\,m = \mathbf{32\,m^3}$

4Prisma: $V_{Prisma} = (2\,m \cdot 2\,m : 2) \cdot 4\,m = \mathbf{8\,m^3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_{4Prisma} = 32\,m^3}$

4Eckpyram: $V_{Ecke} = (2\,m \cdot 2\,m) \cdot 2\,m : 3 = \mathbf{\frac{8}{3}\,m^3} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_{4Ecke} = \frac{32}{3}\,m^3}$

△Pyramide: $G = 2\,m \cdot 2\,m : 2 = 2m^2 \quad h = 2\,m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_{\triangle Pyram} = \frac{4}{3}\,m^3}$

$\mathbf{V_{unten}} = V_{Stumpf} - 4V_{\triangle Pyram} = (V_{Quader} + V_{4Prisma} + V_{4Ecke}) - 4V_{\triangle Pyram} \approx \mathbf{69.33\,m^3}$



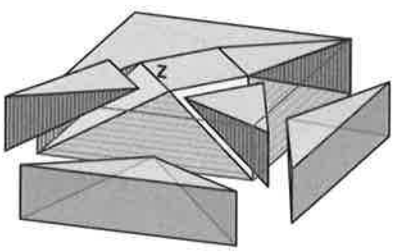
Unterteil 2. Art: Quader + 4▭Pyramiden + 4△Pyramiden

Quader: $\mathbf{V_{Quader}} = 8\,m^2 \cdot 2\,m = \mathbf{16\,m^3}$

▭Pyramide: $G = z \cdot 2\,m = 4 \cdot \sqrt{2}\,m^2 \quad h = 3\sqrt{2}m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_{\square Pyram} = 8\,m^3}$

△Pyramide: $G = 8\,m \cdot 2\,m : 2 = 8m^2 \quad h = 2\,m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_{\triangle Pyram} = \frac{16}{3}\,m^3}$

$\mathbf{V_{unten}} = V_{Quader} + 4V_{\square Pyram} + 4V_{\triangle Pyram} \approx \mathbf{69.33\,m^3}$



Unterteil 3. Art: Grosser Quader – 4△Pyramiden – 4▭Pyramiden

Quader: $\mathbf{V_{grQuader}} = (8\,m)^2 \cdot 2\,m = \mathbf{128\,m^3}$

△Pyramide: $G = z \cdot 3\sqrt{2}\,m : 2 = 6\,m^2 \quad h = 2\,m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_{\triangle Pyram} = 4\,m^3}$

▭Pyramide: $G = 8\,m \cdot 2\,m = 16\,m^2 \quad h = 2\,m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V_{\square Pyram} = \frac{32}{3}\,m^3}$

$\mathbf{V_{unten}} = V_{grQuader} - 4V_{\triangle Pyram} - 4V_{\square Pyram} \approx \mathbf{69.33\,m^3}$

Dachvolumen: $\mathbf{V_{Dach}} = V_{Spitze} + V_{unten} \approx \mathbf{101.333\,m^3}$

Dachfläche **Dach = 4 Dreiecke❶ + 4 Dreiecke❷ + 4 Dreiecke❸** (ohne Boden)

Dreieck❶: $h_1 = 2 \cdot \sqrt{2}\,m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A_{\triangle 1}} = 8\,m \cdot h_1 : 2 = \mathbf{8\sqrt{2}\,m^2}$

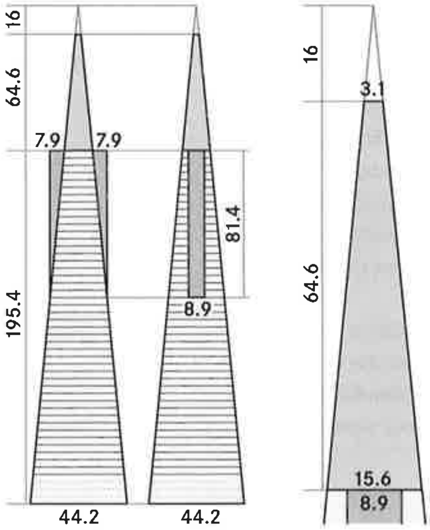
Dreieck❷: $h_2 = \sqrt{x^2 - (z/2)^2}\,m = \sqrt{24-2}\,m = \sqrt{22}\,m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A_{\triangle 2}} = z \cdot h_2 : 2 = \mathbf{\sqrt{44}\,m^2}$

oder $h_3 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 12^2}\,m$

Dreieck❸: $h_3 = \sqrt{y^2 - (z/2)^2}\,m = \sqrt{148-2}\,m = \sqrt{146}\,m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A_{\triangle 3}} = z \cdot h_3 : 2 = \mathbf{\sqrt{292}\,m^2}$

Dachfläche: $\mathbf{A_{Dach}} = 4A_{\triangle 1} + 4A_{\triangle 2} + 4A_{\triangle 3} \approx \mathbf{140.14\,m^2}$

J440 **a** **Gebäude = Pyramide + 2Liftschächte – Spitze**



Pyramide $G = 44.2\,m \cdot 44.2\,m$
$h = 276\,m$
$V_{Pyramide} = 179\,734.88\,m^3$

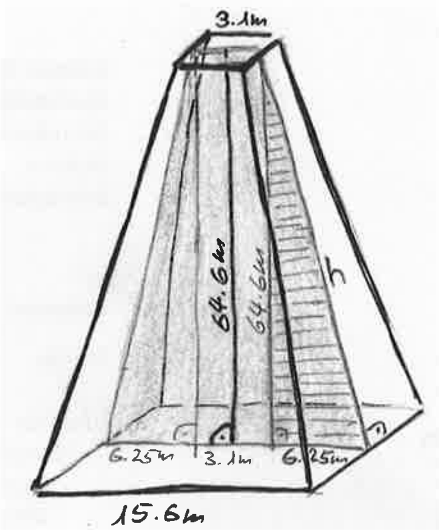
Liftschacht (Prisma) $G = 7.9\,m \cdot 81.4\,m : 2$
$h = 8.9\,m$
$V_{Lift} = 2\,861.617\,m^3$

Spitze (Pyramide) $G = 3.1\,m \cdot 3.1\,m$
$h = 16\,m$
$V_{Spitze} = 51.253...\,m^3$

Gebäude: $\mathbf{V_{Gebäude}} = V_{Pyramide} + 2V_{Lift} - V_{Spitze}$
$\approx \mathbf{185\,407\,m^3}$

Das Gebäude beansprucht ungefähr $185\,407\,m^3$.

b Die Aluminiumspitze wird von 4 kongruenten, gleichschenkligen Trapezen begrenzt.
Die Höhe h (Flächenhöhe) eines solchen Trapezes lässt sich mit Hilfe eines Querschnittes in einer Skizze oder anhand der Ansicht berechnen:



$h = \sqrt{6.25^2 + 64.6^2}\,m \approx 64.90\,m$

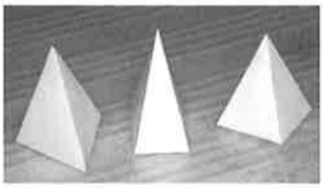
Mittellinie:
$m = (15.6\,m + 3.1\,m) : 2 = 9.35\,m$

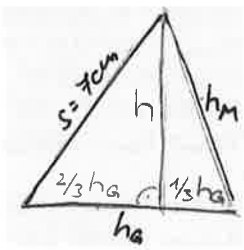
$A_{Trapez} = m \cdot h \approx 9.35\,m \cdot 64.90\,m = 606.815\,m^2$

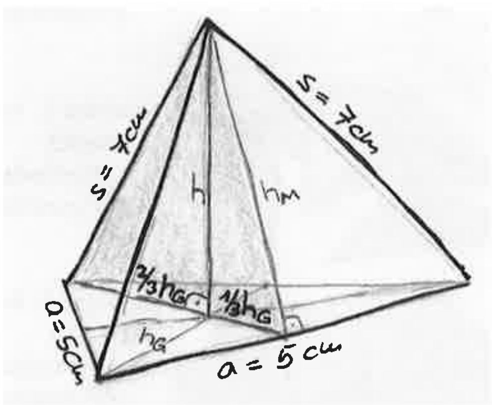
$\mathbf{A_{gesamt}} = 4\,A_{Trapez} = \mathbf{2\,427.26\,m^2}$

Die Spitze ist mit rund **2430 m²** Aluminiumblech eingekleidet.

J441 **a** Die **Höhe h** einer regelmässigen, dreiseitigen Pyramide lässt sich mit Hilfe eines Schnittdreiecks bestimmen. Dieses wird begrenzt von
- einer Kante s,
- einer Schwerlinie h_G der Grundfläche und
- der Seitenhöhe h_M eines Manteldreiecks.







Die Höhe teilt h_G im Verhältnis 2 : 1.

h_G ist Höhe im gleichseitigen Dreieck mit den Seiten a = 5 cm:

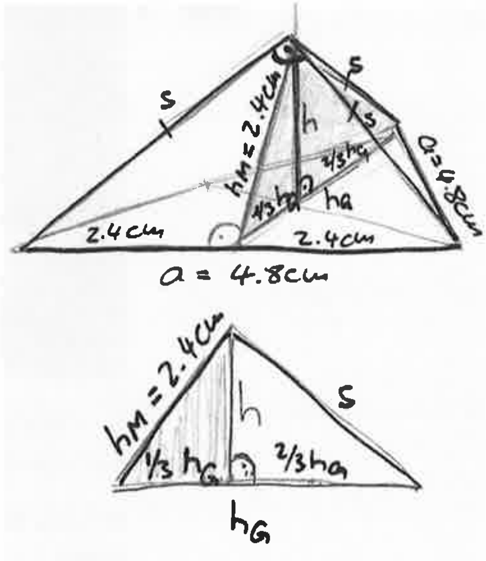
$h_G = \frac{a}{2}\sqrt{3} = 2.5\,cm \cdot \sqrt{3} = 4.330...\,cm$

$h = \sqrt{s^2 - (\frac{2}{3}h_G)^2} = 6.377...\,cm \approx \mathbf{6.38\,cm}$ (formal: $\mathbf{h} = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{3}}$)

b Grundfläche: $G = a \cdot h_G : 2 = 10.825...\,cm^2$ (formal: $G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$)
Volumen: $V = G \cdot h : 3 \approx \mathbf{23.01\,cm^3}$

c Seitenhöhe: $h_M = \sqrt{s^2 - (\frac{a}{2})^2} = 6.538...\,cm$
Mantel: $M = 3 \cdot \frac{a \cdot h_M}{2} \approx \mathbf{49.04\,cm^2}$

J442 Da die Seitenfläche rechtwinklig-gleichschenklig ist, kann h_M ohne zu rechnen angegeben werden: $h_M = 2.4$ cm.



