H Kreiskonstruktionen

H1 Kreise schneiden und berühren

H11 Mögliche Erkenntnisse:
- Schneiden sich Kreise, so liegen die beiden Schnittpunkte symmetrisch bezüglich der Verbindungsgeraden der beiden Kreismittelpunkte.
- Berühren sich zwei Kreise, so liegen die beiden Kreismittelpunkte und der Berührungspunkt auf einer Geraden.
- Zwei Kreise haben dann Schnittpunkte, wenn der Abstand der beiden Kreismittelpunkte kleiner ist als die Summe der beiden Radien. Ist der Abstand gleich der Summe der beiden Radien, so berühren sich die Kreise, ist er grösser, so gibt es keine Schnittpunkte.

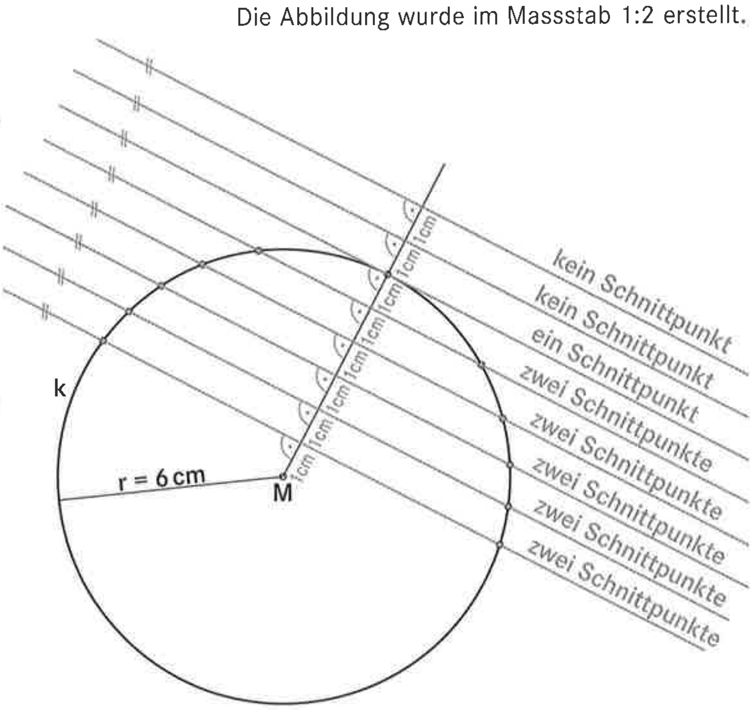
H12 **a** Eine Gerade hat zwei, einen oder gar keinen Schnittpunkt mit einem Kreis.

b Ist der Abstand vom Kreismittelpunkt kleiner als der Radius, dann schneidet die Gerade den Kreis in zwei Punkten.

Ist der Abstand gleich dem Radius, dann hat die Gerade mit dem Kreis nur einen Punkt gemeinsam.

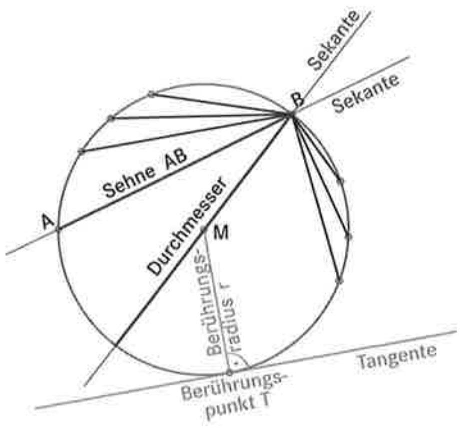
Ist der Abstand grösser als der Kreisradius, so gibt es gar keinen Schnittpunkt.

Die Abbildung wurde im Massstab 1:2 erstellt.



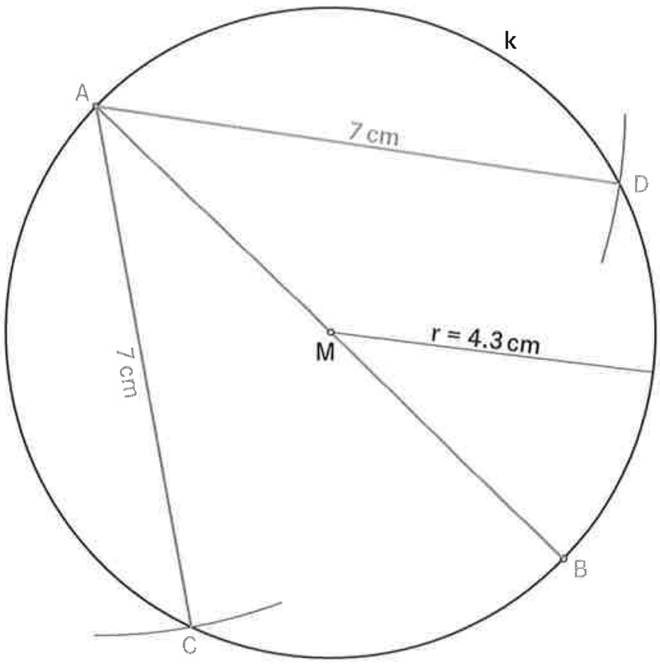
H13 **a** falsch — Richtig wäre beispielsweise: Jede Sekante enthält eine Sehne. Jede Sehne liegt auf einer Sekante.

b richtig
c richtig
d richtig
e richtig
f richtig
g falsch — Richtig wäre beispielsweise: In jedem Kreispunkt gibt es genau eine Tangente.
h richtig — Der Kreisdurchmesser ist nämlich die längste Sehne.
i richtig — Sie steht senkrecht auf dem Berührungsradius.

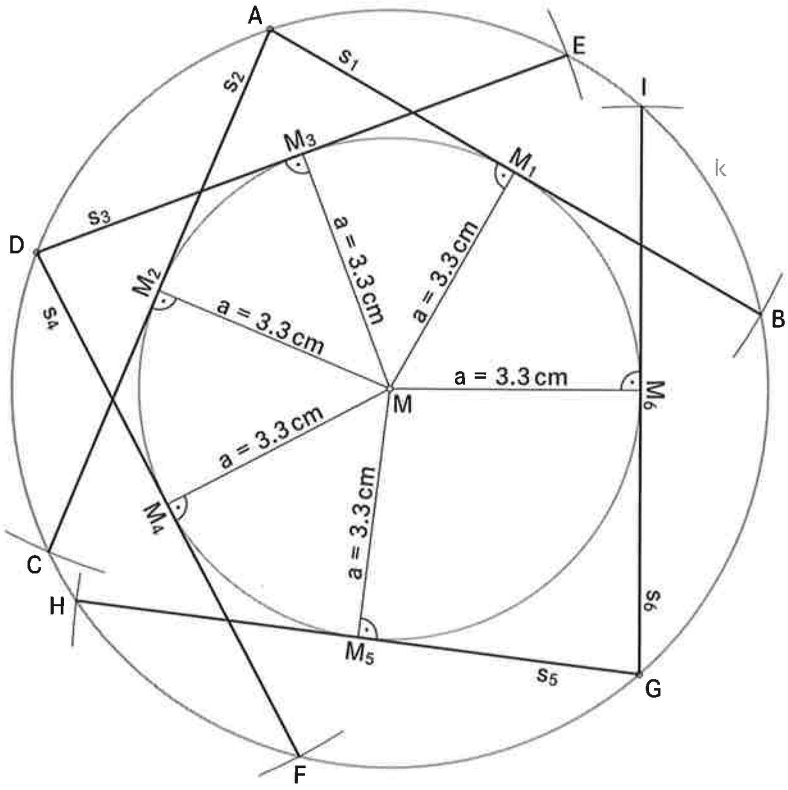


H14 a Es gibt zwei Sehnen der Länge 7 cm, die A als Endpunkt haben: AC und AD

b Die längste Sehne AB verläuft durch den Mittelpunkt M. Sie ist ein Durchmesser. Ihre Länge ist 8.6 cm.



H15



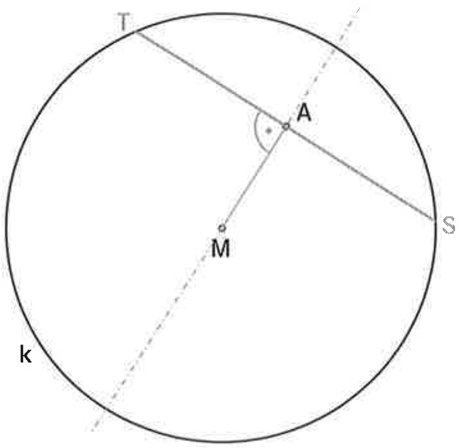
a AB = s_1 = 7.5 cm
AC = s_2 = 7.5 cm
DE = s_3 = 7.5 cm
DF = s_4 = 7.5 cm
GH = s_5 = 7.5 cm
GI = s_6 = 7.5 cm

b Alle Sehnen haben 3.3 cm Abstand vom Kreismittelpunkt M.

c Die Sehnenmittelpunkte M_1 bis M_6 liegen auf einem Kreis um M mit dem Radius a = 3.3 cm.

H16 Es gibt nur eine einzige Sehne ST, die in A ihren Mittelpunkt hat. Sie steht senkrecht auf MA.

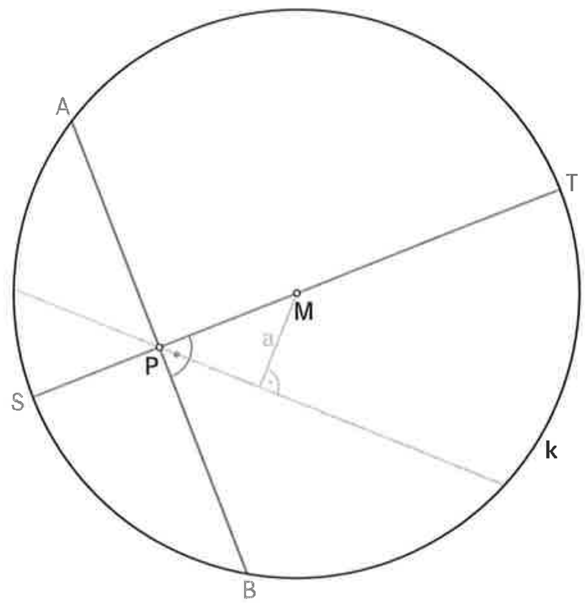
Die Verbindungsgerade von M und A ist Symmetrieachse.



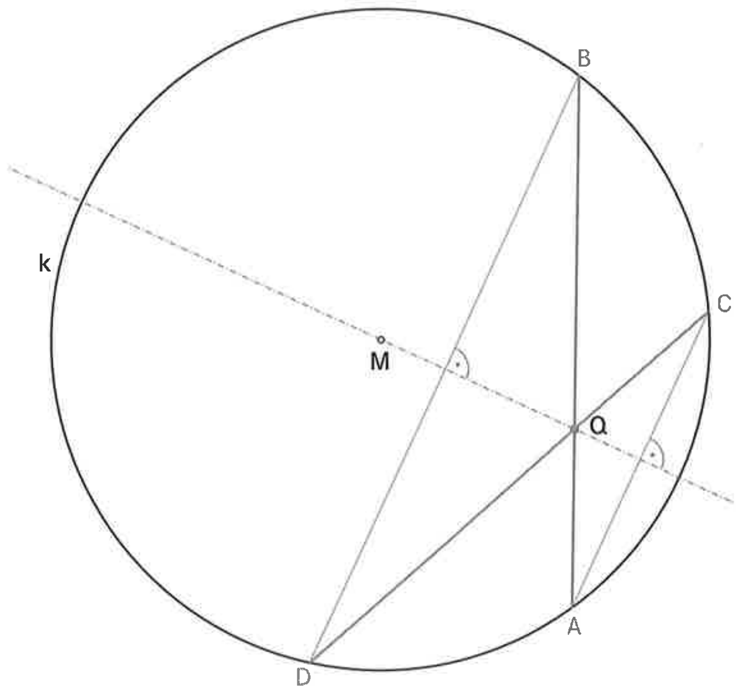
H17 **a** Die längste Sehne, die durch P verläuft ist der Durchmesser ST.

b Die kürzeste Sehne, die P enthält, steht senkrecht auf ST. Sie wird von P halbiert.

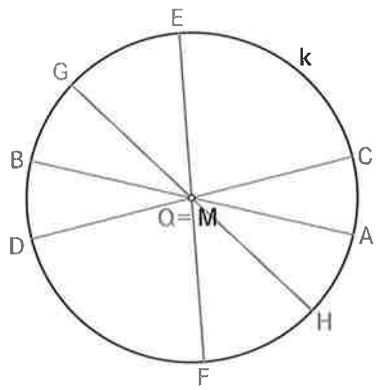
Begründung:
Je kleiner der Abstand a einer Sehne von M ist, umso länger ist sie.
PM ist der grösstmögliche Abstand einer Sehne durch P.
Er kommt dann zum Zug, wenn die Sehne senkrecht darauf steht.



H18 **a** Zwei gleich lange Sehnen AB und CD erhält man, indem man eine Sehne AB durch Q einzeichnet und diese dann an der Spiegelachse (MQ) spiegelt
→ CD.



b

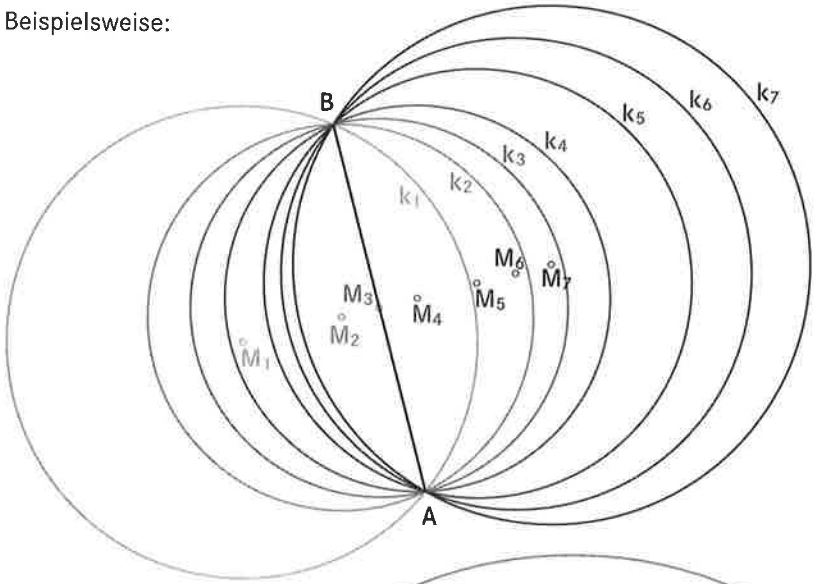


Bei einer allgemeinen Lage von Q – irgendwo im Kreisinneren wie vorgegeben – gibt es nur eine einzige Sehne, die halbiert wird. AB und CD würden gewissermassen zusammenfallen.