Volumen

$h_G = \frac{a}{2}\sqrt{3} = 2.4\,\text{cm}\cdot\sqrt{3} = 4.156\ldots\,\text{cm}$

$h = \sqrt{h_M^2 - (\frac{1}{3}h_G)^2} = \sqrt{2.4^2 - (0.8\sqrt{3})^2}\,\text{cm}$

$= \sqrt{3.84}\,\text{cm} = 1.959\ldots\,\text{cm}$

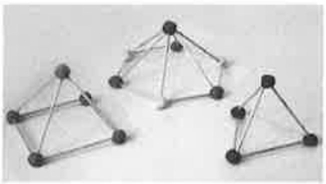
$G = a\cdot h_G : 2 = (2.4\,\text{cm})^2\cdot\sqrt{3} = 9.976\ldots\,\text{cm}^2$

$V = G\cdot h : 3 \approx \mathbf{6.52\,cm^3}$

Oberfläche

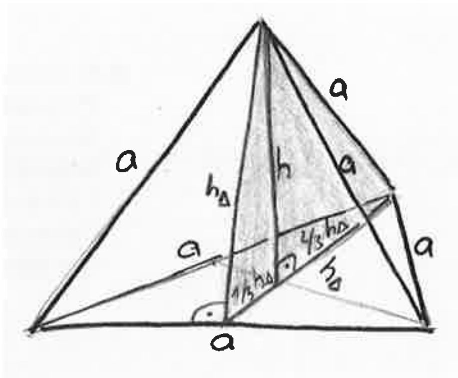
$S = G + M = G + 3\cdot(2.4\,\text{cm})^2 \approx \mathbf{27.26\,cm^2}$

J443 **a** **Höhe**



$h_\triangle = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

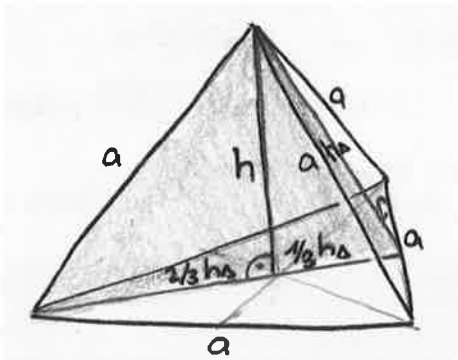
$\mathbf{h} = \sqrt{a^2 - (\frac{2}{3}h_\triangle)^2} = \sqrt{a^2 - (\frac{a}{3}\sqrt{3})^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \mathbf{a\sqrt{\frac{2}{3}}}$



Volumen

$G = A_\triangle = a\cdot h_\triangle : 2 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

$\mathbf{V} = G\cdot h : 3 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\cdot a\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{\frac{a^3}{12}\sqrt{2}}$



b a = 14 cm

Höhe

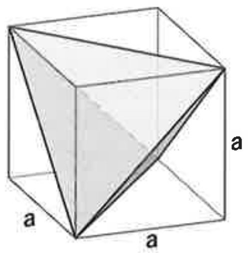
$\mathbf{h} = 14\,\text{cm}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \mathbf{11.43\,cm}$

Volumen

$V = \frac{(14\,\text{cm})^3}{12}\cdot\sqrt{2} \approx \mathbf{323.38\,cm^3}$

J444 **a** -

b **1** Es müssen **vier** solche **Ecken** abgeschnitten werden.



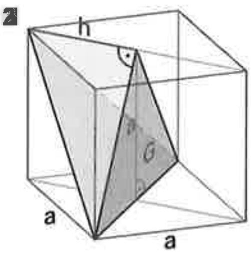
Volumen einer Eckpyramide: $V_{Ecke} = \frac{a^2}{2}\cdot a : 3 = \frac{a^3}{6}$

Volumen des Tetraeders: $\mathbf{V_{Tetra}} = V_{Würfel} - 4V_{Ecke}$

$= a^3 - 4\cdot\frac{a^3}{6} = \mathbf{\frac{a^3}{3}}$

Das Tetraeder füllt **einen Drittel des Würfels** aus.

2



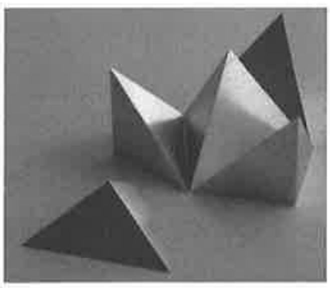
$G = a\sqrt{2}\cdot a : 2 = \frac{a^2}{2}\sqrt{2}$

$h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

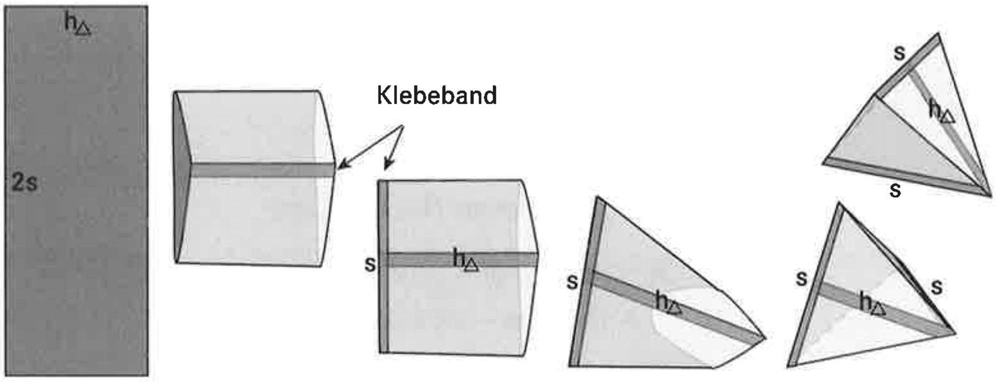
$V_{Pyramide} = G\cdot h : 3$

$= \frac{a^2}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2} : 3 = \frac{a^3}{6}$

$\mathbf{V_{Tetra}} = 2\cdot V_{Pyramide} = \mathbf{\frac{a^3}{3}}$

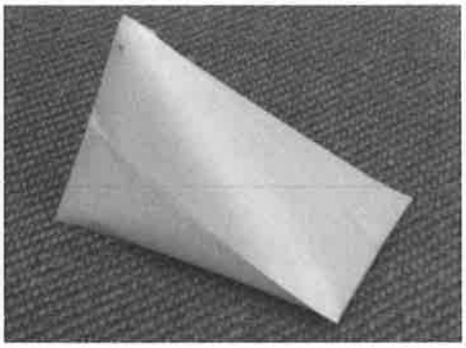


J445 **a**



Die Höhe bzw. Länge des Bandes wird zu einer doppelten Seitenkante s. Sie muss also 2s sein. Die Breite des Bandes wird zur Flächenhöhe $h_\triangle$.

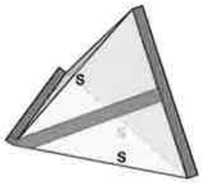
Für eine Kantenlänge von s = 9 cm muss das Band die folgenden Abmessungen haben:
Länge = 2s = **18 cm**
Breite = $h_\triangle = \frac{s}{2}\sqrt{3} = 4.5\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} \approx$ **7.79 cm**



b Es entsteht eine **schiefe, dreiseitige Pyramide.**
Sie wird von **vier kongruenten, gleichschenkligen Dreiecken** begrenzt, die eine Flächenhöhe von 12 cm haben.
Dementsprechend hat sie **zwei kurze** (9 cm) und **vier lange Kanten.**

J446 **a** $V = \frac{s^3}{12}\sqrt{2} = 1000\,\text{cm}^3 \quad \Rightarrow \quad s^3 = \frac{12\,000\,\text{cm}^3}{\sqrt{2}}$

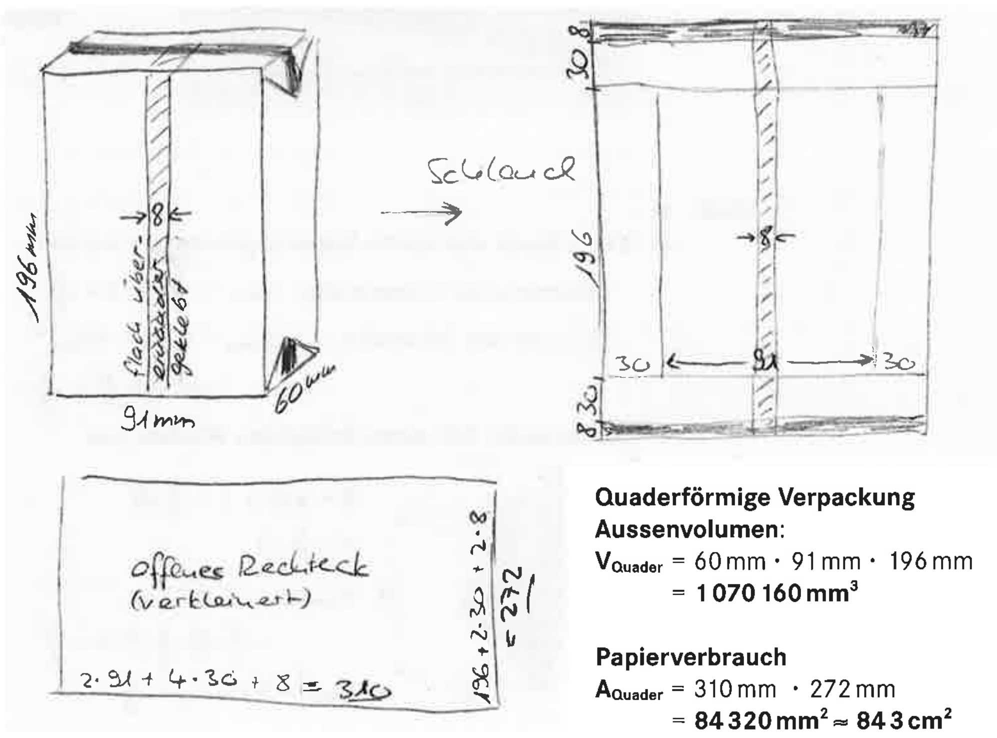
$$\mathbf{s} = \sqrt[3]{\frac{12\,000\,\text{cm}^3}{\sqrt{2}}} = \mathbf{20.40\,cm}$$



Die Kanten müssen **länger als 20.4 cm** sein.
Bei einer inneren Kantenlänge von 20.4 cm hätte genau ein Liter Platz – ohne Luft.

Quaderförmige Verpackung
Wir empfehlen, für diese Aufgabe eine tetraederförmige Verpackung zur Hand zu nehmen.

b



Quaderförmige Verpackung Aussenvolumen:
$V_{\text{Quader}} = 60\,\text{mm} \cdot 91\,\text{mm} \cdot 196\,\text{mm}$
$= \mathbf{1\,070\,160\,mm^3}$

Papierverbrauch
$A_{\text{Quader}} = 310\,\text{mm} \cdot 272\,\text{mm}$
$= \mathbf{84\,320\,mm^2 \approx 843\,cm^2}$

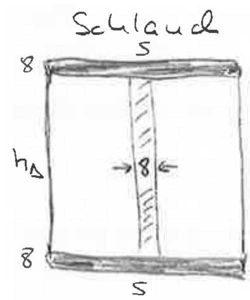
Tetraederförmige Verpackung

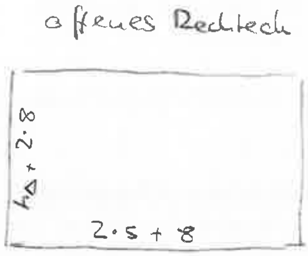
Kantenlänge

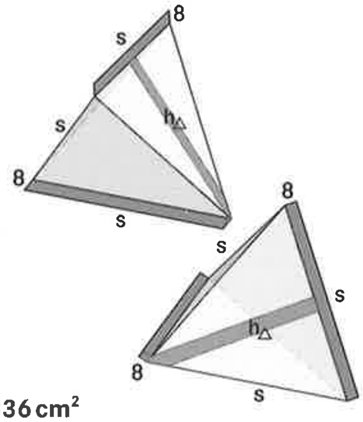
$V_{Tetraeder} = V_{Quader}$

$\frac{s^3}{12}\sqrt{2} = 1\,070\,160\,mm^3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 1\,070\,160\,mm^3}{\sqrt{2}}} = 208.6275...\,mm \approx \mathbf{208.6\,mm}$

Papierverbrauch







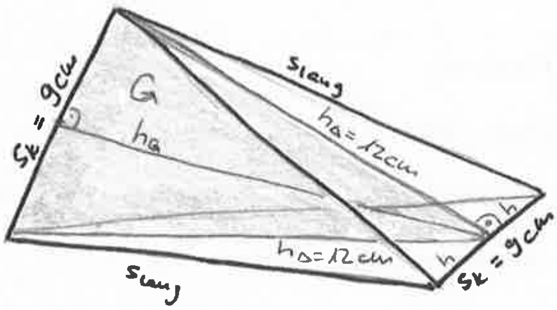
$h_\triangle = \frac{s}{2}\sqrt{3} = 180.676...\,mm \approx 180.7\,mm$

$\mathbf{A}_{Tetraeder} \approx (2s + 8\,mm) \cdot (h_\triangle + 2 \cdot 8\,mm) \approx \mathbf{83\,638\,mm^2} \approx \mathbf{836\,cm^2}$

Die **tetraederförmige Verpackung** verbraucht theoretisch **7 cm²** **weniger** Material.

d Die tetraederförmige Verpackung eignet sich weniger gut zum Stapeln. Sie ist **sperriger**.