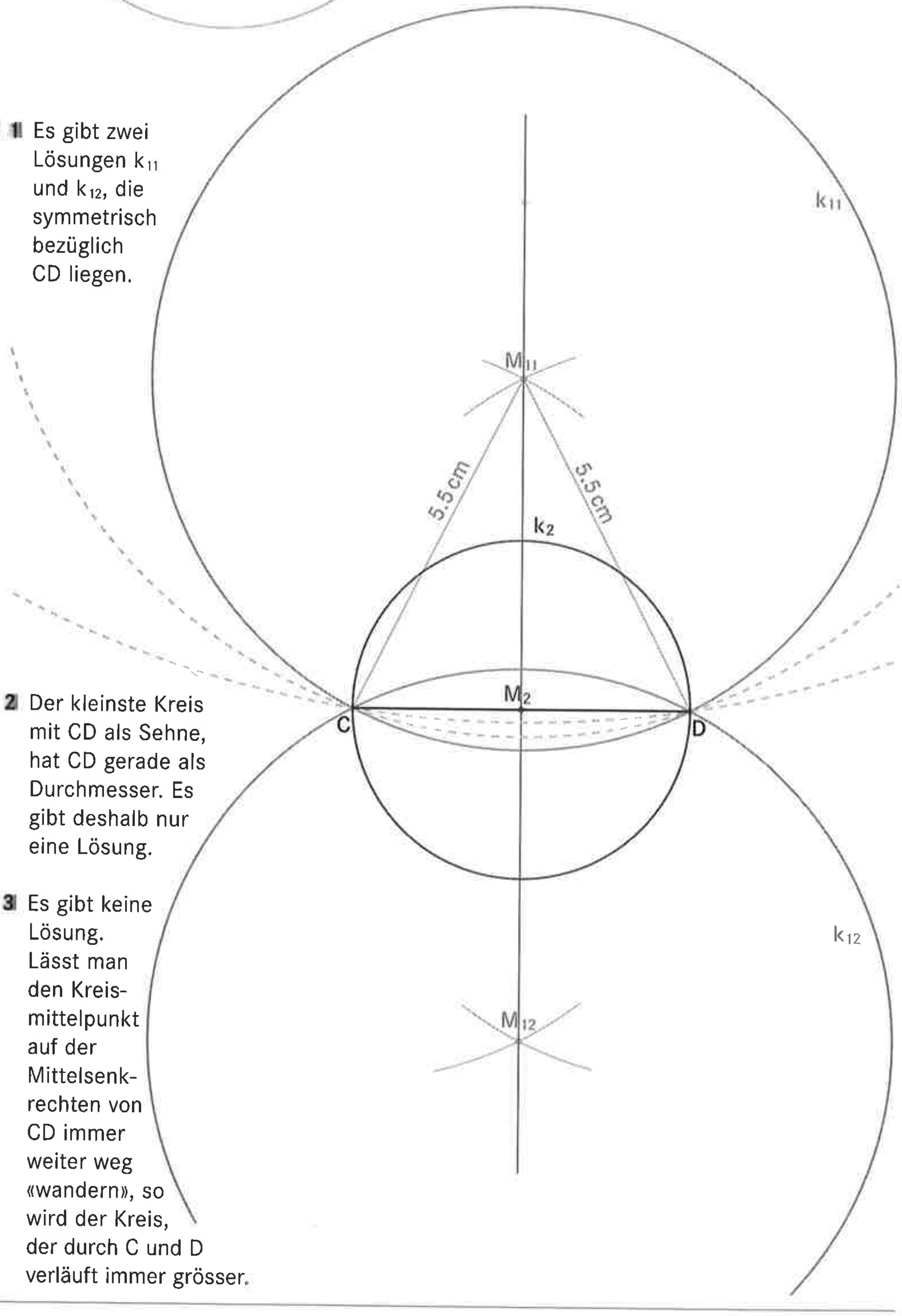
Verschiedene Sehnen, die von Q halbiert werden, gibt es nur, falls Q im **Kreismittelpunkt M** liegt. Dann ist jede beliebige Sehne durch Q Durchmesser und wird von Q halbiert.

Fehlerhinweis:
In der 1. Auflage des Aufgabenbuches hat sich leider bei dieser Aufgabe ein Fehler eingeschlichen.
In **a** sollte es heissen:
..., die AB als Sehne haben.

H19 **a** Beispielsweise:



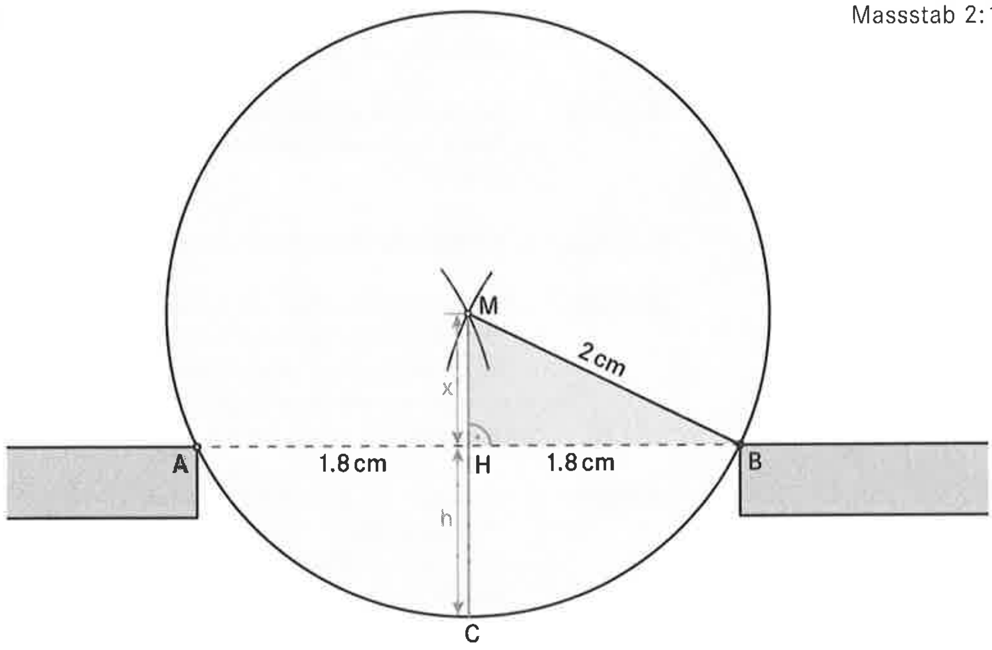
b **1** Es gibt zwei Lösungen k_{11} und k_{12}, die symmetrisch bezüglich CD liegen.



2 Der kleinste Kreis mit CD als Sehne, hat CD gerade als Durchmesser. Es gibt deshalb nur eine Lösung.

3 Es gibt keine Lösung. Lässt man den Kreismittelpunkt auf der Mittelsenkrechten von CD immer weiter weg «wandern», so wird der Kreis, der durch C und D verläuft immer grösser.

H110 **a** Massstab 2:1



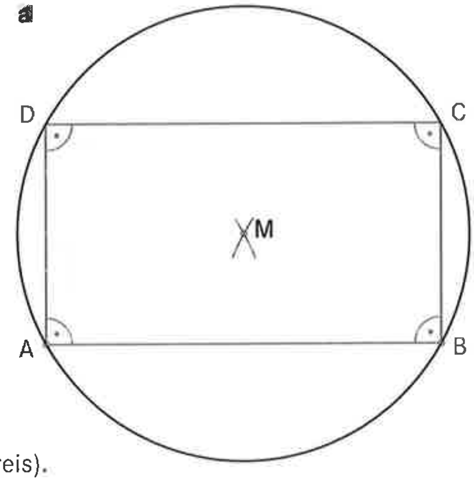
b h = HC gibt an, wie tief die Kugel unter den Lochdurchmesser AB versunken ist.
CM ist der Kugelradius. Es gilt demnach: $h + x = CM = 2\,\text{cm}$
x lässt sich im rechtwinkligen Dreieck HBM mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen:

$x = \sqrt{MB^2 - HB^2} = \sqrt{2^2 - 1.8^2}\,\text{cm} = 0.871779... \approx 0.87\,\text{cm}$
$\mathbf{h} = CM - x \approx \mathbf{1.13\,cm}$

Die Kugel ist 1.13 cm tief im Loch versunken.

H111 Die Abbildungen sind im Massstab 1:2 gedruckt.

a

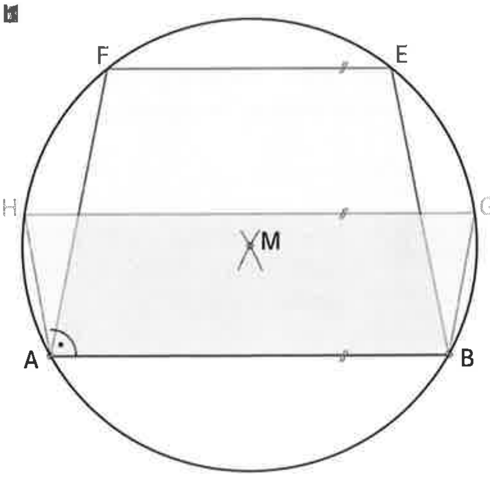


a Es gibt nur eine Lösung.
Das Rechteck entsteht, indem man in A und in B je eine zu AB senkrecht stehende Sehne einzeichnet.

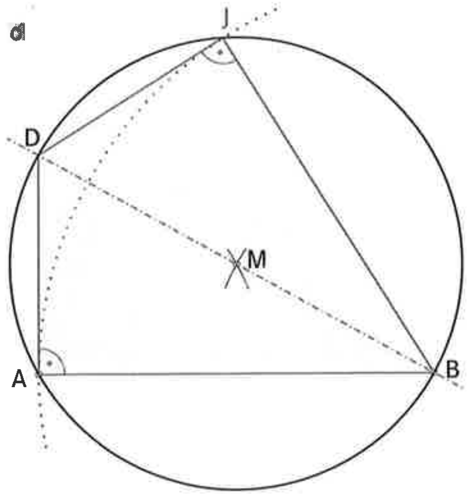
b Es gibt unendlich viele Lösungen. Man kann irgendeine zu AB parallele Sehne wählen.

c Die Sehne AB lässt sich auch zu einem Drachenviereck ergänzen: Man wählt dazu die zweite gleich lange Sehne von A oder B aus und ergänzt symmetrisch bezüglich der Achse.
Das Drachenviereck wird rechtwinklig (Thaleskreis).

b



c

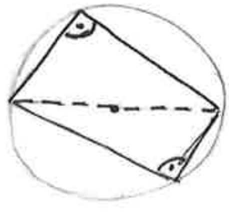


H112 **a** falsch Bei einem allgemeinen Rhomboid beispielsweise, lässt sich kein Umkreis zeichnen.

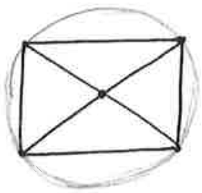
b richtig Der Umkreis geht definitionsgemäss durch alle Ecken. Die Seiten werden damit automatisch zu Sehnen.

c richtig Jedes Quadrat hat einen Umkreis.

d richtig Wenn ein Winkel 90° ist, so ist der Umkreis ein Thaleskreis und die eine Diagonale ein Durchmesser. Der Winkel auf der andern Seite des Durchmessers ist dann automatisch auch ein 90°-Winkel (ausführlichere Begründung **H118** ff).

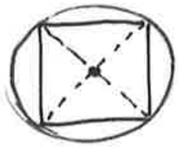


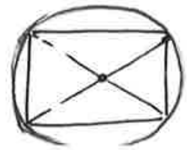
e falsch Das kann, muss aber nicht sein.
Die Diagonalen in einem Rechteck halbieren sich – und ein Rechteck ist immer ein Sehnenviereck.



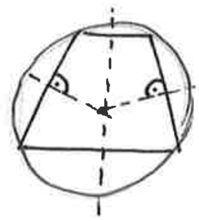
H113 **a** Quadrat, Rechteck und gleichschenkliges Trapez sind immer Sehnenvierecke.

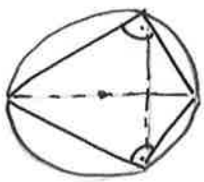
Bei einem Quadrat und einem Rechteck halbieren sich die Diagonalen gegenseitig.
Der Diagonalenschnittpunkt ist somit Umkreismittelpunkt, das Viereck ein Sehnenviereck.





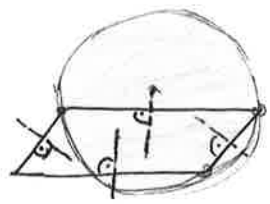
Ein gleichschenkliges Trapez ist achsensymmetrisch mit der Mittelsenkrechten der beiden Parallelseiten als Achse.
Die Mittelsenkrechten der beiden Schenkel schneiden sich auf der Achse. Der Schnittpunkt ist Umkreismittelpunkt, das Trapez somit ein Sehnenviereck.



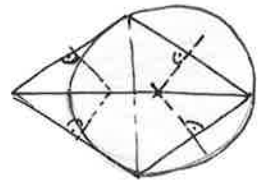


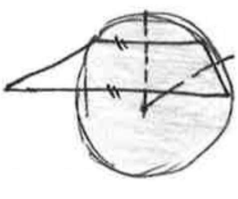
Ein spezielles Drachenviereck mit zwei rechten Winkeln ist ebenfalls Sehnenviereck. Wegen der rechten Winkel ist die Achse Durchmesser in einem Thaleskreis, der zugleich Umkreis ist.

b Ein allgemeines Rhomboid kann nicht Sehnenviereck sein: Die Mittelsenkrechten schneiden sich nicht in einem Punkt, es gibt keinen Umkreis.

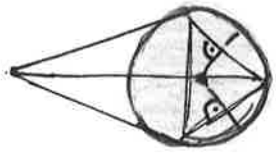


Ein (allgemeiner) Rhombus kann aus dem gleichen Grund wie das allgemeine Rhomboid nicht Sehnenviereck sein.



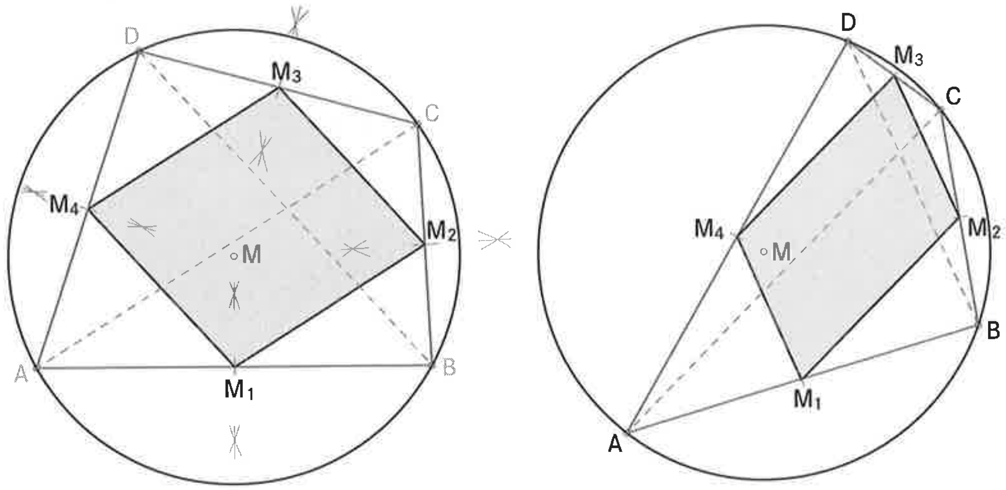


Ein allgemeines (nicht gleichschenkliges) Trapez hat auch keinen Umkreis.



Dasselbe gilt für ein nicht rechtwinkliges Drachenviereck.

H114 **a** Zwei Beispiele:



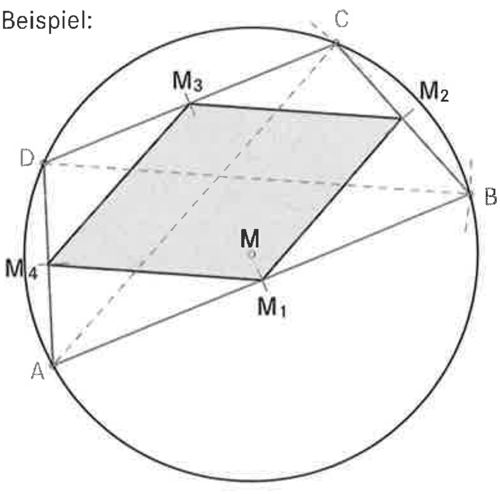
Die Wahl des Sehnenvierecks ist bei dieser Aufgabe entscheidend. Bei den meisten Sehnenvierecken entsteht beim Mittenviereck – von Auge gesehen – der Eindruck, es handle sich um einen Rhombus. Durch genaues Nachmessen (Beispiel links: 2.8 cm und 3 cm), Überlegen (siehe **b**) oder anhand eines extremen Beispiels (rechts) erkennt man, dass es sich im Allgemeinen nur um ein allgemeines **Rhomboid** handelt.

b Falls bei deiner Figur tatsächlich ein Rhombus entstanden ist, so ist dies Zufall.
Ein allgemeines Rhomboid entsteht immer. Dies wird ersichtlich, wenn man die Diagonalen AC und BD des Sehnenvierecks ABCD einzeichnet:

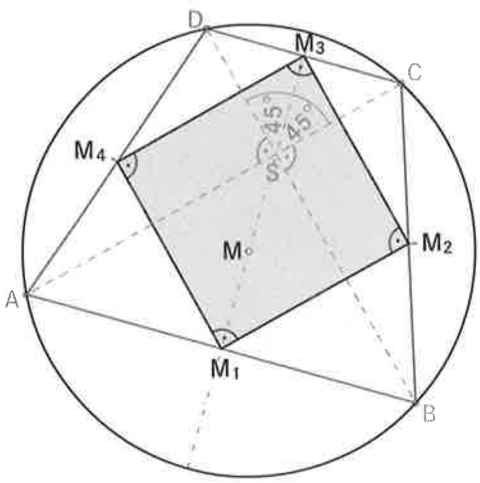
- M_1M_2 ist dann Mittellinie im Dreieck ABC und somit parallel zu AC und halb so lang.
  M_3M_4 ist Mittellinie im Dreieck ACD und somit ebenfalls parallel zu AC und halb so lang.
  $M_1M_2 \parallel AC \parallel M_3M_4$ $\qquad M_1M_2 = \frac{AC}{2} = M_3M_4$

- M_1M_4 ist dann Mittellinie im Dreieck ABD und somit parallel zu BD und halb so lang.
  M_2M_3 ist Mittellinie im Dreieck BCD und somit ebenfalls parallel zu BD und halb so lang.
  $M_1M_4 \parallel BD \parallel M_2M_3$ $\qquad M_1M_4 = \frac{BD}{2} = M_2M_3$

H115 **a** Beispiel:



Ein Rhombus hat vier gleich lange Seiten. Gemäss **H114 b** müssen somit die beiden Diagonalen AC und BD des zu zeichnenden Sehnenvierecks ABCD gleich lang sein.
→ Wähle zwei gleich lange Sehnen AC und BD.
oder:
→ Zeichne direkt die beiden parallelen Seiten eines gleichschenkligen Trapezes ABCD.



b Bei einem Quadrat stehen die Seiten zusätzlich rechtwinklig zueinander.
→ Wähle zwei gleich lange Sehnen AC und BD, die rechtwinklig zueinander stehen.
Am einfachsten ist es, dazu den Diagonalenschnittpunkt S zu wählen und die beiden Sehnen im 45°-Winkel zur Achse anzutragen.