J447



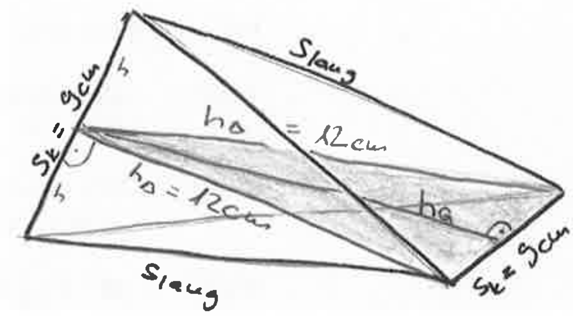
Lösungsidee
Die Höhe der Pyramide kann mit den bisher erworbenen Geometriekenntnissen nicht berechnet werden. Die Pyramide lässt sich aber in zwei symmetrische Hälften teilen. Die Schnittfläche ist die Grundfläche der beiden halben Pyramiden, ihre Höhe ist die halbe kurze Kante.

Kurze Kante $s_k = 9\,cm$
Flächenhöhe $h_\triangle = 12\,cm$

Grundfläche der halben Pyramide
$h_G = \sqrt{12^2 - 4.5^2}\,cm = 11.124...\,cm$
$G = s_k \cdot h_G : 2 = 50.059...\,cm^2$

Höhe der halben Pyramide
$h = s_k : 2 = 4.5\,cm$

Volumen beider Hälften
$\mathbf{V_{ganz}} = 2 \cdot G \cdot h : 3 \approx \mathbf{150.18\,cm^3}$

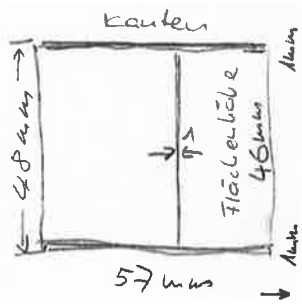


J448 **a** Verschweisste Kanten s = 57 mm

Flächenhöhe $h_\triangle$ bei einem Tetraeder mit dieser Kantenlänge: $h_\triangle = 28.5\,mm \cdot \sqrt{3} = 49.363...\,mm$

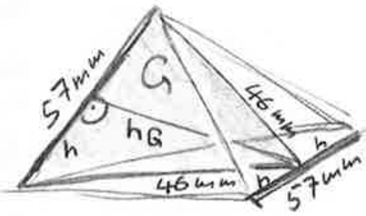
Die Flächenhöhe der Pyramidenbeutel ist nur 46 mm.

Die Pyramidenbeutel sind **keine regelmässigen Tetraeder**.



Abmessungen
Grundsätzlich könnten die verschweissten Kanten auch 48 mm lang sein. Dann wären die Beutel aber offensichtlich nicht regelmässig und sähen auf dem Foto nicht so aus.

b Volumen Berechnung gemäss **J447**
Verschweisste Kanten 57 mm
Flächenhöhen 46 mm



Grundfläche der halben Pyramide
$h_G = \sqrt{46^2 - 28.5^2}\,\text{mm} = 36.107...\,\text{mm}$
$G = 57\,\text{mm} \cdot h_G : 2 = 1029.063...\,\text{mm}^2$

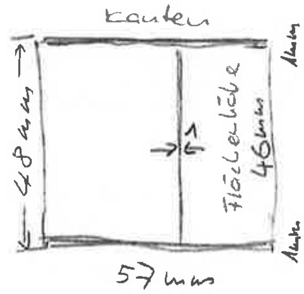
Höhe der halben Pyramide
$h = 28.5\,\text{mm}$

Volumen des Beutels (beide Hälften)
$\mathbf{V_{ganz} = 2 \cdot G \cdot h : 3 = 19\,552\,mm^3}$

Die kleinen Teebeutel haben ein Volumen von **fast 20 cm³**.

d Verbrauch von Papiervlies
1 herkömmlicher Beutel: $150\,\text{mm} \cdot 80\,\text{mm} = 12\,000\,\text{mm}^2$
10^6 herkömmliche Beutel: $12\,000 \cdot 10^6\,\text{mm}^2 = \mathbf{12\,000\,m^2}$

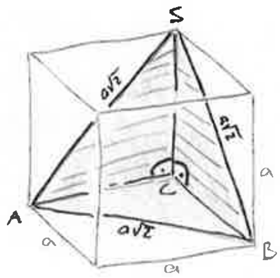
1 Pyramidenbeutel: $(2 \cdot 57 + 1)\,\text{mm} \cdot 48\,\text{mm} = 5\,520\,\text{mm}^2$
10^6 Pyramidenbeutel: $5\,520 \cdot 10^6\,\text{mm}^2 = \mathbf{5\,520\,m^2}$



Einsparung bei 1 Million Beuteln: **6 480 m²**.
Mit den neuen Beuteln kann mehr als die Hälfte Vlies eingespart werden, die Schachteln sind aber grösser.

J449 Da alle Pyramiden die gleiche Grundfläche haben, genügt es, ihre **Mantelflächen** zu vergleichen:

Pyramide 1 (von links)

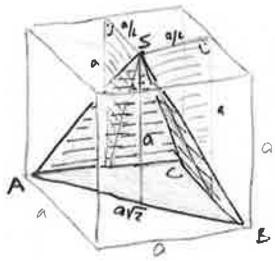


$\triangle ACS \cong \triangle BCS$ halbes Quadrat $A_{ACS} = A_{BCS} = \frac{a^2}{2}$

$\triangle ABS$ gleichseitig, $s = a\sqrt{2}$ $A_{ABS} = \frac{s^2}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$

Mantel $M = a^2(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}) = 1.866...\,a^2$

Pyramide 2 (von links)

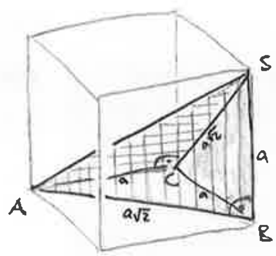


$\triangle ABS$ gleichschenklig, Basis $= a\sqrt{2}$
Höhe $= a$ $A_{ABS} = \frac{a^2}{2}\sqrt{2}$

$\triangle ACS \cong \triangle BCS$ gleichschenklig, Basis $= a$
Höhe $= \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$ $A_{ACS} = A_{BCS} = \frac{a^2}{4}\sqrt{5}$

Mantel $M = a^2(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}) = 1.825...\,a^2$

Pyramide 3 (von links)



$\triangle BCS$ halbes Quadrat $A_{BCS} = \frac{a^2}{2}$

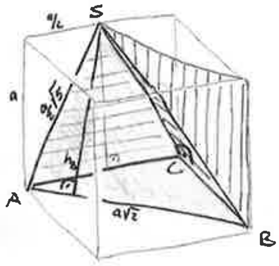
$\triangle ABS \cong \triangle ACS$ rechtwinklig $A_{ACS} = A_{BCS} = a\sqrt{2} \cdot a : 2 = \frac{a^2}{2}\sqrt{2}$

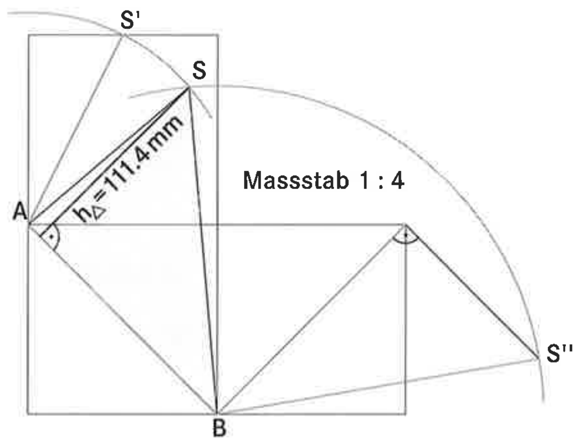
Mantel $M = a^2(\frac{1}{2} + \sqrt{2}) = 1.914...\,a^2$

Konstruktion
Pyramide 4 wurde bewusst so gewählt, dass sie mit den bisherigen Kenntnissen nicht berechnet werden kann.
Sie soll in Erinnerung rufen, dass auch massstäbliche Konstruktionen zur Bestimmung von Grössen herangezogen werden können.

Pyramide 4 (von links)

$\triangle ACS$	gleichschenklig, Basis a, Höhe a	$A_{ACS} = \frac{a^2}{2}$
$\triangle BCS$	rechtwinklig	$A_{BCS} = a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{5} : 2 = \frac{a^2}{4}\sqrt{5}$
$\triangle ABS$	allgemein, Seiten $a\sqrt{2}$, $\frac{a}{2}\sqrt{5}$ und $\sqrt{a^2 + a^2 + (\frac{a}{2})^2} = \frac{3}{2}a$ Die Höhe $h_\triangle$ kann mit Hilfe einer Konstruktion bestimmt werden. Beispielsweise mit a = 10 cm.	





Der Konstruktion ist zu entnehmen:
$h_\triangle \approx 1.114a$
$A_{ABS} \approx a\sqrt{2} \cdot 1.114a : 2 \approx \mathbf{0.788\,a^2}$

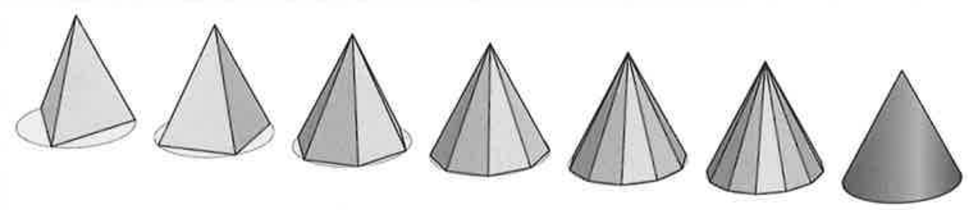
Mantel $\quad M \approx \mathbf{1.847\,a^2}$

Fazit:
Die vier Pyramiden haben das gleiche Volumen aber **verschieden grosse Mantelflächen**.

V_{Kegel}

J450 **a** **Das Kegelvolumen**

Die Volumenformel für Pyramiden gilt für alle Pyramiden – insbesondere für gerade, regelmässige Pyramiden, deren Grundflächen beliebig viele Ecken haben.
Jeder Kegel kann durch ein- oder umbeschriebene Pyramiden dieser Art angenähert werden. Je mehr Ecken das regelmässige Vieleck hat, desto näher schmiegt sich die Pyramide an den Kegel an und desto kleiner wird der Unterschied in der Form der beiden Körper und in ihrem Volumen.



Es gilt deshalb für das Kegelvolumen die gleiche Formel wie für das Pyramidenvolumen, wobei die Grundfläche $G = \pi \cdot r^2$ ist:

Volumen = Grundfläche mal Höhe durch 3

$$V_{Kegel} = G \cdot h : 3 = \pi r^2 \cdot h : 3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

b

1	r = 2.4 cm	h = 14.2 cm	$V = \pi \cdot (2.4\,cm)^2 \cdot 14.2\,cm : 3 \approx \mathbf{85.65\,cm^3}$	
2	r = 1.7 m	h = 2.3 m	$V \approx \mathbf{6.96\,m^3}$	
3	r = 0.3 dm	h = 1.7 dm	$V \approx \mathbf{0.16\,dm^3}$	
4	d = 45 cm ⇒	**r = 22.5 cm**	h = 97 cm	$V \approx \mathbf{51\,424\,cm^3}$
5	d = 62 mm ⇒	**r = 31 mm**	h = 145 mm	$V \approx \mathbf{145\,922\,mm^3}$

J451 **a** Alle 3 Körper haben das gleiche Volumen: Die Grundfläche des Kegels bzw. der beiden Teilkegel sind kongruent, die Höhe bzw. die Summe der einzelnen Teilhöhen entsprechen der Würfelhöhe.
$G \cdot h_1 : 3 + G \cdot h_2 : 3 = G \cdot (h_1 + h_2) : 3 = G \cdot h : 3$

→

b Radius = r $\Rightarrow$ Höhe = 2r

$V = \pi \cdot r^2 \cdot 2r : 3 = \mathbf{\frac{2}{3}\pi \cdot r^3}$

Radius r = 10 cm $\Rightarrow$ Höhe = 20 cm

$V = \pi \cdot (10\,cm)^2 \cdot 20\,cm : 3 \approx \mathbf{2\,094.40\,cm^3}$

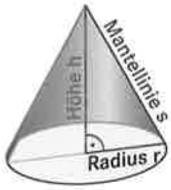
J452 Die Volumen verhalten sich wie **1:3**.
Bei gleichem Radius und gleicher Höhe ist das Kegelvolumen ist ein Drittel des Zylindervolumens.

J453 **a** Das Kegelvolumen **verdoppelt** sich: $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot \mathbf{2h}}{3} = \mathbf{2} \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

b Das Kegelvolumen **vervierfacht** sich: $\frac{\pi \cdot \mathbf{(2r)^2} \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot \mathbf{4}r^2 \cdot h}{3} = \mathbf{4} \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

J454 **a** r = 4.4 cm h = 11.7 cm zu berechnen: s, V

$\mathbf{s = \sqrt{r^2 + h^2} = 12.5\,cm}$ $\mathbf{V} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \approx \mathbf{237.20\,cm^3}$



b r = 3.6 dm s = 8.5 dm zu berechnen: h, V

$\mathbf{h = \sqrt{s^2 - r^2} = 7.7\,dm}$ $\mathbf{V} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \approx \mathbf{104.50\,dm^3}$

c h = 60 mm s = 75 mm zu berechnen: r, V

$\mathbf{r = \sqrt{s^2 - h^2} = 45\,mm}$ $\mathbf{V} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \approx \mathbf{127\,235\,mm^3}$

d r = 4.2 dm V = 71.8 dm³ zu berechnen: h, s

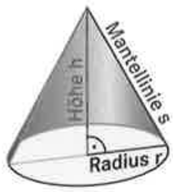
$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} \quad | \cdot 3 : \pi : r^2$

$h = \frac{3V}{\pi r^2} = 3.886...\,dm \approx \mathbf{3.89\,dm}$ $\mathbf{s = \sqrt{r^2 + h^2} \approx 5.72\,dm}$

e h = 5 cm V = 100 cm³ zu berechnen: r, s

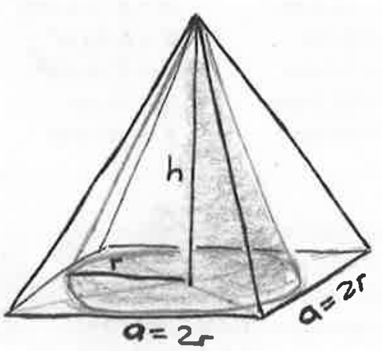
$V = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} \quad | \cdot 3 : \pi : h$

$r^2 = \frac{3V}{\pi h} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}} = 4.370...\,cm$ $\mathbf{s = \sqrt{r^2 + h^2} \approx 6.64\,cm}$



J455 Die beiden Kegel haben kongruente Kreise als Grundflächen und die gleiche Höhe (Würfelhöhe).
Schneidet man den einen Kegel, beispielsweise den schiefen, in unendlich viele, unendlich dünne, waagrechte Scheiben, so lässt sich daraus der gerade Kegel formen.

J456 **a**



Kegel $\mathbf{V_{Kegel}} = \mathbf{\frac{\pi r^2 \cdot h}{3}}$

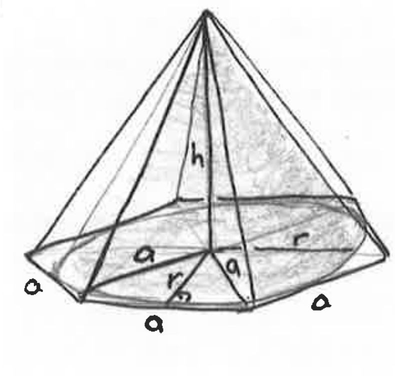
Pyramide a = 2r G = 4r² $\mathbf{V_{Pyram}} = \mathbf{\frac{4r^2 \cdot h}{3}}$

$\frac{V_{Kegel}}{V_{Pyram}} = \frac{\pi}{4} = 0.78539... \approx \mathbf{78.54\,\%}$

Der Kegel füllt **78.54 %** der Pyramide aus.

Man kann natürlich auch r = a/2 wählen.
Die Rechnung wird damit aber umständlicher.

b



Pyramide $G = 6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$

$V_{Pyram} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} \cdot h \cdot \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{a^2 \cdot h \cdot \sqrt{3}}{2}}$

$= 0.866 \ldots a^2h$

Kegel $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$V_{Kegel} = (\frac{a}{2}\sqrt{3})^2 \cdot \frac{\pi \cdot h}{3} = \frac{\pi a^2 \cdot h}{4}$

$= 0.785 \ldots a^2h$

$\frac{V_{Kegel}}{V_{Pyram}} = \frac{0.785\ldots}{0.866\ldots} = 0.90689\ldots \approx \mathbf{90.69\,\%}$

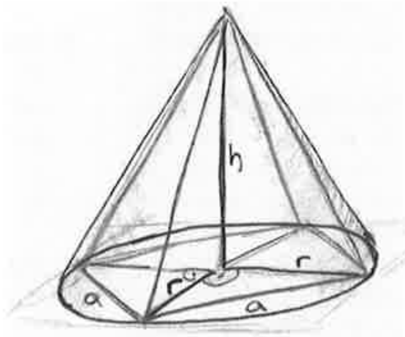
oder: $\frac{V_{Kegel}}{V_{Pyram}} = \frac{\pi a^2 \cdot h}{4} : \frac{a^2 \cdot h \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0.90689\ldots \approx \mathbf{90.69\,\%}$

Der Kegel füllt **90.69 %** der Pyramide aus.

Grundflächen statt Volumen

Da beide Körper jeweils die gleiche Höhe haben, würde es in den Aufgaben **J456** und **J457** genügen, die Grundflächen zu vergleichen.

J457 **a** **Kegel** $V_{Kegel} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$



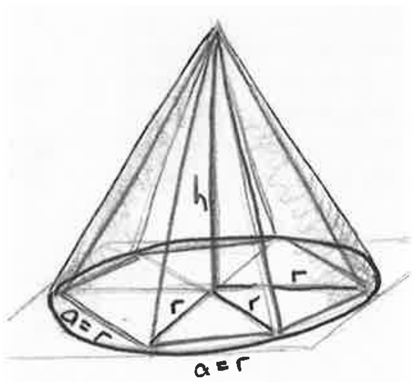
Pyramide $a = r\sqrt{2}$ $G = 2r^2$

$V_{Pyram} = \frac{2r^2 \cdot h}{3}$

$\frac{V_{Pyram}}{V_{Kegel}} = \frac{2}{\pi} = 0.63661\ldots \approx \mathbf{63.66\,\%}$

Die Quadratpyramide füllt **63.66 %** des Kegels aus.

b **Kegel** $V_{Kegel} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = 1.047\ldots r^2h$



Pyramide $a = r$ $G = 6 \cdot \frac{r^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$

$V_{Pyram} = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3} \cdot h \cdot \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{r^2 \cdot h \cdot \sqrt{3}}{2}}$

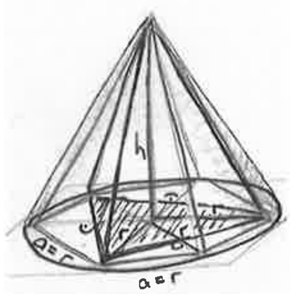
$= 0.866\ldots r^2h$

$\frac{V_{Pyram}}{V_{Kegel}} = \frac{0.688\ldots}{1.047\ldots} = 0.82699\ldots \approx \mathbf{82.70\,\%}$

oder

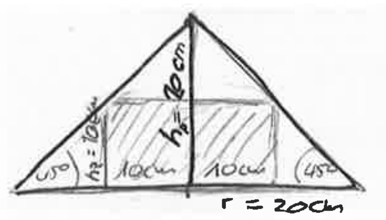
$\frac{V_{Pyram}}{V_{Kegel}} = \frac{r^2 \cdot h \cdot \sqrt{3}}{2} : \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = 0.82699\ldots \approx \mathbf{82.70\,\%}$

Die sechsseitige Pyramide füllt **82.70 %** des Kegels aus.



c Die **Grundfläche** einer einbeschriebenen, dreiseitigen Pyramide ist **halb so gross** wie diejenige der sechsseitigen. Folglich ist auch ihr **Volumen halb so gross**. Sie füllt damit auch nur halb soviel Platz aus wie die sechseitige Pyramide.
Die dreiseitige Pyramide füllt **41.35 %** des Kegels aus.

J458



Der Kegelquerschnitt ist ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck. Der Zylinder ist 10 cm hoch.

$V_{Kegel} = (20\,cm)^2 \cdot \pi \cdot 20\,cm : 3 = 8377.58\ldots cm^3$
$V_{Zylinder} = (10\,cm)^2 \cdot \pi \cdot 10\,cm = 3141.592\ldots cm^3$
Der Zylinder belegt **37.5 %**.

J459 **a** **Lösungsweg 1:**

$V = 1\,\text{dl} = 100\,\text{cm}^3 \qquad r = 2\,\text{cm} \qquad h = ?$

Damit das Sektglas nicht bis zum Rand gefüllt werden muss, muss der effektive Hohlraum grösser vorgesehen werden, beispielsweise $V_{Glas} = 105\,\text{cm}^3$

$$V_{Glas} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V_{Glas}}{\pi r^2} = \frac{315\,\text{cm}^3}{\pi \cdot (2\,\text{cm})^2} \approx 25.07\,\text{cm}$$

Das Sektglas sollte einen **etwa 25 cm** hohen Hohlraum haben, damit es nicht bis zum Rand gefüllt werden muss.

Zusatzfrage
Ist ein so hohes Sektglas sinnvoll? Hat es eine Chance zu einem Verkaufsrenner zu werden? Oder sollte die Firma ihre Vorgaben an den Designer überdenken?