H116 **a** Am einfachsten lassen sich die beiden Kreise k_1 und k_2 mit Hilfe des gleichseitigen Dreiecks AM_2B oder M_1AB zeichnen.

b S ist Mitte von M_1M_2. SM_2 ist Höhe im gleichseitigen Dreieck AM_2B. Mit dem Satz von Pythagoras gilt:

$SM_2 = \frac{r_2}{2} \cdot \sqrt{3}$

$= 2.5\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} = 4.330127... \approx 4.33\,\text{cm}$

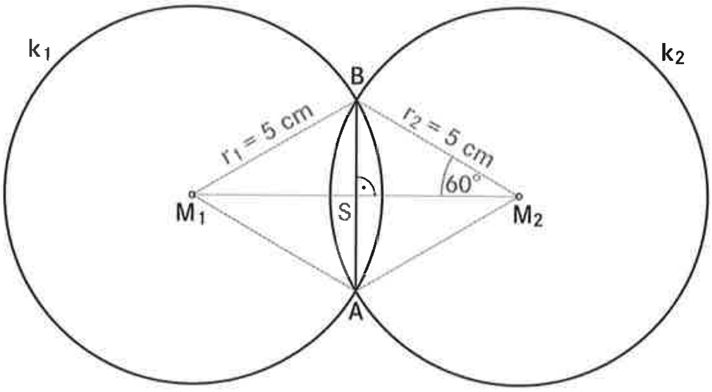


Abbildung im Massstab 1:2

$M_1M_2 = 2 \cdot SM_2 = r_2 \cdot \sqrt{3} \approx \mathbf{8.66\,cm}$

H117 **a** S ist Mitte von M_1M_2 und von AB. SB ist Höhe im gleichseitigen Dreieck M_1M_2B. Mit dem Satz von Pythagoras gilt:

$SB = \frac{r_2}{2} \cdot \sqrt{3}$

$= 3\,\text{cm} \cdot \sqrt{3}$

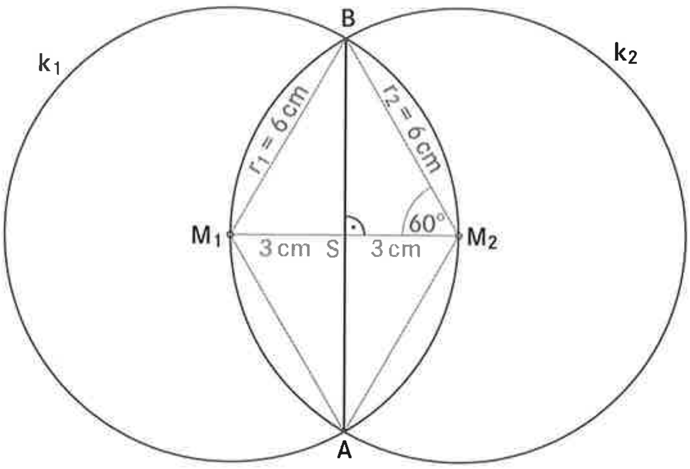
$= 5.19615...$

$\approx 5.20\,\text{cm}$

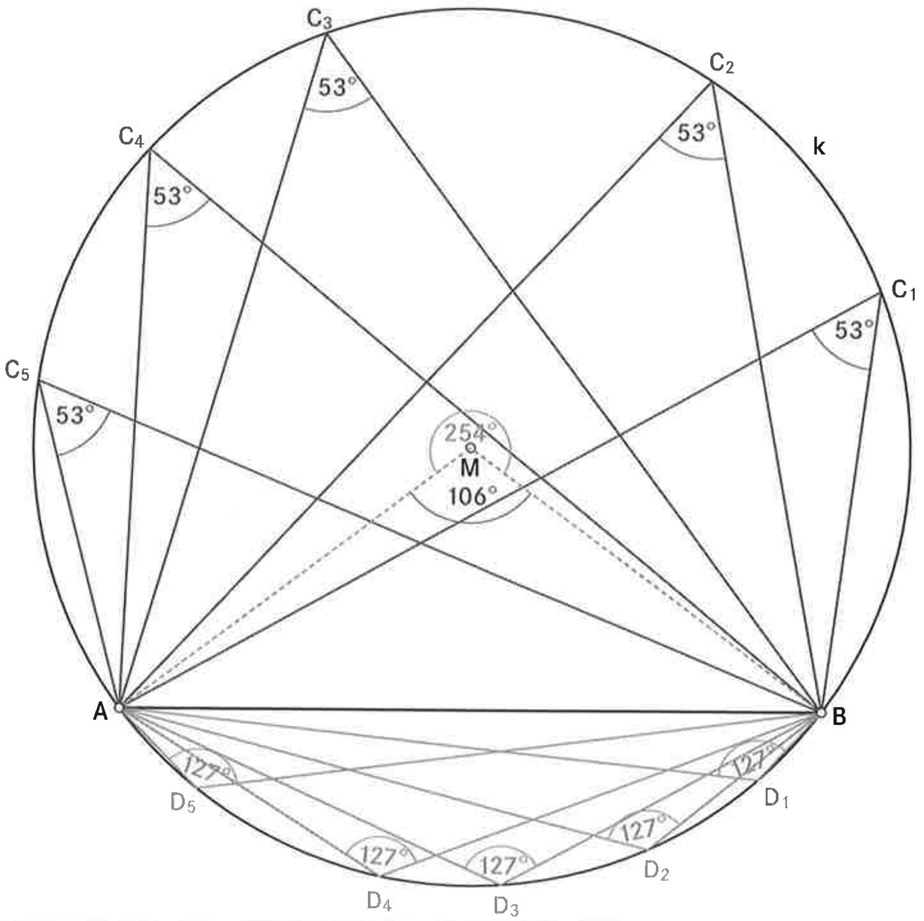
$AB = 2 \cdot SB = r_2 \cdot \sqrt{3}$

$\approx \mathbf{10.39\,cm}$

b Abbildung im Massstab 1:2

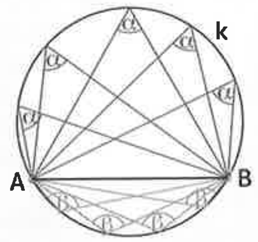


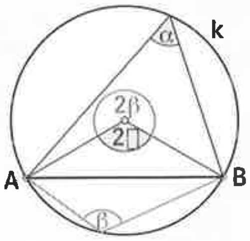
H118 **a**, **b**



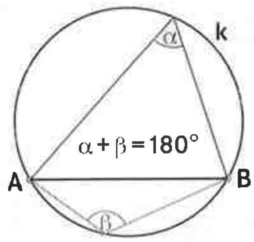
Sätze zu Peripherie- und Zentriwinkel

Alle Peripheriewinkel, die auf der gleichen Seite einer Sehne liegen, sind gleich gross. (Peripheriewinkelsatz)



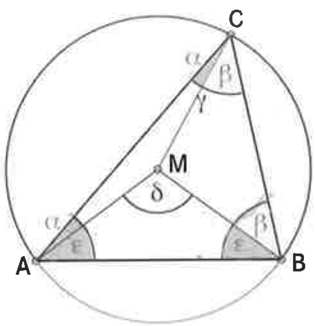


Der Zentriwinkel ist doppelt so gross wie der zugehörige Peripheriewinkel. (Peripherie-Zentriwinkelsatz)



Zwei Peripheriewinkel, die auf verschiedenen Seiten einer Sehne liegen, ergänzen sich zu 180°.

H119 **a** **Peripherie- und Zentriwinkel auf der gleichen Seite der Sehne:**
Die Dreiecke ABM, BCM und CAM sind alle **gleichschenklig**. Sie haben deshalb jeweils zwei gleich grosse Basiswinkel ε, β oder α.



Mit diesen Winkelbezeichnungen gilt:

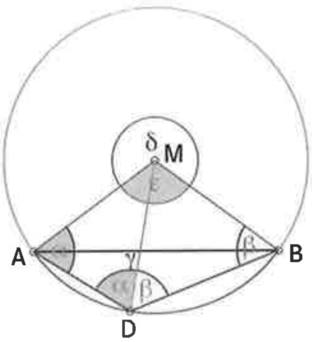
Peripheriewinkel $\gamma = \alpha + \beta$

Winkelsumme im Dreieck ABC: $2\alpha + 2\beta + 2\varepsilon = 180°$
Mit $\gamma = \alpha + \beta$ folgt: $2\gamma + 2\varepsilon = 180°$

Winkelsumme im Dreieck ABM: $\delta + 2\varepsilon = 180°$

$\rightarrow$ **$\delta = 2\gamma$**

Peripherie- und Zentriwinkel auf verschiedenen Seiten der Sehne:
Die Dreiecke ADM, DBM sind **gleichschenklig**.
Sie haben jeweils zwei gleich grosse Basiswinkel α oder β.



Mit diesen Winkelbezeichnungen gilt:

Peripheriewinkel $\gamma = \alpha + \beta$

Winkelsumme im Viereck ADBM: $2\alpha + 2\beta + \varepsilon = 360°$
Mit $\gamma = \alpha + \beta$ folgt: $2\gamma + \varepsilon = 360°$

Weiter gilt: $\delta + \varepsilon = 360°$

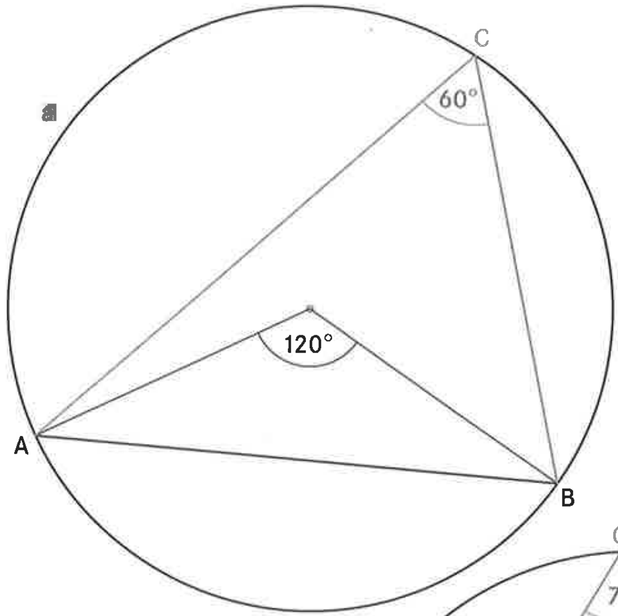
$\rightarrow$ **$\delta = 2\gamma$**

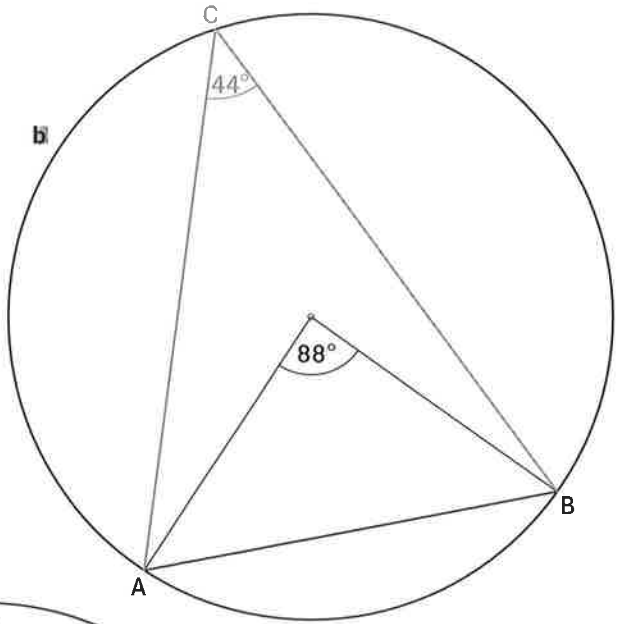
b Der **Peripheriewinkelsatz** folgt direkt aus dem obigen Beweis, weil alle Peripheriewinkel, die auf der gleichen Seite der Sehne liegen, denselben zugehörigen Zentriwinkel haben.

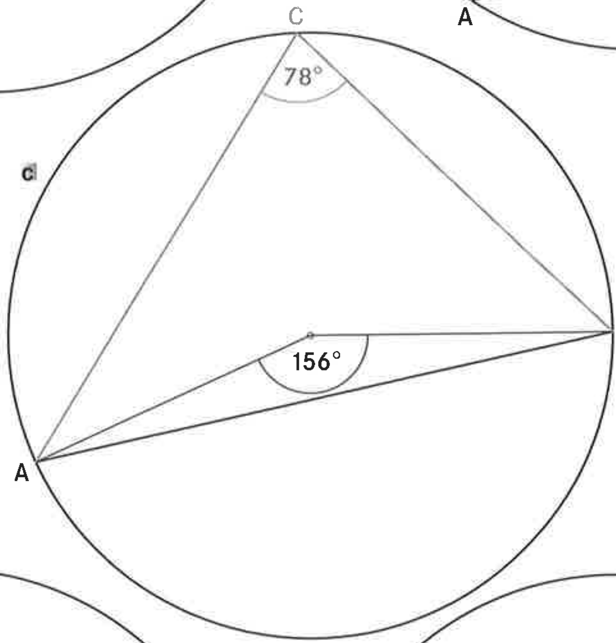
H120 Am einfachsten geht es, wenn du jeweils
- einen Zentriwinkel der doppelten Grösse einzeichnest und
- in den Schnittpunkten die zugehörige Sehne AB markierst.
- Jetzt kannst du einen beliebigen Peripheriewinkel über der Sehne AB einzeichnen. Achte darauf, dass er auf der richtigen Seite der Sehne liegt.

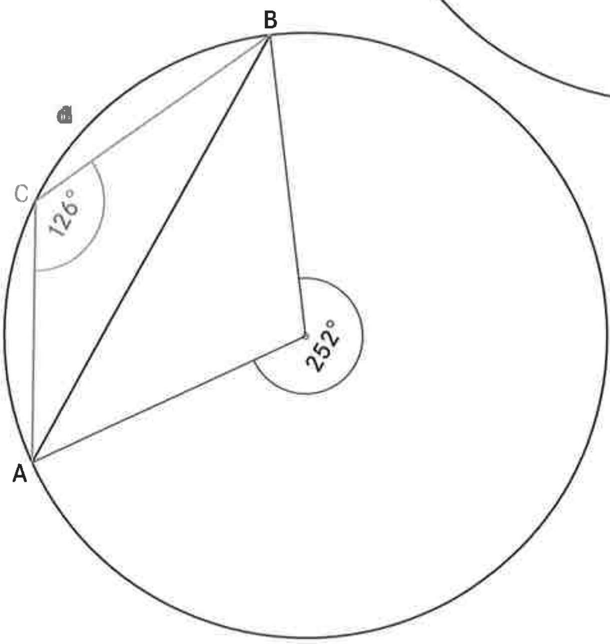
Überprüfe die Grösse des Peripheriewinkels von Auge – und allenfalls durch Nachmessen.

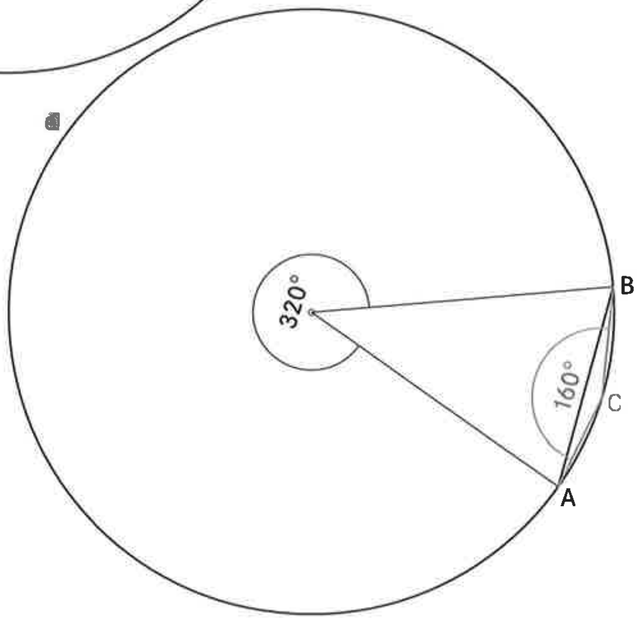
Beispiele:



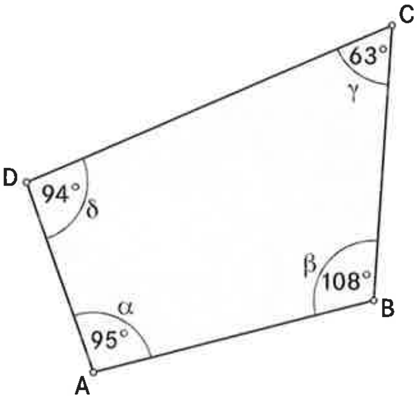


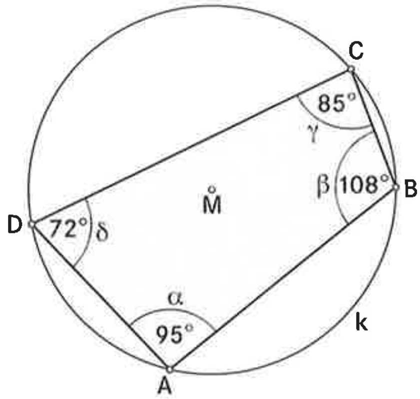






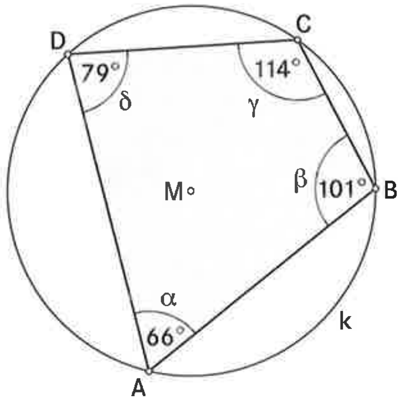
H121 **a**





In einem allgemeinen Viereck beträgt die Summe aller Innenwinkel 360°.
Es gibt keine weitere allgemein gültige Aussage über die Winkel.

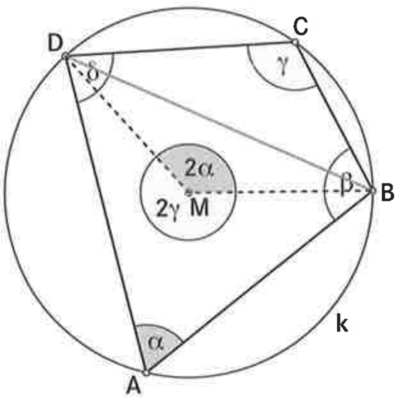
In einem Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Winkel immer zu 180°.
$\alpha + \gamma = 180°$ $\beta + \delta = 180°$

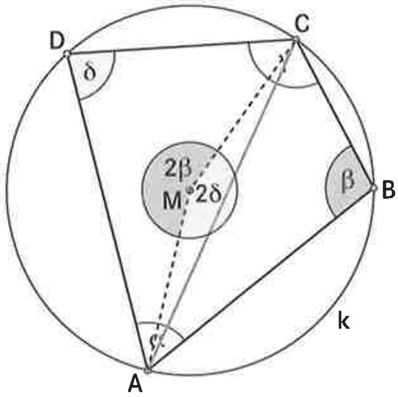


b Der Beweis der obigen Aussage geht direkt auf den Peripherie-Zentriwinkelsatz zurück:

α und γ sind Peripheriewinkel über derselben Sehne BD.
Die zugehörigen Zentriwinkel ergänzen sich zu 360°: $2\alpha + 2\gamma = 360°$
Daraus folgt sofort: $\alpha + \gamma = 180°$

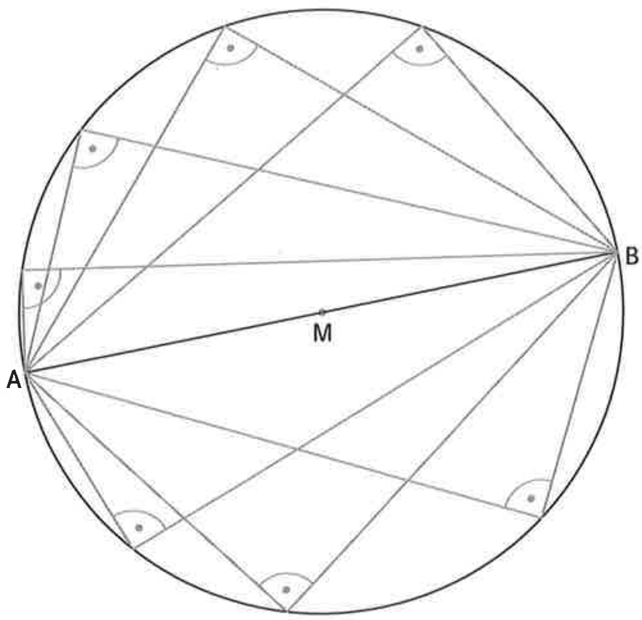
Analoges gilt für die beiden andern Winkel β und δ. Die zugehörige Sehne ist AC.





H122 **a** Damit die Peripheriewinkel rechtwinklig werden, muss die Sehne ein Durchmesser sein.

b Der Kreisbogen ist in diesem Fall der **Thaleskreis**.

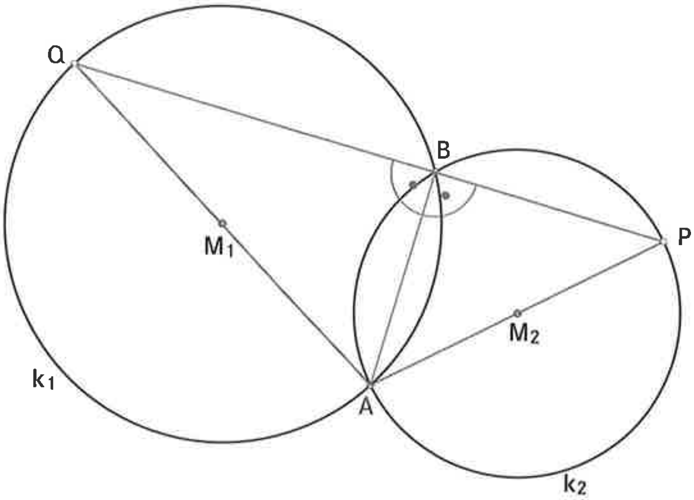


H123 Die drei Punkte P, Q und B liegen auf einer Geraden.

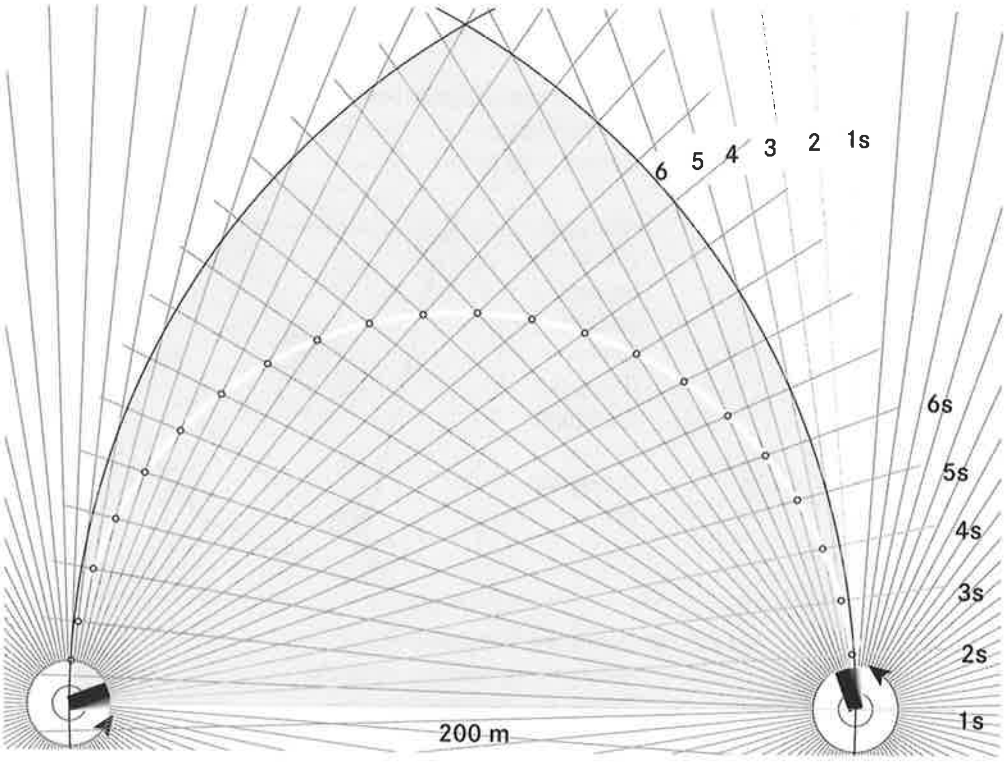
Begründung:
k_2 ist Thaleskreis über AP. Das Dreieck APB hat somit bei B einen rechten Winkel.

k_1 ist Thaleskreis über AQ. Das Dreieck ABQ hat also ebenfalls einen rechten Winkel bei B.

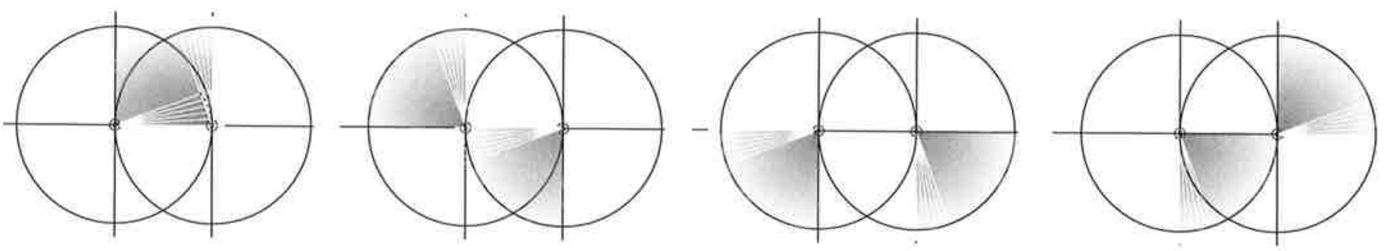
Die beiden 90°-Winkel ergänzen sich zusammen zu einem 180°-Winkel.



H124 **a** Die Schnittpunkte der Lichtstrahlen liegen auf der oberen Hälfte des Thaleskreises. Einzig die Punkte dieser Halbkreislinie werden von beiden Scheinwerfern **gleichzeitig** angestrahlt. Sie sind deshalb am hellsten beleuchtet und für die Suche (beispielsweise nach Schiffen im Meer, nach Eindringlingen auf einem Grundstück, usw.) am interessantesten. Die gesamte Halbkreislinie wird in 22.5 s durchlaufen; jeder Punkt darauf alle 90 s einmal.



b Jeder Suchscheinwerfer dreht sich in 90 s um $90 \cdot 4° = 360°$, macht also eine volle Umdrehung. Nur im ersten Viertel dieser Zeit, in 22.5 s, «laufen» die Lichtstrahlen im gleichen Gebiet. Während der andern $3 \cdot 22.5\,\text{s} = 67.5\,\text{s}$ überstreichen sie verschiedene Gebiete.



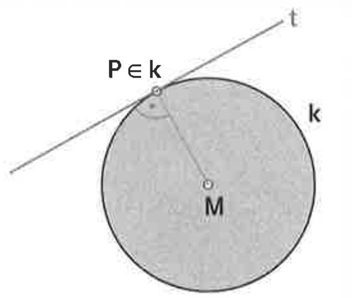
Geht man davon aus, dass jeder Scheinwerfer innerhalb von 200 m eine brauchbare Helligkeit erzeugt, so wird in den 22.5 «gemeinsamen Sekunden» ein spitzbogenförmiges Gebiet ausgeleuchtet (siehe grosse Zeichnung oben).

H125 -

H126 **Tangente t an den Kreis k(M,r) legen ...**

t in P ∈ k

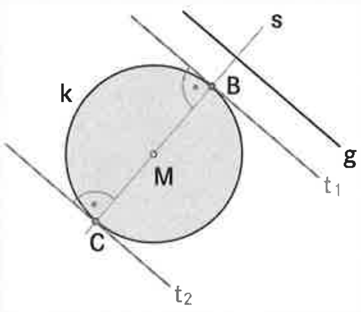
a ... in einem Kreispunkt $P \in k$



Konstruktionsbericht:
- $t \perp MP$ durch P

t // g

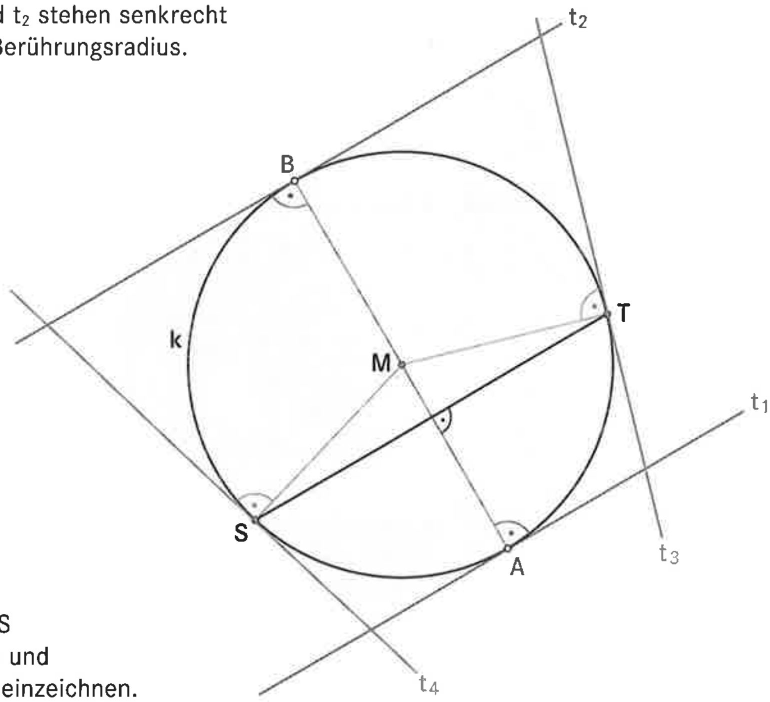
b ... parallel zu einer vorgegebenen Richtung g



Konstruktionsbericht:
- $s \perp g$ durch M → Berührungspunkte $B, C \in k$
- $t_1 \perp MB$ durch B
- $t_2 \perp MB$ durch C

2 Lösungen

H127 **a** Eine Senkrechte zu ST durch M liefert die beiden Berührungspunkte A und B sowie die beiden Berührungsradien MA und MB.
Die Tangenten t_1 und t_2 stehen senkrecht auf dem jeweiligen Berührungsradius.