Lösungsweg 2:

$V = 1\,\text{dl} = 100\,\text{cm}^3 \qquad r = 2\,\text{cm} \qquad h = ?$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V}{\pi r^2} = \frac{300\,\text{cm}^3}{\pi \cdot (2\,\text{cm})^2} = 23.87...\,\text{cm}$$

Das Sektglas sollte einen **etwa 25 cm** hohen Hohlraum haben, damit es nicht bis zum Rand gefüllt werden muss.
Effektives Fassungsvermögen in diesem Fall: $V = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 25}{3}\,\text{cm}^3 \approx 104.7\,\text{cm}^3$

Zusätzliches Volumen Durchmesserzugabe

Das zusätzliche Volumen muss bei **b** **massiv grösser** als bei **a** gewählt werden, weil das Glas oben viel breiter ist. Mit der vorgeschlagenen Wahl wird das Glas bis zu einer Höhe von $\sqrt[3]{\frac{150}{200}} \cdot 5\,\text{cm} \approx 4.54\,\text{cm}$ gefüllt (siehe **K2**).
Der Durchmesser beim 2. Lösungsweg muss aus demselben Grund viel stärker vergrössert werden als bei **a**.

b **Lösungsweg 1:**

$V = 15\,\text{cl} = 150\,\text{cm}^3 \qquad h \leq 5\,\text{cm} \qquad d = ?$

Damit das Sektglas nicht bis zum Rand gefüllt werden muss, muss der effektive Hohlraum grösser vorgesehen werden, beispielsweise $V_{Glas} = 200\,\text{cm}^3$ (siehe Randbemerkung)

$$V_{Glas} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{3V_{Glas}}{\pi h}} = \sqrt{\frac{600\,\text{cm}^3}{\pi \cdot 5\,\text{cm}}} = 6.18...\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad d \approx 12.4\,\text{cm}$$

Das Cocktail-Glas sollte einen Innendurchmesser von mindestens **12.4 cm** haben, damit es nicht bis zum Rand gefüllt werden muss.

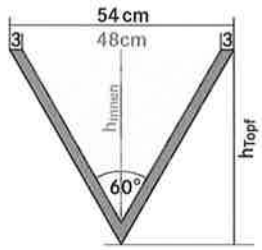
Lösungsweg 2:

$V = 15\,\text{cl} = 150\,\text{cm}^3 \qquad h \leq 5\,\text{cm} \qquad d = ?$

$$V_{Glas} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{3V_{Glas}}{\pi h}} = \sqrt{\frac{450\,\text{cm}^3}{\pi \cdot 5\,\text{cm}}} = 5.35...\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad d = 10.7\,\text{cm}$$

Das Cocktail-Glas sollte einen Innendurchmesser von mindestens **12.5 cm** haben, damit es nicht bis zum Rand gefüllt werden muss.

J460 **a** $r_{innen} = 24\,\text{cm} \qquad h_{innen} = 24\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} = 41.569...\,\text{cm}$



$$V_{innen} = \frac{\pi \cdot r_{innen}^2 \cdot h_{innen}}{3} \approx 25\,074\,\text{cm}^3 \approx \mathbf{25\,l}$$

Der Topf fasst **rund 25 Liter** Erde.

b $r_{aussen} = 27\,\text{cm} \qquad h_{aussen} = 27\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} = 46.765...\,\text{cm}$

$V_{aussen} = \frac{\pi \cdot r_{aussen}^2 \cdot h_{aussen}}{3} \approx 35\,701\,\text{cm}^3$

$V_{Topf} = V_{aussen} - V_{innen} \approx 10\,627\,\text{cm}^3$

$m_{Topf} = 10\,627 \cdot 2\,\text{g} = \mathbf{21\,254\,g} \qquad m_{gesamt} = 10\,627 \cdot 2\,\text{g} + 25\,074 \cdot 2.4\,\text{g} = \mathbf{81\,431.6\,g}$

Der Topf allein wiegt etwas mehr als **21 kg**, mit Erde gefüllt ist er **ungefähr 80 kg** schwer.

J461 **a** Der Sand wird die Vase zu einem **Drittel** füllen.

b $V_{Sand} = \frac{\pi \cdot (7\,\text{cm})^2 \cdot 19\,\text{cm}}{3} \approx 975\,\text{cm}^3$

$V_{Sand\ in\ Vase} = \pi \cdot (8.5\,\text{cm})^2 \cdot (5\,\text{cm}) \approx 1\,135\,\text{cm}^3$

Chiara muss **2 Sandtüten** kaufen. Eine einzige ergäbe nur ca. 4 cm Sandhöhe.

Zusatzfrage
Wie hoch wird der Sand mit 1 Tüte?

J462 **Volumen Zuckerkegel:** $r = 3.4\,\text{cm}$ $h = 2.3\,\text{cm}$ $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = 27.842...\,\text{cm}^3$

Masse Zuckerkegel: $m = 27.842... \cdot 0.96\,\text{g} \approx 26.7\,\text{g}$
Anzahl Zuckerkristalle: 0.1 g sind 100 Kristalle 26.7 g sind **26 700 Kristalle**

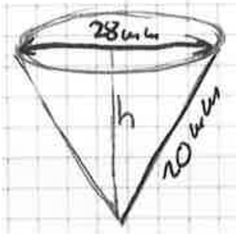
Die Ameisen haben ziemlich viel zu tun. Sie müssen **rund 26 700 Mal** hin und her laufen.

Fehlerhinweis:
In der 1. Auflage des Buches und des Arbeits- und Theorieheftes J hat es leider **eine Null zu viel**: Der Mensch ist natürlich nur **100-mal so gross**, wie der Ameisenlöwe. Höhe und Durchmesser des Trichters müssen deshalb auch nur 100-mal so gross sein.

J463 **a** $h = \sqrt{20^2 - 14^2}\,\text{mm} = 14.282...\,\text{mm}$

$V = \frac{\pi \cdot (14\,\text{mm})^2 \cdot h}{3} = 2931.566...\,\text{mm}^3 \approx \mathbf{2.9\,cm^3}$

Der Ameisenlöwe muss fast 3 cm³ Sand fortschaffen.



b $r = 1.4\,\text{m}$ $h = 1.428\,\text{m}$ $V = \frac{\pi \cdot (1.4\,\text{m})^2 \cdot 1.428\,\text{m}}{3} \approx \mathbf{2.931\,m^3}$

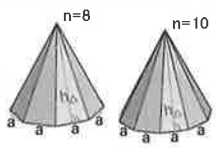
Dichte Sand: $1.5\,\text{kg/dm}^3$
Masse: $2931 \cdot 1.5\,\text{kg} = 4396.5\,\text{kg} \approx \mathbf{4.4\,t}$

Der Mensch müsste ungefähr **4.4 Tonnen** Sand fortschaffen.

Ameisenlöwe (ca. 15 Arten in Mitteleuropa, nicht alle Arten bauen Trichter)
Ein Ameisenlöwe entwickelt sich aus den Eiern der Ameisenjungfer. Er lebt ungefähr 2 Jahre lang als Larve. Während dieser Zeit ernährt er sich von kleinen Lebewesen (Ameisen, Spinnen, Asseln, ...) die in seinen Fangtrichter rutschen. Sobald ein Tierchen in den Trichter gerät, schleudert er mit dem Kopf Sand nach oben, damit es nicht mehr fliehen kann und endgültig abrutscht. Dann packt er es mit den grossen Kieferzangen und spritzt ihm ein lähmendes Gift und Verdauungssaft in den Körper. Der Verdauungssaft löst die Innereien der Beute auf, so dass der Ameisenlöwe später den Nahrungssaft aussaugen kann. Dieser ist so beschaffen, dass der Ameisenlöwe nicht mehr selbst verdauen und keinen Kot ausscheiden muss. Sein Trichter bleibt dadurch sauber. Die Hülle der gefressenen Beute oder andere Verunreinigungen, die in den Trichter fallen, schleudert er nach oben. Dabei vermag er Objekte, die bis zu 8 Mal so schwer sind wie er selbst, nach oben zu befördern. Ein Ameisenlöwe kann aber auch mehrere Monate ohne Nahrung ausharren, falls sich kein Lebewesen in seinen Trichter verirrt. Ameisenlöwen können sich nur rückwärts bewegen.
Nach ungefähr zwei «Löwen»jahren verpuppt sich die Larve im Frühsommer auf dem Grund ihres Trichters in einem kugelförmigen, mit Sandkörnern beklebten Gespinst. Nach etwa 4 Wochen befreit sich daraus eine Ameisenjungfer und fliegt davon.
Eine **Ameisenjungfer** (Imagines) ist ein Netzflügler. Sie sieht ähnlich aus wie eine kleine Libelle, hat aber längere Fühler. Ameisenjungfern sind dämmerungs- und nachtaktive Tiere. Sie können von Mai bis August fliegen. Während dieser Zeit legen sie ihre Eier an sandigen Stellen ab. Häufig leben sie aber nur 2 bis 4 Wochen, bis sie Fledermäusen, Vögeln oder Radnetzspinnen zum Opfer fallen.

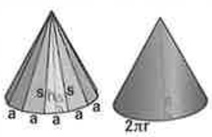
M Kegel

Mantelfläche durch Annäherung



$M = n \cdot \frac{a \cdot h_\triangle}{2} = \frac{u \cdot h_\triangle}{2}$

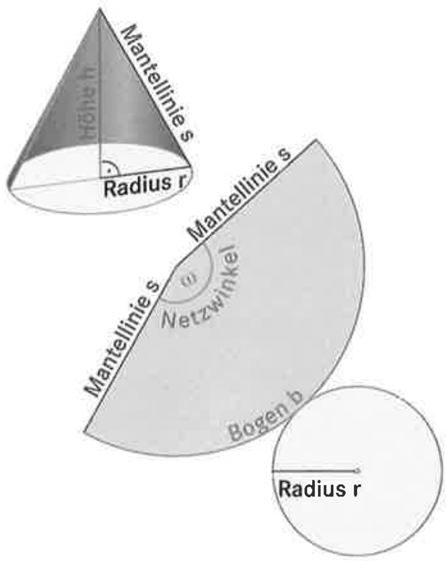
Beim Übergang zum Kegel wird $u \rightarrow 2r\pi$ und $h_\triangle \rightarrow s$.



Damit folgt :

$M = \frac{2\pi r \cdot s}{2} = \boldsymbol{\pi rs}$

J464 **Kegelmantel**
Der Mantel eines Kegels besteht aus einem Kreissektor mit dem Radius s.



a Der **Bogen** b entspricht dem Kreisumfang:

$\mathbf{b = 2\pi \cdot r}$

b **Netzwinkel** ω
Wir vergleichen den Sektor mit dem ganzen Kreis: $\frac{\omega}{360°} = \frac{b}{u_\bigcirc}$

Mit $b = 2\pi \cdot r$ und $u_\bigcirc = 2\pi \cdot s$
folgt sofort: $\boldsymbol{\frac{\omega}{360°} = \frac{r}{s}}$

c **Mantelfläche M**
Wir vergleichen wiederum mit dem ganzen Kreis. $\frac{M}{A_\bigcirc} = \frac{\omega}{360°}$

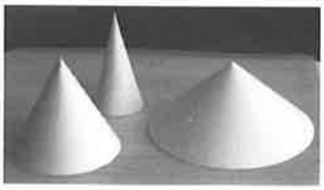
Mit dem Resultat oben folgt sofort: $\frac{M}{A_\bigcirc} = \frac{r}{s}$ bzw. $M = \frac{r}{s} \cdot A_\bigcirc$

Einsetzen von $A_\bigcirc = \pi \cdot s^2$ und Kürzen ergibt: $\boldsymbol{M = \pi rs}$

→

d Zu berechnen: M und V	$s = \sqrt{r^2+h^2}$	$M = \pi \cdot r \cdot s$	$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$
1 r = 8 cm, h = 15 cm	s = 17 cm	**M ≈ 427.26 cm²**	**V ≈ 1005.31 cm³**
2 r = 65 mm, h = 72 mm	s = 97 mm	**M ≈ 19808 mm²**	**V ≈ 318557 mm³**
3 d = 5.6 m, h = 4.5 m, **r = 2.8 m**	s = 5.3 m	**M ≈ 46.62 m²**	**V ≈ 36.95 m³**

J465 **Vorgehen** **a Volumen**: zuerst r berechnen, dann $h = \sqrt{s^2 - r^2}$ und daraus $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$
b Mantelfläche: $M = \pi \cdot r \cdot s$ oder als Teil der Kreisfläche



1 Viertelkreis ω = 90°, s = 10 cm

a r: **mit dem Netzwinkel**

$\frac{r}{s} = \frac{90°}{360°}$

$r = \frac{90°}{360°} \cdot s = \frac{s}{4} = \mathbf{2.5\,cm}$

ohne Netzwinkel

$\left.\begin{array}{l} b = \frac{2\pi \cdot 10\,cm}{4} = \pi \cdot 5\,cm \\ \text{anderseits } b = 2\pi \cdot r \end{array}\right\}$ **r = 2.5 cm**

h: $h = \sqrt{s^2 - r^2} = 9.682\ldots\,cm$

V: $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \approx \mathbf{63.37\,cm^3}$

b M: **mit der Mantelformel**
$M = \pi \cdot r \cdot s \approx \mathbf{78.54\,cm^2}$

als Kreisteil
M = ¼○ = $\pi \cdot s^2 : 4 \approx \mathbf{78.54\,cm^2}$

2 Halbkreis ω = 180°, s = 10 cm

a r: **mit dem Netzwinkel**

$\frac{r}{s} = \frac{180°}{360°}$

$r = \frac{180°}{360°} \cdot s = \frac{s}{2} = \mathbf{5\,cm}$

ohne Netzwinkel

$\left.\begin{array}{l} b = \frac{2\pi \cdot 10\,cm}{2} = \pi \cdot 10\,cm \\ \text{anderseits } b = 2\pi \cdot r \end{array}\right\}$ **r = 5 cm**

h: $h = \sqrt{s^2 - r^2} = 8.660\ldots\,cm$

V: $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \approx \mathbf{226.72\,cm^3}$

b M: **mit der Mantelformel**
$M = \pi \cdot r \cdot s \approx \mathbf{157.08\,cm^2}$

als Kreisteil
M = ½○ = $\pi \cdot s^2 : 2 \approx \mathbf{157.08\,cm^2}$

3 Dreiviertelkreis ω = 270°, s = 10 cm

a r: **mit dem Netzwinkel**

$\frac{r}{s} = \frac{270°}{360°}$

$r = \frac{270°}{360°} \cdot s = \frac{3s}{4} = \mathbf{7.5\,cm}$

ohne Netzwinkel

$\left.\begin{array}{l} b = \frac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 10\,cm = \pi \cdot 15\,cm \\ \text{anderseits } b = 2\pi \cdot r \end{array}\right\}$ **r = 7.5 cm**

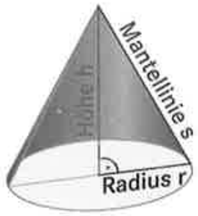
h: $h = \sqrt{s^2 - r^2} = 6.614\ldots\,cm$

V: $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \approx \mathbf{389.62\,cm^3}$

b M: **mit der Mantelformel**
$M = \pi \cdot r \cdot s \approx \mathbf{235.62\,cm^2}$

als Kreisteil
M = ¾○ = $\frac{3}{4} \cdot \pi \cdot s^2 \approx \mathbf{235.62\,cm^2}$

J466 **a** $h = 1.9\,m \qquad d = 2.4\,m \quad \Rightarrow \quad r = 1.2\,m$



Vorgehen: Der Netzwinkel lässt sich mit $\frac{\omega}{360°} = \frac{r}{s}$ berechnen.
Also: zuerst s berechnen.

$s = \sqrt{r^2 + h^2} = 2.247...\,m \qquad \omega = \frac{r}{s} \cdot 360° \approx \mathbf{192.2°}$

b $M = \pi \cdot r \cdot s \approx \mathbf{8.47\,m^2}$

J467 **a** Kopfumfang = $u = 2\pi r = 52\,cm$
Höhe der Kappe = $h = 50\,cm$
Zu berechnen: Abmessungen des Mantels, d.h. Mantellinie **s** und Netzwinkel ω.

$r = 52\,cm : 2\pi = 8.276...\,cm$

$\mathbf{s} = \sqrt{r^2 + h^2} = 50.680...\,cm \approx \mathbf{50.7\,cm}$

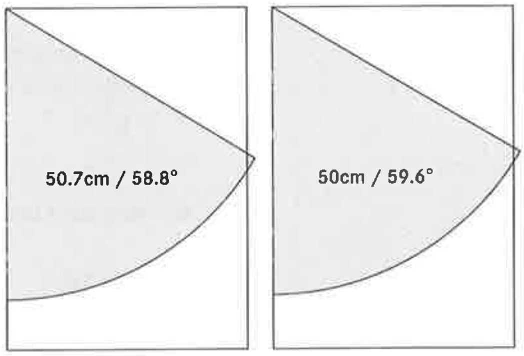
$\frac{\omega}{360°} = \frac{r}{s}$

$\omega = \frac{r}{s} \cdot 360° \approx \mathbf{58.8°}$

Höhe der Kappe
Man könnte sich ebenso gut vorstellen, dass Lea mit «50 cm hoch» meint, die **Mantellinie s** müsse 50 cm sein. Dann ist $\omega \approx \mathbf{59.6°}$

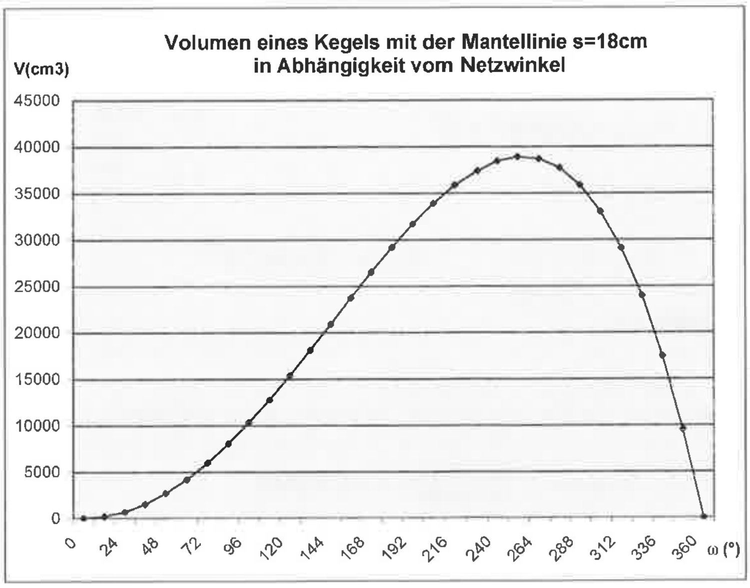
Der Kreissektor für den Mantel hat einen Mittelpunktswinkel von 58.8° und einen Radius von 50.7 cm (bzw. 59.6°, 50 cm).

b Ein A2-Papier hat die Abmessungen 420 mm x 594 mm.
Um Herauszufinden, ob die Grösse des Papiers ausreicht, bleibt nur: ausprobieren oder massstäblich zeichnen.



Lea wird die Kappe aus dem Papier herstellen – obwohl ein kleines Stück fehlt. Sie lässt hinten im Nacken eine kleine «Kerbe» frei oder setzt diese mit Klebestreifen an, falls sie es ganz perfekt will.

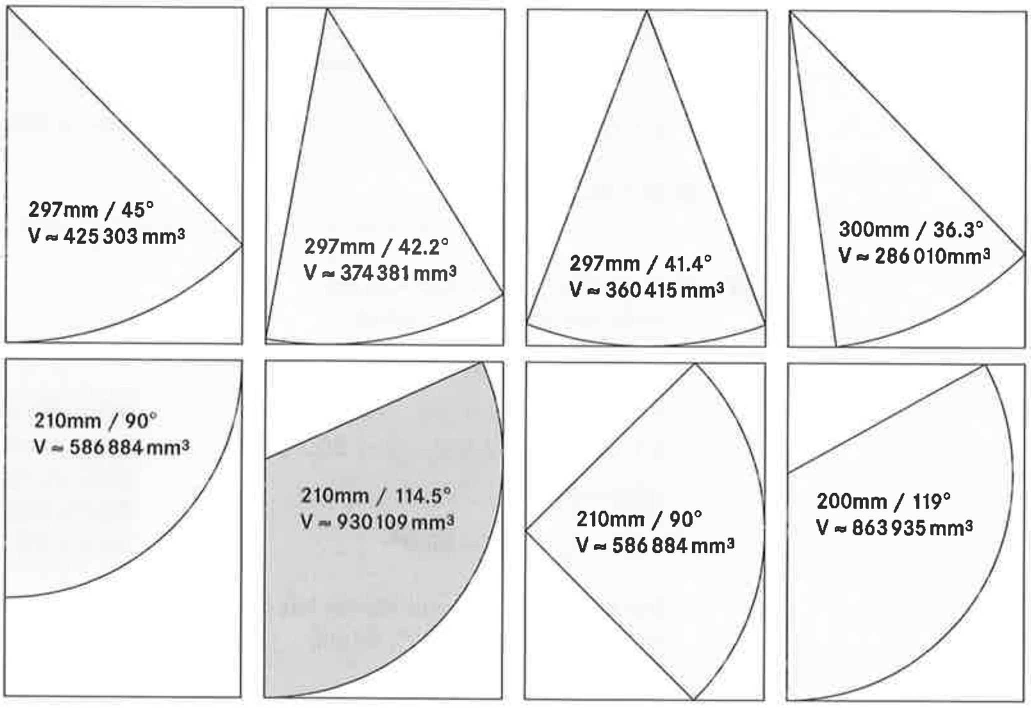
J468 **a** –
b



Winkel a°	Radius r (cm)	Höhe h (cm)	Volumen (cm3)
0	0	458.2051942	0
12	0.6	457.6960773	172.5472103
24	1.2	456.1687267	687.8856528
36	1.8	453.6231423	1539.105762
48	2.4	450.0593241	2714.691594
60	3	445.4772721	4198.52083
72	3.6	439.8769864	5969.864773
84	4.2	433.258467	8003.388347
96	4.8	425.6217137	10269.1501
108	5.4	416.9667267	12732.60221
120	6	407.293506	15354.59046
132	6.6	396.6020514	18091.35428
144	7.2	384.8923631	20894.5267
156	7.8	372.1644411	23711.13439
168	8.4	358.4182852	26483.59763
180	9	343.6538957	29149.73034
192	9.6	327.8712723	31642.74003
204	10.2	311.0704152	33891.22787
216	10.8	293.2513243	35819.18864
228	11.4	274.4139996	37346.01073
240	12	254.5584412	38386.47616
252	12.6	233.684649	38850.76059
264	13.2	211.7926231	38644.43328
276	13.8	188.8823634	37668.45713
288	14.4	164.9538699	35819.18864
300	15	140.0071427	32988.37795
312	15.6	114.0421817	29063.16883
324	16.2	87.0589869	23926.09866
336	16.8	59.05755836	17455.09844
348	17.4	30.03789606	9523.492803
360	18	0	0

Das maximale Volumen ergibt sich offenbar bei einem **Netzwinkel zwischen 240° und 264°**. Von den gewählten Werten liefert 252° das grösste Volumen. Für eine genauere Bestimmung muss eine zweite Tabelle mit feineren Unterteilungen in diesem Bereich erstellt werden.