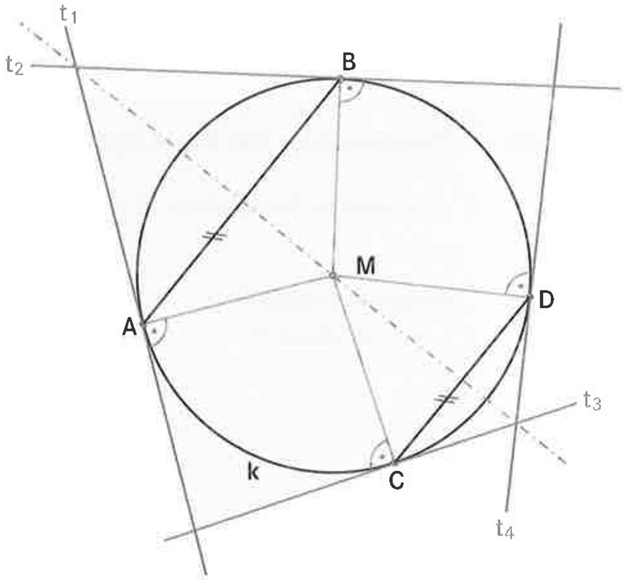
b Berührungsradien MS bzw. MT einzeichnen und Senkrechte t_3 und t_4 einzeichnen.

Das durch die Tangenten eingeschlossene Viereck ist ein gleichschenkliges Trapez. Gleichschenklig, da der Kreis mit der Sehne achsensymmetrisch ist.

H128 Arbeitsblatt

H129 **a** Beispiel:

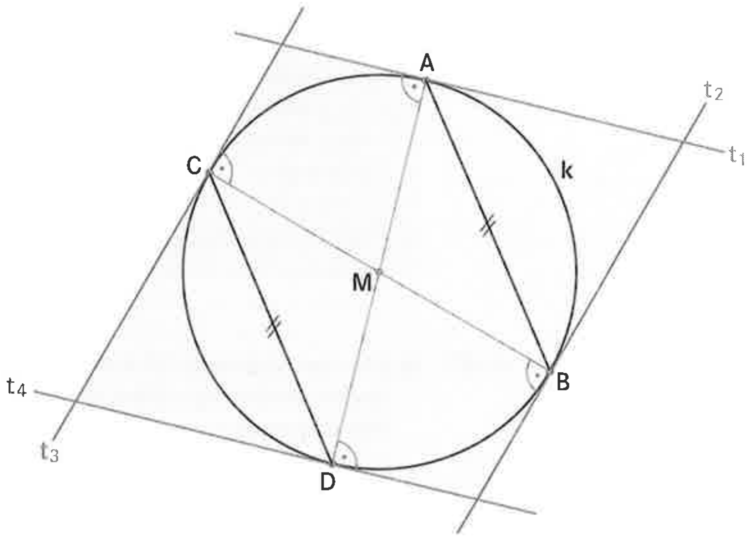
Die Schnittpunkte bilden ein Drachenviereck.



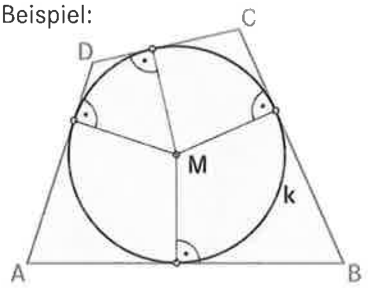
b Wenn die Sehnen gleich lang sind, hat die Figur zwei Symmetrieachsen.
Es entsteht ein Rhombus.

Zwei parallele, gleich lange Sehnen lassen sich bequem mit Hilfe einer Punktspiegelung oder als Rechtecksseiten zeichnen.

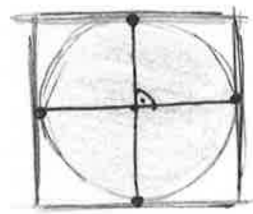
Beispiel nebenan.



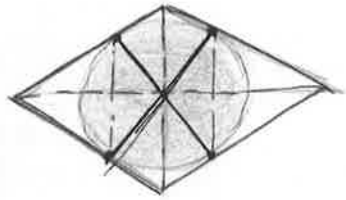
H130 **a** Beispiel:



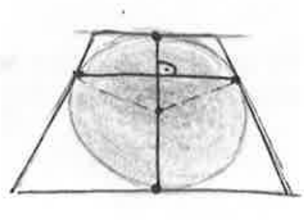
b Die vier Punkte müssen ein Quadrat bilden.
Am einfachsten wählt man sie dazu als Endpunkte zweier senkrecht zueinander stehender Durchmesser.



c Die vier Punkte müssen symmetrisch bezüglich zwei zueinander senkrecht stehender Achsen sein. Am einfachsten wählt man sie als Endpunkte von zwei Durchmessern. Man kann sie aber auch als Eckpunkte eines Rechtecks wählen.



d Vier Punkte als Endpunkte eines Durchmessers und einer dazu senkrecht stehenden Sehne führen zu einem gleichschenkligen Trapez.



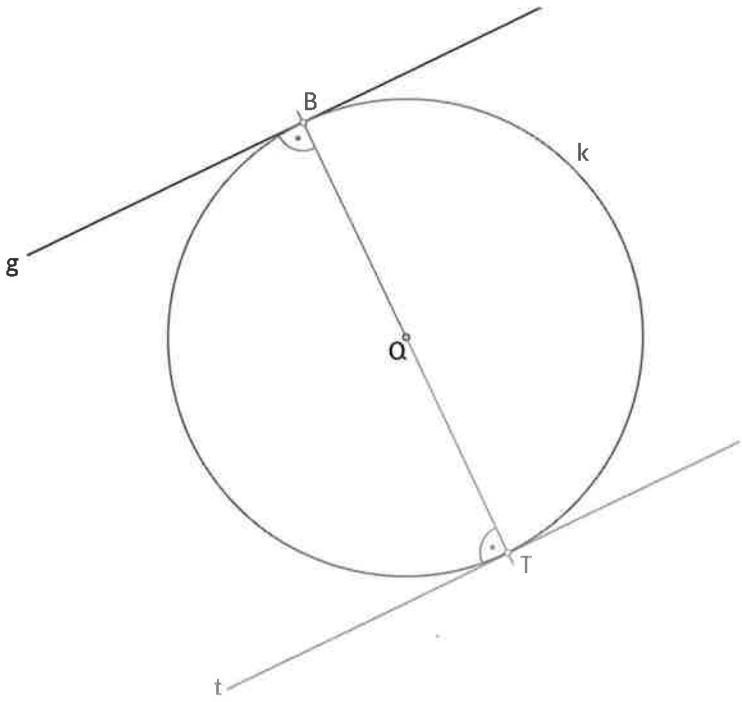
Vier Punkte als Endpunkte zweier ungleich langer, paralleler Sehnen führen zu einem Drachenviereck.

H131 **a** Konstruktionsbericht:

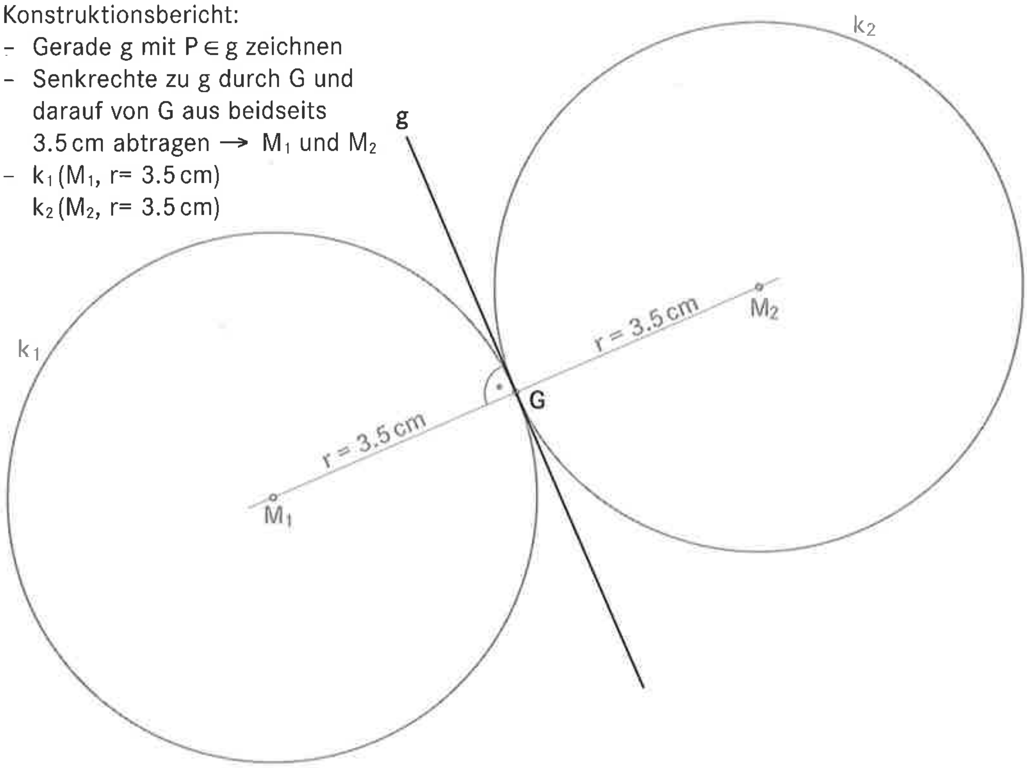
- Senkrechte zu g durch Q legen und mit g schneiden → Berührungspunkt B
- Kreis k mit Mittelpunkt Q und Radius QB: k (Q, r = QB)

b Konstruktionsbericht:

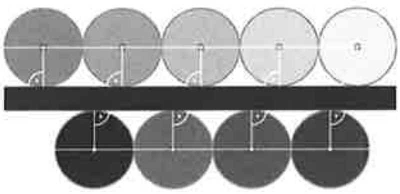
- BQ verlängern und mit Kreis k schneiden → Berührungspunkt T
- t ⊥ QT durch T



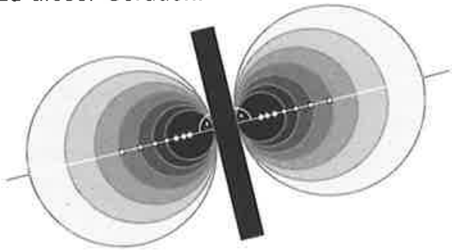
H132 Konstruktionsbericht:
- Gerade g mit P ∈ g zeichnen
- Senkrechte zu g durch G und darauf von G aus beidseits 3.5 cm abtragen → M_1 und M_2
- k_1 (M_1, r= 3.5 cm)
  k_2 (M_2, r= 3.5 cm)



H133

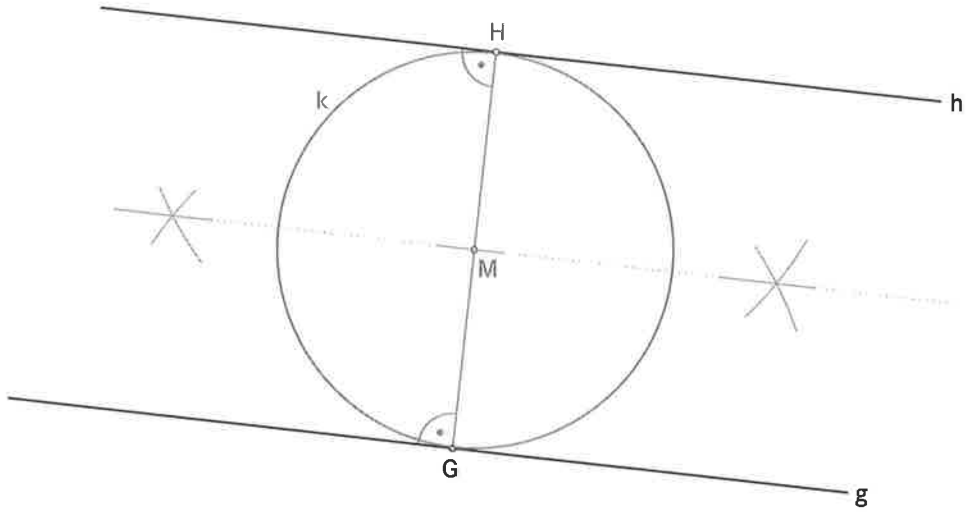


Die Mittelpunkte aller gleich grossen Kreise, die eine Gerade – hier ein Rechteck – berühren, liegen auf zwei Parallelen zu dieser Geraden.



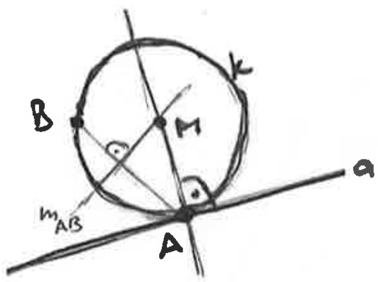
Die Mittelpunkte aller Kreise, die eine Gerade – hier ein Rechteck – in einem bestimmten Punkt berühren, liegen auf einer Senkrechten zu dieser Geraden.

H134



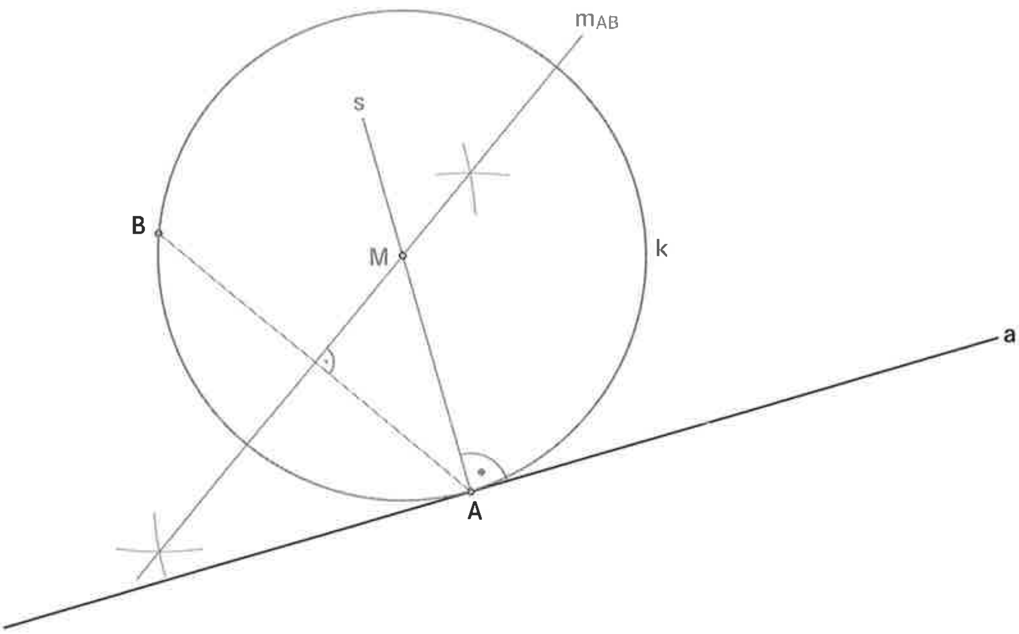
Konstruktionsbericht:
- Senkrechte zu g durch G legen
  und mit h schneiden ⟶ 2. Berührungspunkt H
- Mitte von GH bestimmen ⟶ M
- Kreis k(M, r = MG)

H135



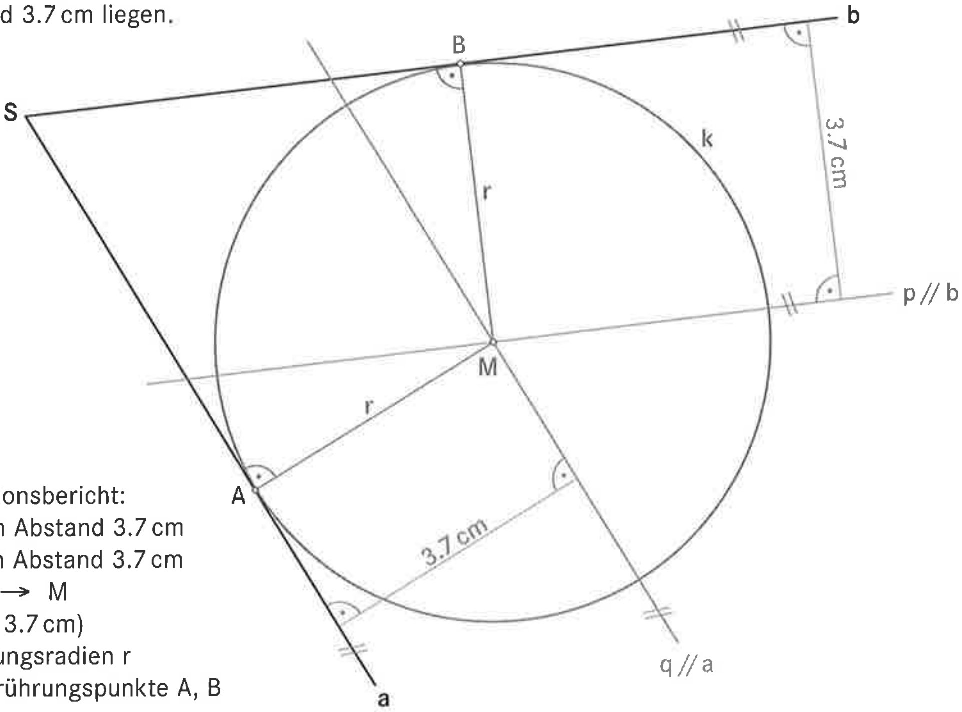
Lösungsidee:
- Der Mittelpunkt eines Kreises, der die Gerade a in A berührt, muss auf einer Senkrechten zu a durch A liegen.
- Der Mittelpunkt eines Kreises, der durch zwei Punkte A und B verläuft, muss auf der Mittelsenkrechten zu AB liegen.

Anhand dieser beiden Bedingungen lässt sich der Mittelpunkt des gesuchten Kreises konstruieren.
Der Radius ergibt sich daraus von selbst.



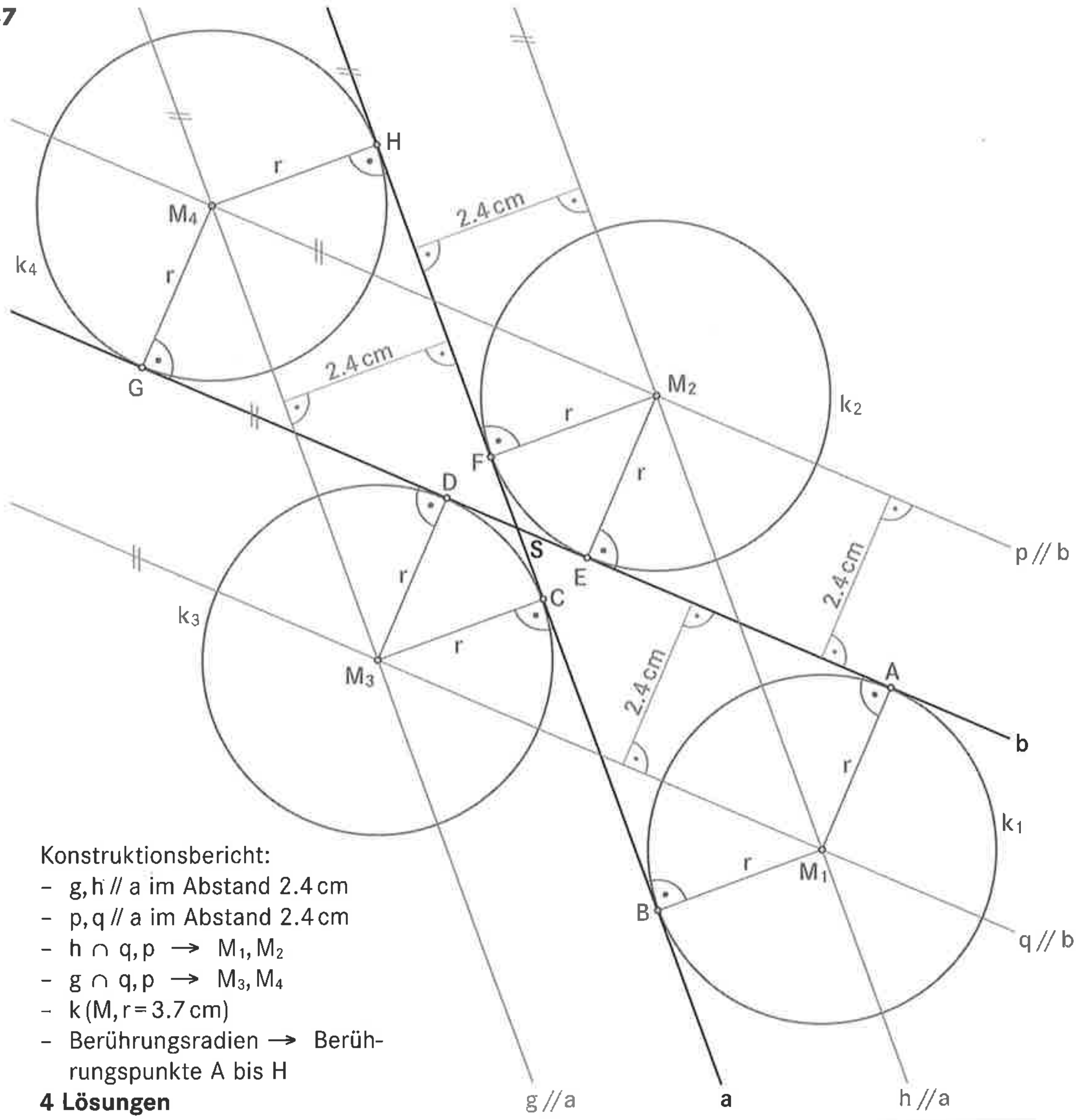
Konstruktionsbericht:
- Senkrechte s zu a durch A legen
- Mittelsenkrechte m_{AB} von A und B konstruieren
- Schnittpunkt von s und m_{AB} bestimmen: $s \cap m_{AB}$ ⟶ M
- Kreis k(M, r = MA)

H136 Lösungsidee:
Der Kreismittelpunkt muss auf einer **Parallelen zu a und** auf einer **Parallelen zu b** im Abstand 3.7 cm liegen.



Konstruktionsbericht:
- p // b im Abstand 3.7 cm
- q // a im Abstand 3.7 cm
- p ∩ q ⟶ M
- k (M, r = 3.7 cm)
- Berührungsradien r
  ⟶ Berührungspunkte A, B

H137

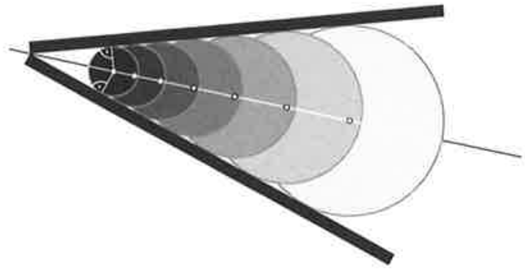


Konstruktionsbericht:
- g, h // a im Abstand 2.4 cm
- p, q // a im Abstand 2.4 cm
- h ∩ q, p ⟶ M_1, M_2
- g ∩ q, p ⟶ M_3, M_4
- k (M, r = 3.7 cm)
- Berührungsradien ⟶ Berührungspunkte A bis H

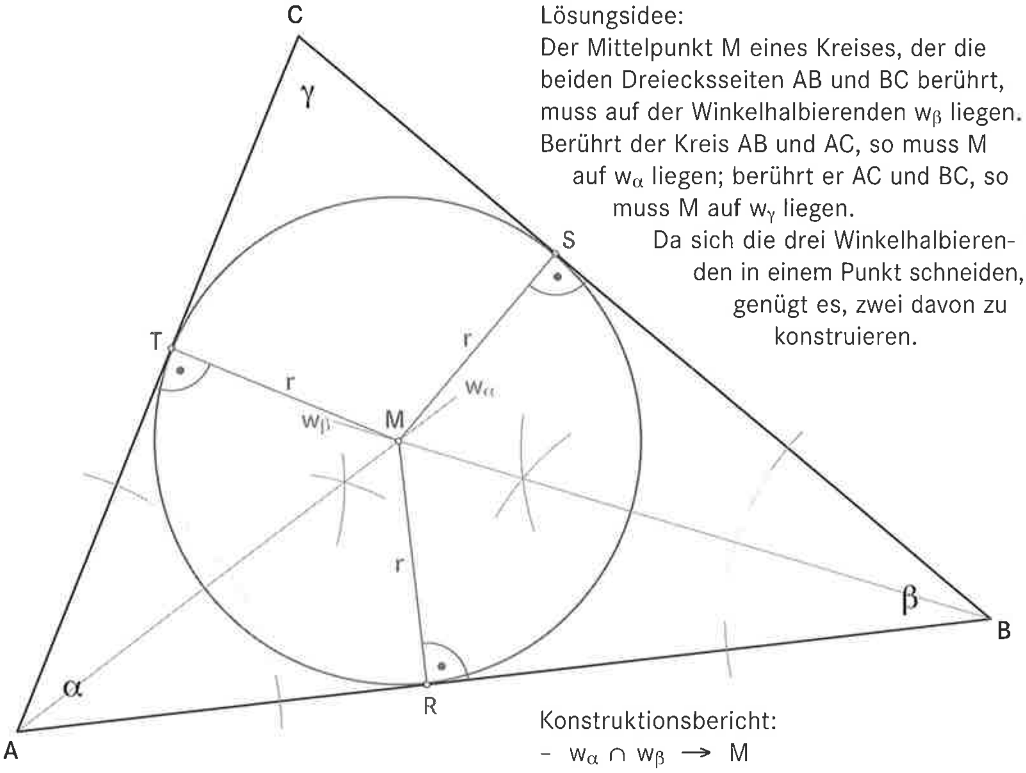
4 Lösungen

H138 Arbeitsblatt

H139 Die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei Geraden gleichzeitig berühren – hier einen Winkel, der durch zwei Rechtecke gebildet wird – liegen auf der Winkelhalbierenden.



H140

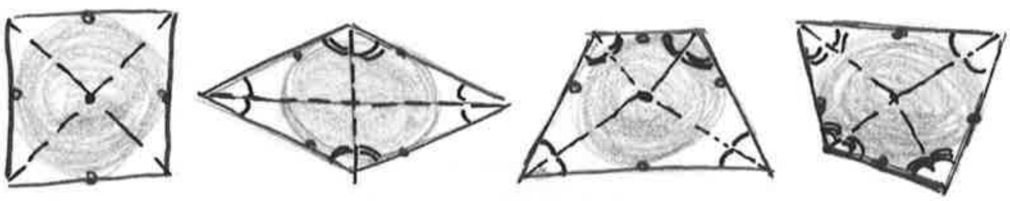


Lösungsidee:
Der Mittelpunkt M eines Kreises, der die beiden Dreiecksseiten AB und BC berührt, muss auf der Winkelhalbierenden w_β liegen. Berührt der Kreis AB und AC, so muss M auf w_α liegen; berührt er AC und BC, so muss M auf w_γ liegen. Da sich die drei Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden, genügt es, zwei davon zu konstruieren.

Konstruktionsbericht:
- $w_\alpha \cap w_\beta \rightarrow M$
- Berührungsradius $r \perp AB$ durch $M \rightarrow R$
  $r \perp BC$ durch $M \rightarrow S$
  $r \perp AC$ durch $M \rightarrow T$
- $k(M, r)$

H141 Ein Viereck ist nur dann Tangentenviereck, wenn sich seine vier Winkelhalbierenden in einem einzigen Punkt schneiden.

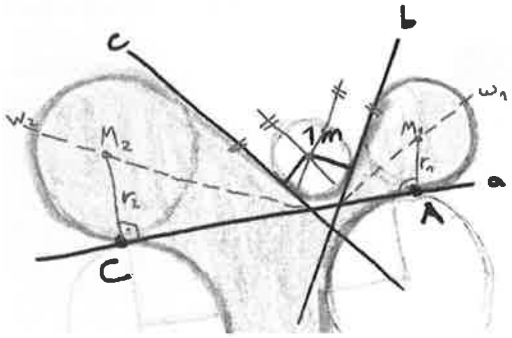
Beispiele Tangentenvierecke:

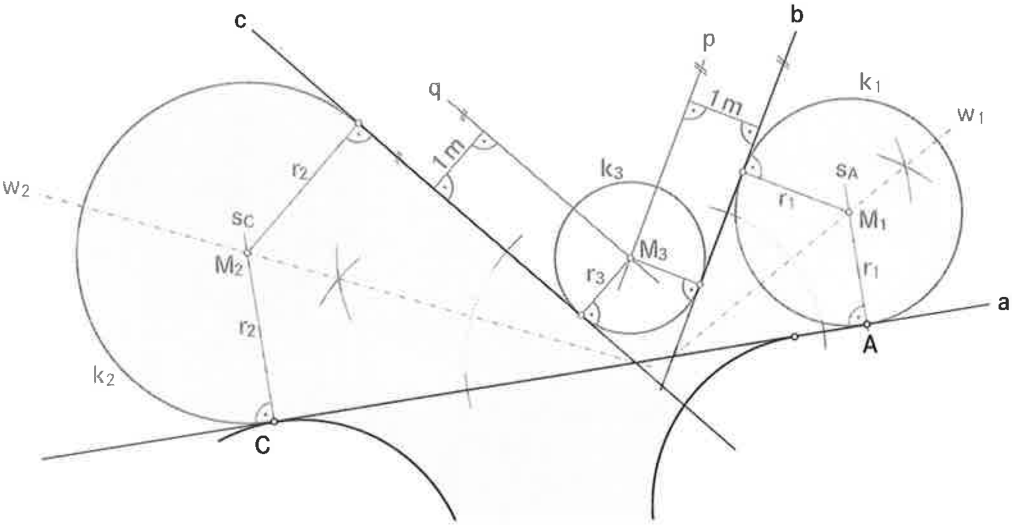


Keine Tangentenvierecke:

H142 Lösungsidee:

- Kreis rechts zwischen a und b:
  Der Mittelpunkt M_1 muss auf der Senkrechten zu a durch A sowie auf der Winkelhalbierenden von a und b liegen.
- Kreis links zwischen a und c:
  Der Mittelpunkt M_2 muss auf der Senkrechten zu a durch C sowie auf der Winkelhalbierenden von a und c liegen.
- Kleiner Kreis oben in der Mitte:
  Der Mittelpunkt M_3 muss auf Parallelen zu b und c im Abstand 1 m liegen.

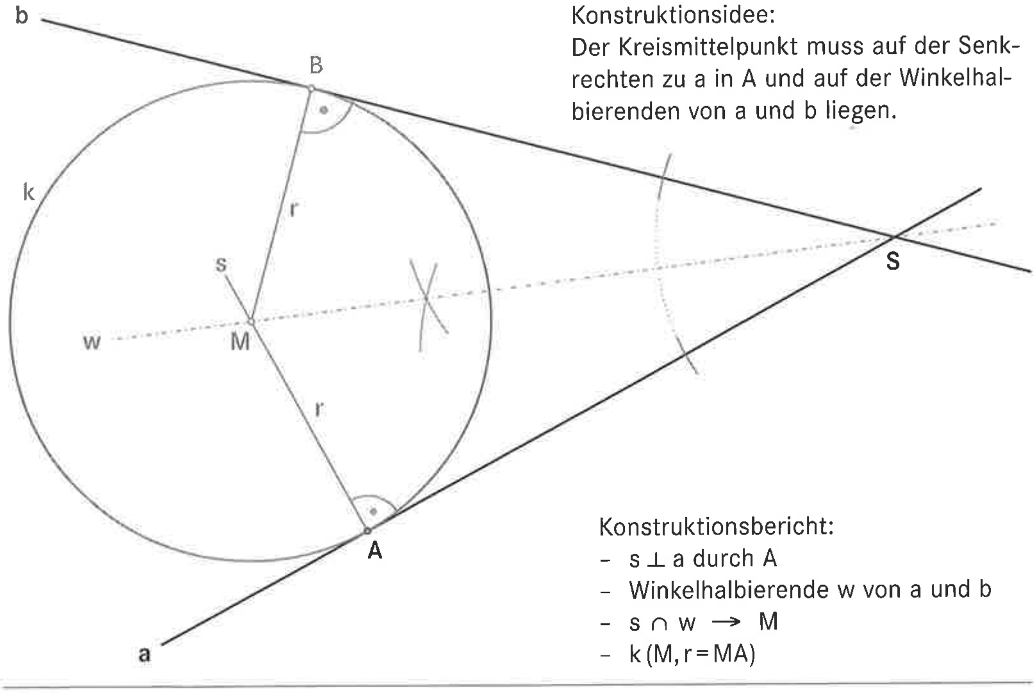




Konstruktionsbericht:

- $s_A \perp$ a durch A
- Winkelhalbierende w_1 von a und b schneiden mit s_A: $s_A \cap w_1 \longrightarrow M_1$
- $k_1(M_1, r_1 = M_1A)$
- $s_C \perp$ a durch C
- Winkelhalbierende w_2 von a und c schneiden mit s_C: $s_C \cap w_2 \longrightarrow M_2$
- $k_2(M_2, r_2 = M_2C)$
- p // b und q // c je im Abstand «1 m»
- $p \cap q \longrightarrow M_3$
- $k_3(M_3, r_3 =$ «1 m»$)$

H143



Konstruktionsidee:
Der Kreismittelpunkt muss auf der Senkrechten zu a in A und auf der Winkelhalbierenden von a und b liegen.