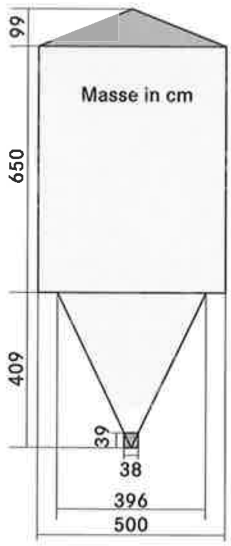
J469 Beispiele und eine durch Ausprobieren gefundene Lösung:



Drei Rechnungsschritte sind jeweils nötig, um das Volumen V aus dem Netzwinkel und der Mantellinie s zu berechnen:

$r = \frac{\omega}{360°} \cdot s$ $\quad$ $h = \sqrt{s^2 - r^2}$ $\quad$ $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$

J470 **a** Gesamtvolumen = Dachkegel + Zylinder + Kegel – Auslassspitze



Dachkegel: $r_{Dach} = 25\,dm$, $h_{Dach} = 9.9\,dm$
$\Rightarrow$ $V_{Dach} = 6\,479.534...\,dm^3$

Zylinder: $r_{Zyl} = 25\,dm$, $h_{Zyl} = 65\,dm$
$\Rightarrow V_{Zyl} = 127\,627.201...\,dm^3$

Kegel: $r_{Kegel} = 19.8\,dm$, $h_{Kegel} = 40.9\,dm$
$\Rightarrow$ $V_{Kegel} = 16\,791.222...\,dm^3$

Spitze: $r_{Spitze} = 1.9\,dm$, $h_{Spitze} = 3.9\,dm$
$\Rightarrow$ $V_{Spitze} = 14.743...\,dm^3$

$V_{Gesamt} = V_{Dach} + V_{Zyl} + V_{Kegel} - V_{Spitze} \approx \mathbf{150\,883\,dm^3}$

Das Gesamtvolumen beträgt **rund 150 m³**

b $V_{gelb} = V_{Zyl} + V_{Kegel} - V_{Spitze} = 144\,403.680...\,dm^3$ $\quad$ Dichte = $2.2\,kg/dm^3$
$m_{Salz} = 144\,403.680... \cdot 2.2\,kg \approx \mathbf{317\,688\,kg}$
Der Silo fasst **rund 318 Tonnen** Salz.

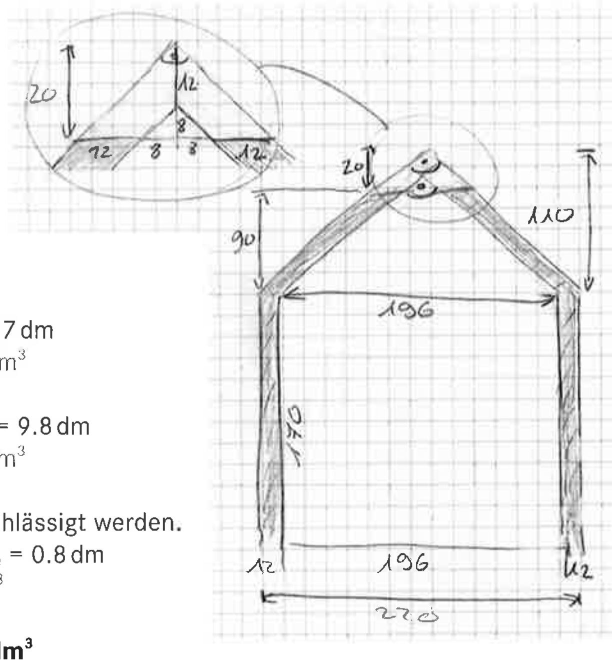
c 125 t = 125 000 kg $\quad$ 125 000 : 2.2 = 56818.181...
Es werden 56 818 dm³ entnommen. Da der Silo voll ist, stammen diese aus dem zylinderförmigen Teil:
$56\,818\,dm^3 = G_{Zyl} \cdot h_{Entnahme} \Rightarrow h_{Entnahme} = \frac{56\,818\,dm^3}{\pi \cdot (25\,dm)^2} \approx \mathbf{28.94\,dm}$

Das Salzniveau sinkt um **rund 2.9 m.**

d 317 688 000 : 5 = 63 537 600 $\quad$ Die Füllung reicht für 63 537 600 m²
63 537 600 m² : 6 m = 10 589 600 m
Mit der gesamten Salzfüllung können **knapp 10 590 km** Strassen enteist werden. Wenn die Strassen breiter als 6 m sind, weniger.

J471 **a** Gesamter Innenraum
= Zylinder + Dachkegel – Spitze

Da der Aussenradius und die Höhe des Dachkegels gleich gross sind, ist dieser im Querschnitt bei der Spitze rechtwinklig.
Damit lässt sich die Höhe des inneren Dachkegels bestimmen.

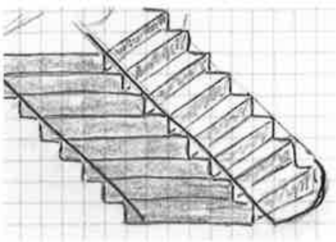


Zylinder: $r_{Zyl} = 9.8\,dm$, $h_{Zyl} = 17\,dm$
$\Rightarrow V_{Zyl} = 5\,129.2...\,dm^3$

Dachkegel: $r_{Dach} = 9.8\,dm$, $h_{Dach} = 9.8\,dm$
$\Rightarrow V_{Dach} = 985.6...\,dm^3$

Spitze: Könnte auch vernachlässigt werden.
$r_{Spitze} = 0.8\,dm$, $h_{Spitze} = 0.8\,dm$
$\Rightarrow V_{Spitze} = 0.5...\,dm^3$

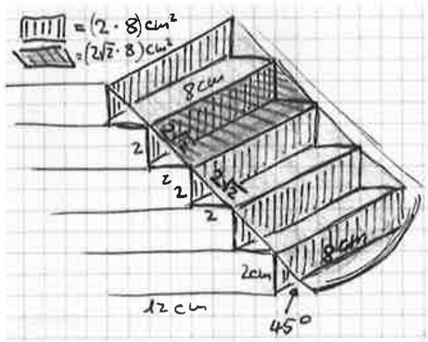
$V_{Innen} = V_{Zyl} + V_{Dach} - V_{Spitze} \approx$ **6 114 dm³**
Der Innenraum des Trullo ist **rund 6 m³** gross.



b **Lösungsidee 1: Mit Hilfe des Mauervolumens**
Vergleicht man das gesamte Volumen der Dachmauer mit dem durchschnittlichen Volumen eines einzelnen Steins, so erhält man die ungefähre Anzahl Steine.

Gesamtes Dachaussenvolumen = Kegel aussen – Spitze aussen
Dachkegel aussen: $r_{Dach\text{-}a} = 11\,dm$, $h_{Dach\text{-}a} = 11\,dm$ $\Rightarrow$ $V_{Dach\text{-}a} = 1\,393.8...\,dm^3$
Spitze aussen: $r_{Spitze\text{-}a} = 2\,dm$, $h_{Spitze\text{-}a} = 2\,dm$ $\Rightarrow$ $V_{Spitze\text{-}a} = 8.3...\,dm^3$
$V_{Aussen} = V_{Dach\text{-}a} - V_{Spitze\text{-}a} \approx$ **1385 dm³**

$V_{Mauer} \approx V_{Aussen} - V_{Innen} = V_{Aussen} - (V_{Dach} - V_{Spitze}) \approx$ **400 dm³**
$V_{Stein} \approx (1.2 \cdot 0.8 \cdot 0.2)\,dm^3 =$ **0.192 dm³**
Anzahl Steine: 400 : 0.192 = 2083.3...
Für das Dach mussten rund **2100 Steine** aufgeschichtet werden.



Lösungsidee 2: Mit Hilfe der Dachoberfläche
Vergleicht man die gesamte Dachfläche mit der durchschnittlichen vertikalen Aussenfläche der einzelnen Steine, so kann man ebenfalls auf die Anzahl Steine schliessen. Man muss dabei allerdings beachten, dass die Steine treppenartig aufgeschichtet sind.

Dachoberfläche = Mantel Kegel – Mantel Spitze
Mantel Kegel $r_{Dach\text{-}a} = 11\,dm$, $h_{Dach\text{-}a} = 11\,dm$
$\Rightarrow$ $s_{Dach\text{-}a} = 11\,dm \cdot \sqrt{2}$ $M_{Dach\text{-}a} = \pi \cdot r_{Dach\text{-}a} \cdot s_{Dach\text{-}a} = 537.58...\,dm^2$

Mantel Spitze $r_{A'Spitze} = 2\,dm$, $h_{A'Spitze} = 2\,dm$
$\Rightarrow$ $s_{Spitze\text{-}a} = 2\,dm \cdot \sqrt{2}$ $M_{Spitze\text{-}a} = \pi \cdot r_{Spitze\text{-}a} \cdot s_{Spitze\text{-}a} = 17.77...\,dm^2$
$S_{Dach} = M_{Dach\text{-}a} - M_{Spitze\text{-}a} \approx$ **520 dm²**

Durchschnittliche vertikale Aussenfläche eines Steins: $0.8\,dm \cdot 0.2\,dm$ = **0.16 dm²**
Zugehörige berechnete Dachfläche: $0.8\,dm \cdot 0.2 \cdot \sqrt{2}\,dm$ = **$0.16 \cdot \sqrt{2}$ dm²**
Anzahl Steine: $520 : (0.16 \cdot \sqrt{2}) = 2298.09...$
Für das Dach mussten rund **2 300 Steine** aufgeschichtet werden.

Unterschied der Resultate
Bei der 2. Methode - der Berechnung mit Hilfe eines Oberflächenvergleichs - ist die Rundung des Daches nicht berücksichtigt. 2300 Steine bräuchte es bei einem ebenen Dach. Beim kegelförmigen haben weniger Steine Platz.

J472 Arbeitsblatt

J473

a $a = 72\,cm$ | $b = 21\,cm$ | $h = 105\,cm$
$s \approx$ **111.5 cm** | $M \approx$ **9 929 cm²** | $V \approx$ **52 920 cm³**

b $s = 90\,mm$ | $h = 45\,mm$
$a = b \approx$ **110.23 mm** | $M \approx$ **15 686 mm²** | $V =$ **182 250 mm³**

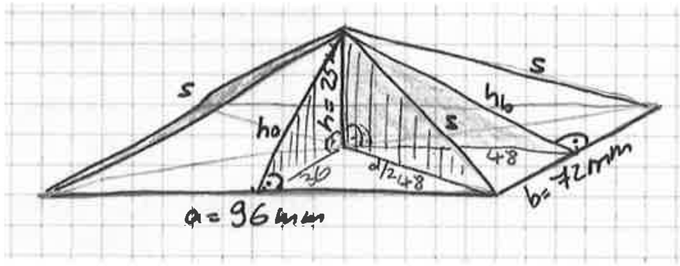
J474

a V = **57 600 mm³**

s = **65 mm**

$h_a = \sqrt{1921}\,mm$
$h_b = \sqrt{2929}\,mm$

$M = 2 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot h_b}{2}$
$\approx$ **8104.26 mm²**

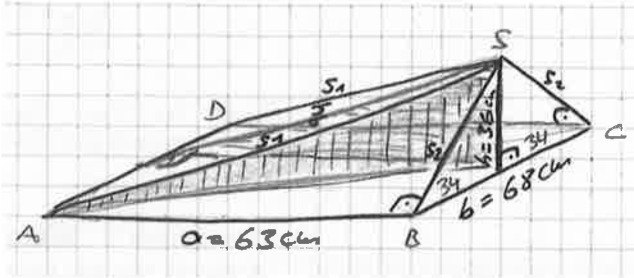


b V = **51 408 cm³**

$s_1 \approx$ **80.13 cm**
$s_2 \approx$ **49.52 cm**

$h_b = \sqrt{5265}\,cm$

$M = 2 \cdot \frac{a \cdot s_2}{2} + \frac{b \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h_b}{2}$
$\approx$ **6810.66 cm²**



J475

a $V_{Pfosten} = V_{Quader} + V_{Pyramide}$
$= 24\,000\,cm^3 + 1600\,cm^3 =$ **25 600 cm³**

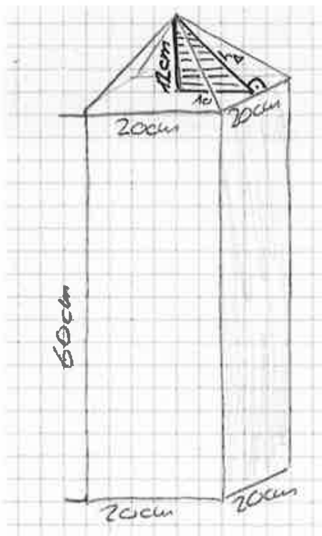
Masse: $25\,600 \cdot 2.3\,g =$ **58.880 kg**
Der Pfosten ist **knapp 59 kg** schwer.

b $h_\triangle = \sqrt{244}\,cm$

Zu streichende Fläche = 4 Rechtecke + 4 Dreiecke
$A_{Poller} = 4 \cdot 20\,cm \cdot 60\,cm + 4 \cdot \frac{20\,cm \cdot h_\triangle}{2}$
$= 5424.819...\,cm^2$

Für 102 Poller:
$A_{Farbe} = 102 \cdot A_{Poller} \approx$ **553 332 cm²**

Es muss Farbe für **ungefähr 55 m²** budgetiert werden.