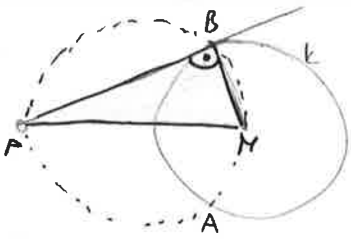
Konstruktionsbericht:

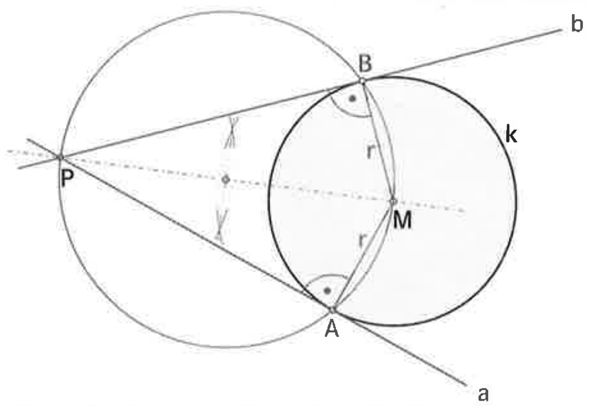
- s $\perp$ a durch A
- Winkelhalbierende w von a und b
- $s \cap w \longrightarrow M$
- $k(M, r = MA)$

t in P ∉ k

H144 Tangenten a und b von einem Punkt P aus an den Kreis k legen

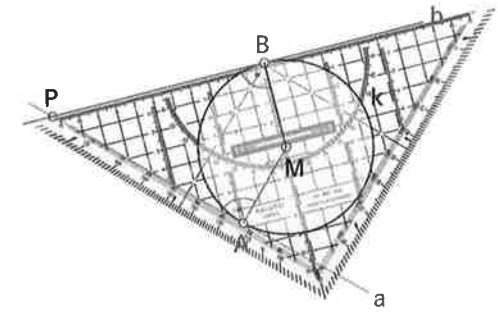
Konstruktionsidee:
Das Dreieck PMB (bzw. PMA) ist rechtwinklig. Der Berührungspunkt B (bzw. A) liegt demnach auf dem Thaleskreis über PM.





Konstruktionsbericht:
- Thaleskreis über PM schneiden mit k → A, B
- a = (PA)
- b = (PB)

Es geht auch so.

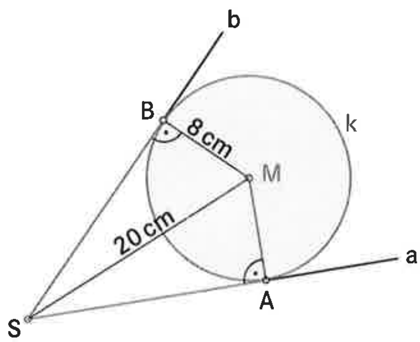


H145 Arbeitsblatt

H146 **a** Das Dreieck SMB ist rechtwinklig.
Es gilt der Satz von Pythagoras:
Hypotenuse SM = 20 cm
Katheten BM = 8 cm, SB = ?

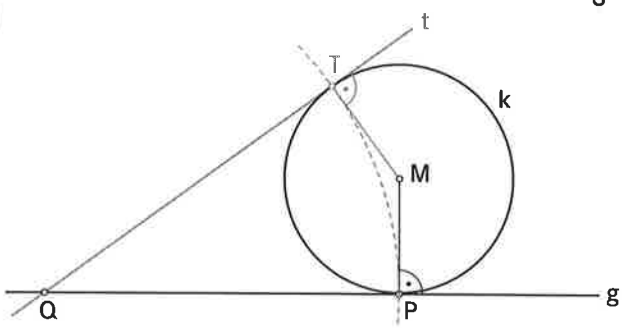
$\mathbf{SB} = \sqrt{SM^2 - BM^2} = \sqrt{20^2 - 8^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{18.33\,cm}$

Das Dreieck SMA ist kongruent zu SMB.
Folglich ist **SA = SB ≈ 18.33 cm**.



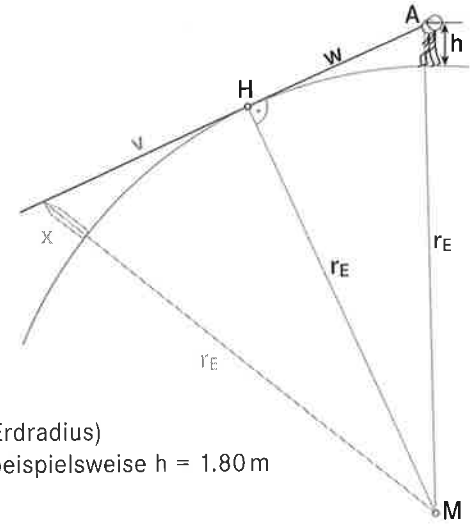
Fehlerhinweis:
In der 1. Auflage des Aufgabenbuches hat sich leider bei dieser Aufgabe ein Fehler eingeschlichen:
b letzte Zeile:
... von Q an k?

b

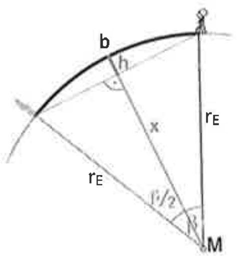


Die beiden Tangentenabschnitte von Q an den Kreis sind **gleich lang**. Die Länge des Abschnitts PQ ist gegeben. Den Berührungspunkt T der zweiten Tangente erhält man als Schnittpunkt des Kreisbogens um Q, Radius PQ mit dem Kreis k.

H147 a Das Problem liegt in der Erdkrümmung. Diese lässt auch bei sichtigem Wetter nur eine gewisse Sichtdistanz zu. Alles was weiter weg ist als der Berührungspunkt einer imaginären Tangente vom Auge des Betrachters an die Erdoberfläche, verschwindet hinter dem Horizont. Dies wird besonders schön sichtbar, wenn man am offenen Meer sitzt und ein wegfahrendes Schiff plötzlich im Meer «versinkt».



Zusatzinformation
Wölbung des Bodensees bei einer Breite von 13 km:



$b = 13\,\text{km}$
$\Leftrightarrow\ \beta = 0.11693°$
gerechnet mit r_E

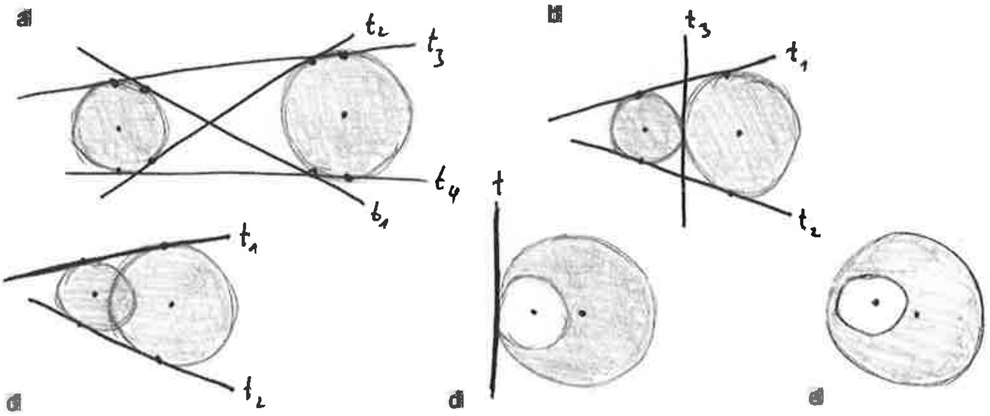
$x = \cos(\beta/2)\cdot r_E$
$\mathbf{h} = r_E - x$
$= r_E - \cos(\beta/2)\cdot r_E$
$= \mathbf{3.3\,m}$

b Das Dreieck Erdmittelpunkt M, Augenhöhe A und Horizont H ist rechtwinklig und lässt sich mit dem Satz von Pythagoras berechnen:
Hypotenuse: $r_E + h$, wobei $r_E = 6\,370\,\text{km}$ (Erdradius)
h Augenhöhe, beispielsweise $h = 1.80\,\text{m}$
Katheten: $r_E = 6\,370\,\text{km}$
Sichtweite $w = ?$

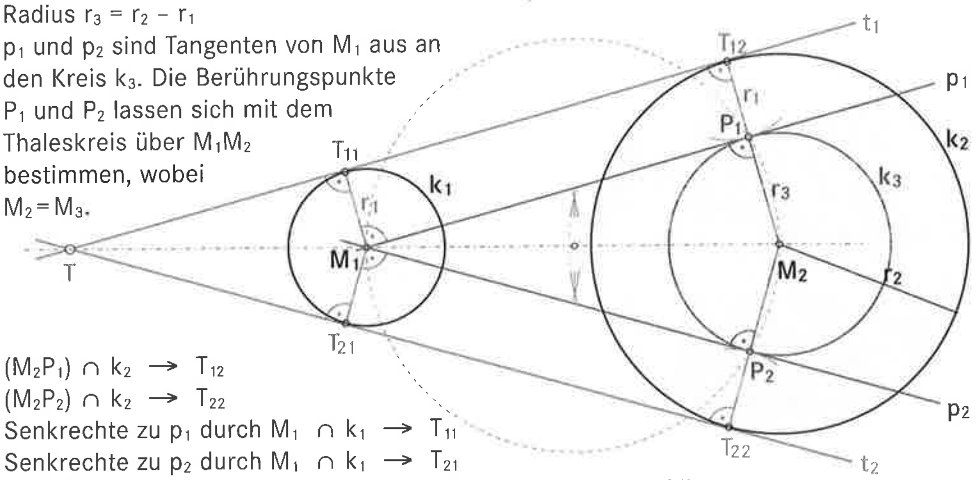
$\mathbf{w} = \sqrt{(r_E + h)^2 - r_E^2} = \sqrt{6\,370\,001.8^2 - 6\,370\,000^2}\,\text{m} \approx \mathbf{4\,789\,m}$

Der **Bodensee** ist bei Rorschach ungefähr **13 km** breit. Die beiden Herren können die Uferlinie also auch bei sichtigem Wetter nicht sehen.
Sehen können sie allenfalls den oberen Teil von Gebäuden und Türmen. Diese müssen allerdings eine gewisse Höhe x haben (wir rechnen mit der Näherung: Bogen = v+w):
$v = 13\,000\,\text{m} - 4\,789\,\text{m} = 8\,211\,\text{m}$
$x + r_E = \sqrt{r_E^2 + v^2} = \sqrt{6\,370\,000^2 + 8\,211^2}\,\text{m} \approx 6\,370\,005.29\,\text{m}$
$x = 5.29\,\text{m}$
Gebäude, die **über 5.30 m** hoch sind, sind bei sichtigem Wetter also sichtbar.

H148

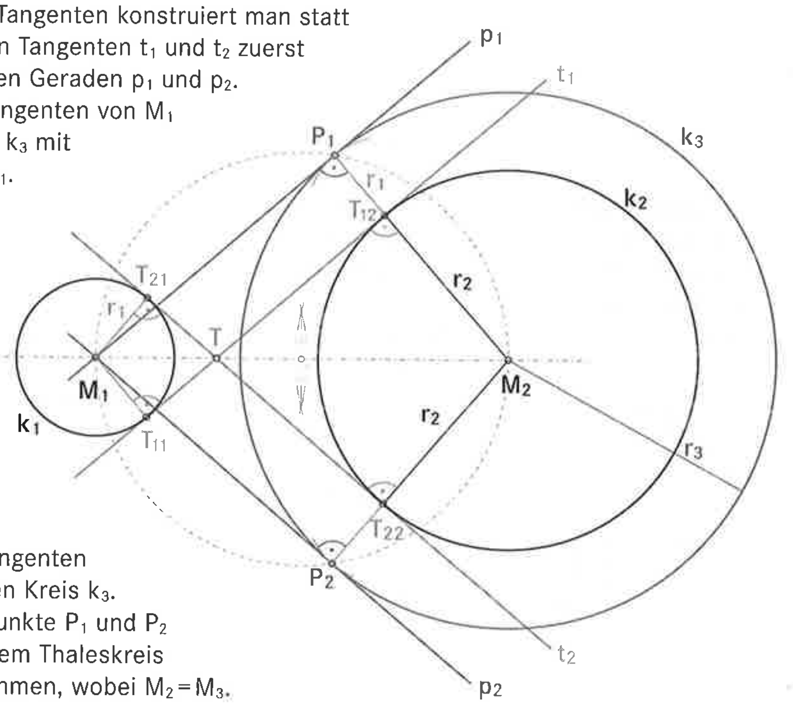


H149 a 1 Radius $r_3 = r_2 - r_1$
2 p_1 und p_2 sind Tangenten von M_1 aus an den Kreis k_3. Die Berührungspunkte P_1 und P_2 lassen sich mit dem Thaleskreis über M_1M_2 bestimmen, wobei $M_2 = M_3$.



3 $(M_2P_1) \cap k_2 \longrightarrow T_{12}$
$(M_2P_2) \cap k_2 \longrightarrow T_{22}$
Senkrechte zu p_1 durch $M_1 \cap k_1 \longrightarrow T_{11}$
Senkrechte zu p_2 durch $M_1 \cap k_1 \longrightarrow T_{21}$
4 (M_1M_2) ist Symmetrieachse. Der Schnittpunkt T muss darauf liegen.
5 Konstruktionsbericht: Siehe 1 bis 4 oben.

b **1** Bei den inneren Tangenten konstruiert man statt der gemeinsamen Tangenten t_1 und t_2 zuerst die dazu parallelen Geraden p_1 und p_2. p_1 und p_2 sind Tangenten von M_1 aus an den Kreis k_3 mit Radius $r_3 = r_2 + r_1$.



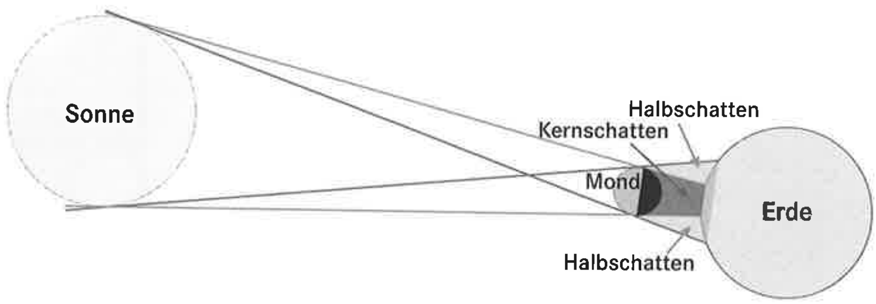
2 p_1 und p_2 sind Tangenten von M_1 aus an den Kreis k_3. Die Berührungspunkte P_1 und P_2 lassen sich mit dem Thaleskreis über M_1M_2 bestimmen, wobei $M_2 = M_3$.

3 $(M_2P_1) \cap k_2 \rightarrow T_{12}$
$(M_2P_2) \cap k_2 \rightarrow T_{22}$
Senkrechte zu p_1 durch $M_1 \cap k_1 \rightarrow T_{11}$
Senkrechte zu p_2 durch $M_1 \cap k_1 \rightarrow T_{21}$

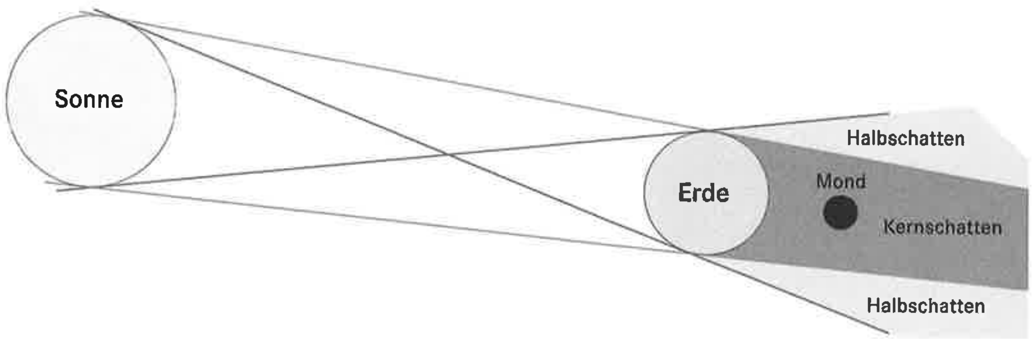
4 (M_1M_2) ist wiederum Symmetrieachse. Der Schnittpunkt T muss darauf liegen.