J476 **Kanten**

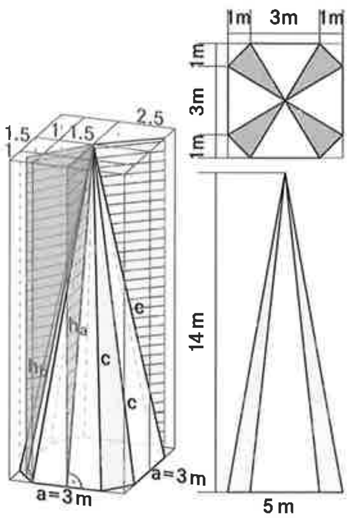
Grundkanten: $a =$ **3 m** $\quad b = \sqrt{2}\,m \approx$ **1.41 m**
Seitenkanten $c = \sqrt{1.5^2 + 2.5^2 + 14^2}\,m \approx$ **14.30 m**

Volumen
Grundfläche $G = 25\,m^2 - 2\,m^2 = 23\,m^2$ $\quad$ Höhe $h = 14\,m$
$V =$ **107 ⅓ m³**

Dachfläche
$h_a = \sqrt{2.5^2 + 14^2}\,m = 14.221...\,m$ $\quad A_a = \frac{a \cdot h_a}{2} = 21.332...\,m^2$

$h_b = \sqrt{2^2 + 2^2 + 14^2}\,m = 14.282...\,m$ $\quad A_b = \frac{b \cdot h_b}{2} = 10.099...\,m^2$

$M_{Dach} = 4A_a + 4A_b =$ **125.73 m²**

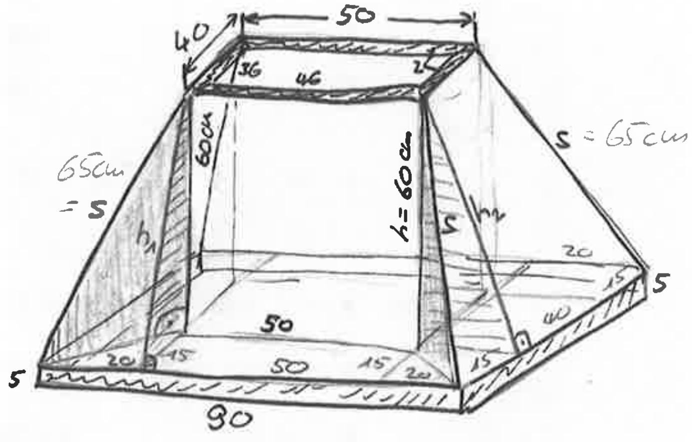


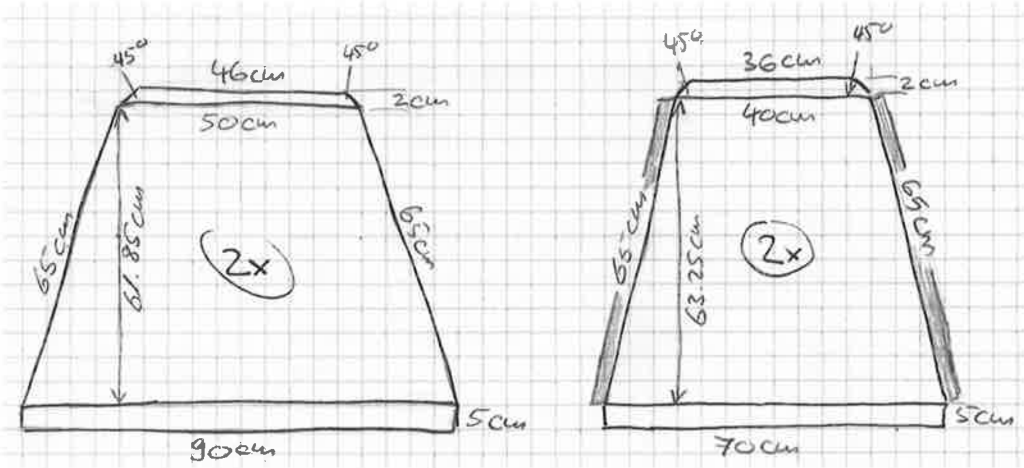
J477 $s = \sqrt{20^2 + 15^2 + 60^2}$ cm
$= \mathbf{65\,cm}$

$h_1 = \sqrt{15^2 + 60^2}$ m $\approx$ **61.85 cm**

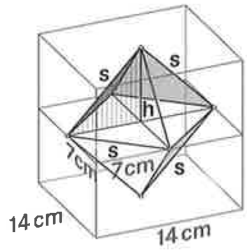
$h_2 = \sqrt{20^2 + 60^2}$ m $\approx$ **63.25 cm**

Es braucht zwei unterschiedliche Paare von Blechstücken. Je nach Machart des Kamindachs müssen bei der einen Sorte an den Seitenkanten noch «Nahtzugaben» gemacht werden.



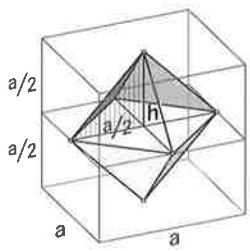


J478 **Kanten**
Die einbeschriebenen Doppelpyramide hat lauter gleich lange Kanten. $s = 7\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} \approx \mathbf{9.90\,cm}$



Volumen
Grundfläche = Halbe Würfelfläche $G = 98\,\text{cm}^2$
Höhe = halbe Würfelhöhe $h = 7\,\text{cm}$
$V = 2 \cdot 98\,\text{cm}^2 \cdot 7\,\text{cm} : 3 = \mathbf{457\tfrac{1}{3}\,cm^3}$

J479 **Volumen**

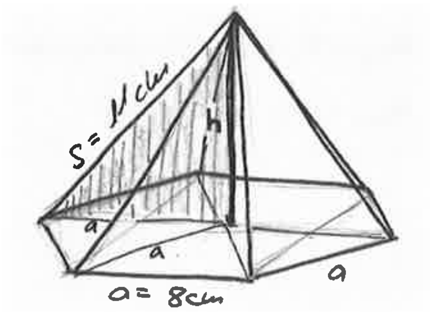


Grundfläche = Halbe Würfelfläche $\mathbf{G = \frac{a^2}{2}}$

Höhe = halbe Würfelhöhe $\mathbf{h = \frac{a}{2}}$

$\mathbf{V} = 2 \cdot G \cdot h : 3 = \mathbf{\frac{a^3}{6}}$

J480



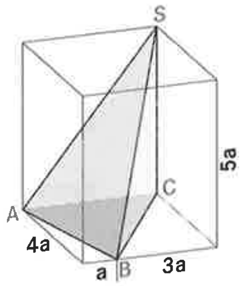
$h = \sqrt{11^2 - 8^2}$ cm $\approx$ **7.55 cm**

J481 **AB** = $a\sqrt{17}$ | **AS** = $a\sqrt{41}$

BC = **5a** | **BS** = $a\sqrt{50}$

AC = **4a** | **CS** = **5a**

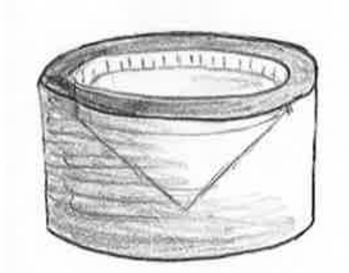
$G = 8a^2$ $\quad h = 5a$ $\quad$ $\mathbf{V = \frac{40}{3}\,a^3}$



J482

a $r = 2.7\,\text{cm}$	$h = 5.9\,\text{cm}$	$\mathbf{s \approx 6.49\,cm}$	$\mathbf{V \approx 45.04\,cm^3}$
b $\mathbf{r = 68.93\,mm}$	$h = 123\,\text{mm}$	$s = 141\,\text{mm}$	$\mathbf{V \approx 612\,083\,mm^3}$
c $r = 8.5\,\text{cm}$	$\mathbf{h \approx 15.86\,cm}$	$\mathbf{s \approx 18.00\,cm}$	$V = 1.2\,\text{dm}^3 = 1\,200\,\text{cm}^3$

J483 **Drehkörper = Grosser Zylinder – Innenzylinder – Kegel**



Gr. Zylinder $\quad r = 65\,\text{mm},\ h = 75\,\text{mm}$

$V_{ganz} = 995492.1\ldots\,\text{mm}^3$

Innenzylinder $\quad r = 50\,\text{mm},\ h = 15\,\text{mm}$

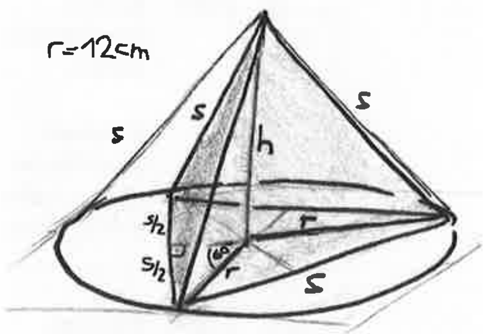
$V_{innen} = 117\,809.7\ldots\,\text{mm}^3$

Kegel $\quad r = 50\,\text{mm},\ h = 40\,\text{mm}$

$V_{Kegel} = 104\,719.7\ldots\,\text{mm}^3$

Drehkörper $\quad V_{\text{Drehkörper}} = V_{ganz} - V_{innen} - V_{Kegel} \approx \mathbf{772\,963\,mm^3}$

J484 **a** Es genügt, die Grundflächen zu vergleichen:



Kegel: $\quad G_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r^2 = \mathbf{144\pi\ cm^2}$

Tetraeder: $\quad \frac{s}{2} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{3}$

$\Rightarrow\ s = r\sqrt{3} = 20.784\ldots\,\text{cm}$

$G_{\text{Tetra}} = \frac{s^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3r^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

$= \mathbf{108\sqrt{3}\ cm^2}$

$\frac{G_{\text{Tetra}}}{G_{\text{Kegel}}} = 0.41349\ldots \approx \mathbf{41.35\,\%}$

Das Tetraeder füllt **rund 2/5** des Kegels aus.

b **Höhe:** $\mathbf{h} = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2} \approx \mathbf{16.97\,cm}$

c **Mantel Kegel:** $\quad M_{\text{Kegel}} = \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot r^2\sqrt{3} \approx \mathbf{783.56\,cm^2}$

Mantel Tetraeder: $\quad M_{\text{Tetra}} = 3 \cdot G_{\text{Tetra}} \approx \mathbf{561.18\,cm^2}$