5 Konstruktionsbericht: Siehe **1** bis **4** oben.

H150 **a** Sonnenfinsternis

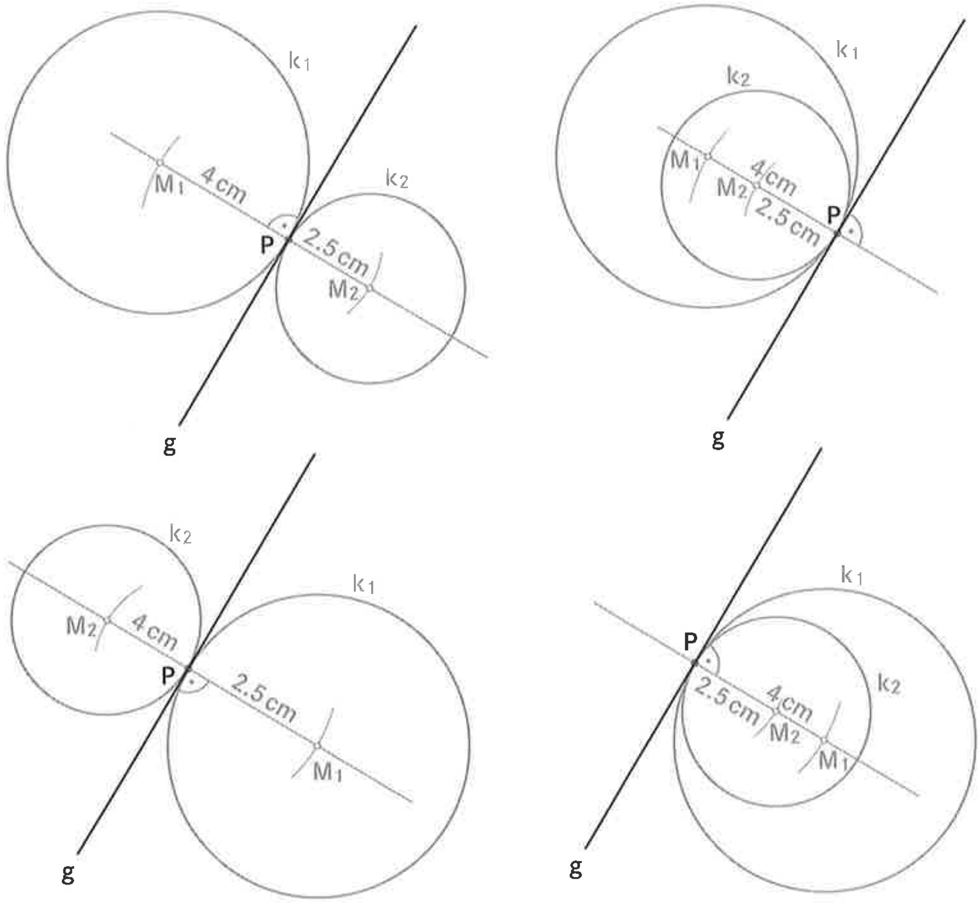


b Mondfinsternis



H151 Arbeitsblatt

H152 **a** **Abbildungen im Massstab 1:2**

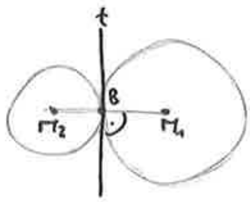


Es gibt grundsätzlich **zwei verschiedene Lagemöglichkeiten** für die beiden Kreise:

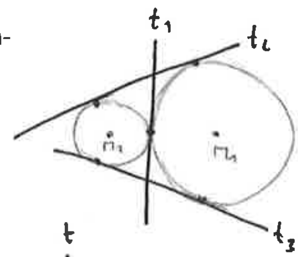
1. Beide Kreise **auf verschiedenen Seiten** der Geraden: Die Kreise berühren sich dabei gegenseitig von aussen.
2. Beide Kreise **auf der gleichen Seite** der Geraden: Die Kreise berühren sich dabei gegenseitig von innen.

b Die beiden Mittelpunkte M_1 und M_2 sowie der Berührungspunkt P liegen auf einer gemeinsamen Geraden, der Senkrechten zu g durch P.

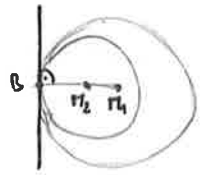
H153 **a** richtig — Diese steht senkrecht auf den beiden Berührungsradien.



b falsch — Dies kann, muss aber nicht sein. Richtig wäre beispielsweise:
Zwei sich von aussen berührende Kreise haben drei gemeinsame Tangenten. Zwei sich von innen berührende Kreise haben nur eine gemeinsame Tangente.

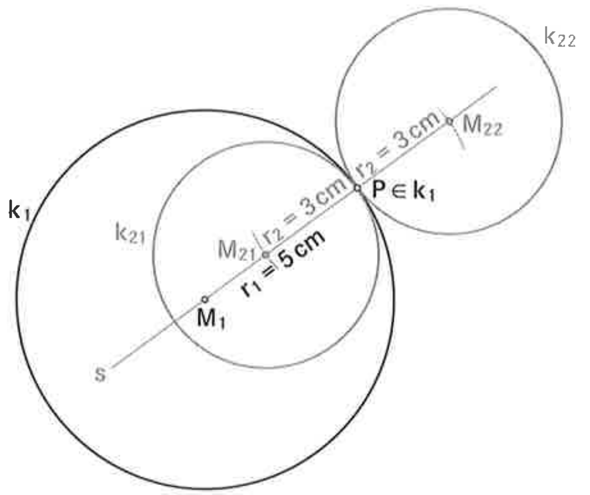


c falsch — Dies kann, muss aber nicht sein. Richtig wäre beispielsweise:
Der Berührungspunkt zweier sich berührender Kreise liegt auf der Verbindungsgeraden der beiden Kreismittelpunkte.



d richtig

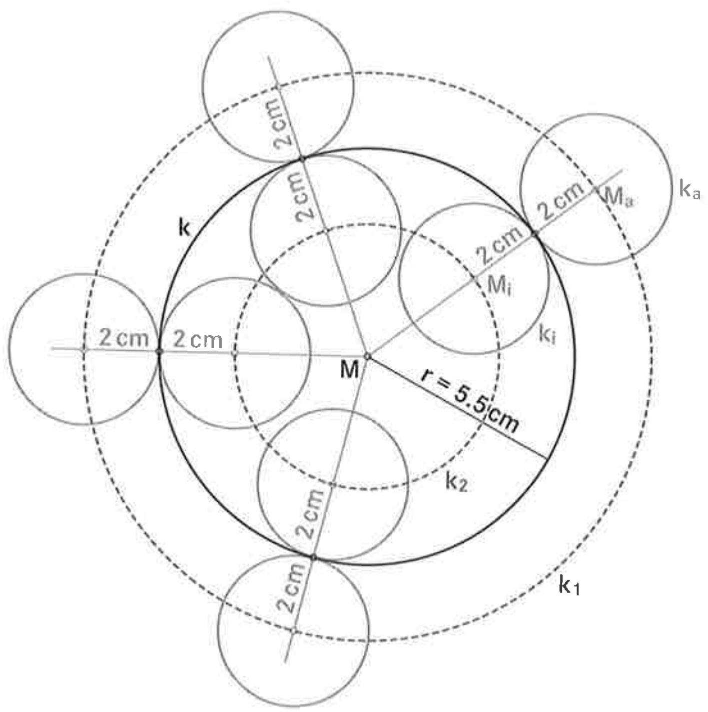
H154 **Abbildung im Massstab 1:2**



Konstruktionsbericht:
- $k_1(M_1,\ r_1 = 5\,cm)$
- $P \in k_1$ wählen
- $s = (M_1P)$
- von P aus beidseits $r_2 = 3\,cm$ auf s abtragen ⟶ M_{21} und M_{22}
- $k_{21}(M_{21},\ r_2 = 3\,cm)$
- $k_{22}(M_{22},\ r_2 = 3\,cm)$

Es gibt **2 Lösungen**:
Einen Kreis k_{21}, der von **innen** berührt und einen Kreis k_{22}, der von **aussen** berührt.

H155 **a** **Abbildung im Massstab 1:2**



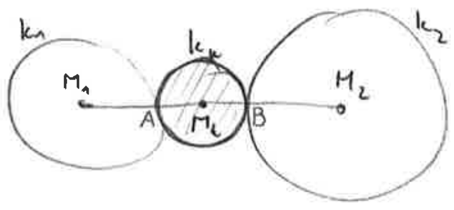
b Es gibt unendlich viele Kreise k_a, die den Kreis k von aussen berühren, – und ebenfalls unendlich viele Kreise k_i, die den Kreis k von innen berühren.

Die Mittelpunkte $\mathbf{M_a}$ der äusseren Kreise k_a liegen auf einem **Kreis k_1 um M**, dessen Radius um 2 cm grösser ist als derjenige von k: $\mathbf{r_1} = 5.5\,cm + 2\,cm = \mathbf{7.5\,cm}$.

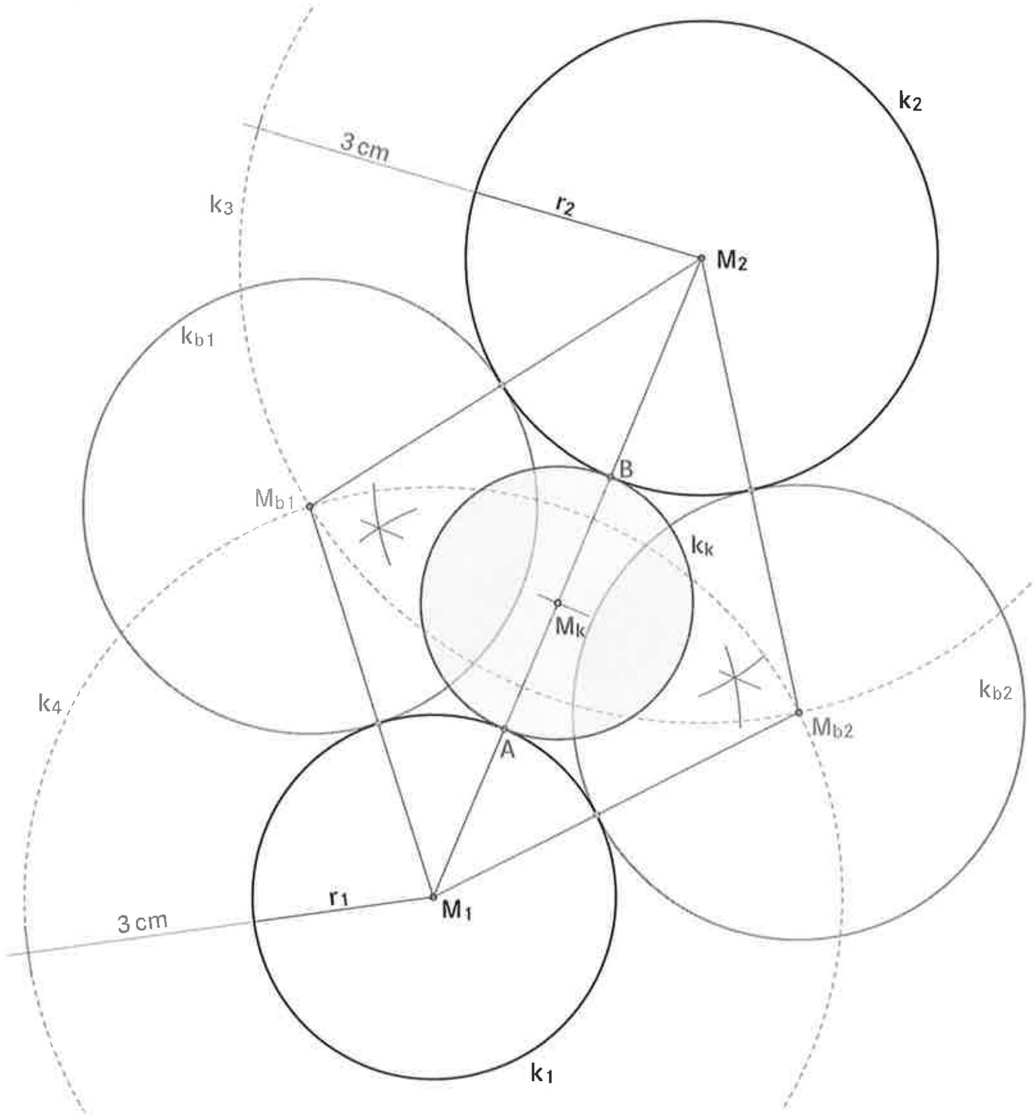
Die Mittelpunkte $\mathbf{M_i}$ der inneren Kreise k_i liegen auf einem **Kreis k_2 um M**, dessen Radius um 2 cm kleiner ist als derjenige von k: $\mathbf{r_2} = 5.5\,cm - 2\,cm = \mathbf{3.5\,cm}$.

H156 Arbeitsblatt

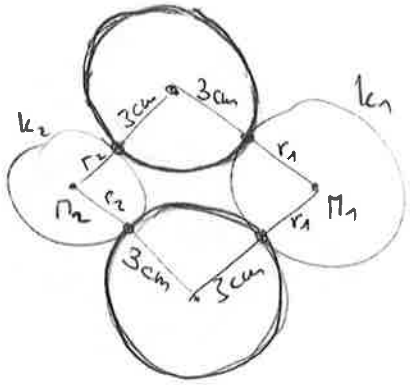
H157 **a** Lösungsidee:
Der kleinste Kreis k_k, der die beiden Kreise k_1 und k_2 berührt, liegt «eingeklemmt» dazwischen. Sein Mittelpunkt M_k liegt auf der Strecke M_1M_2 in der Mitte der beiden Berührungspunkte A und B.



Konstruktionsbericht:
- $M_1M_2 \longrightarrow A \in k_1, B \in k_2$
- M_k = Mitte von AB
- $k_k(M_k, r = M_kA)$



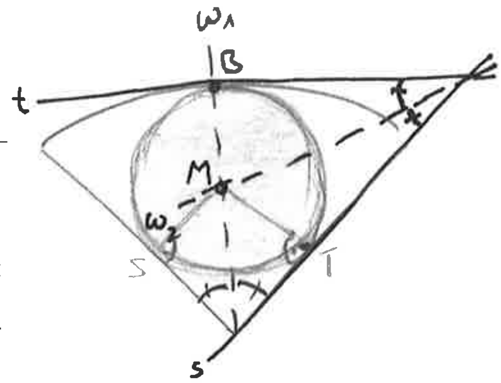
b Lösungsidee:
Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises muss einerseits auf dem zu k_1 konzentrischen Kreis mit dem Radius $r_1 + 3\,cm$
und anderseits auf dem zu k_2 konzentrischen Kreis mit dem Radius $r_2 + 3\,cm$ liegen.



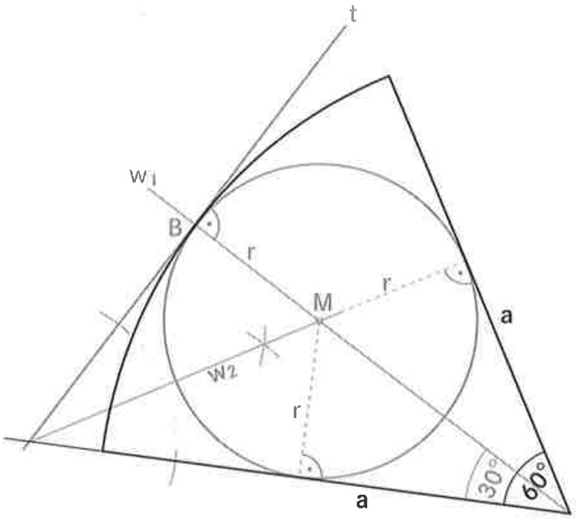
Konstruktionsbericht:
- r_2 wählen und um 3 cm verlängern
  $k_3(M_2, r_3 = r_2 + 3\,cm)$
- r_1 wählen und um 3 cm verlängern
  $k_4(M_1, r_4 = r_1 + 3\,cm)$
- $k_3 \cap k_4 \longrightarrow M_{b1}$ und M_{b2}
- $k_{b1}(M_{b1}, 3\,cm)$
  $k_{b2}(M_{b2}, 3\,cm)$

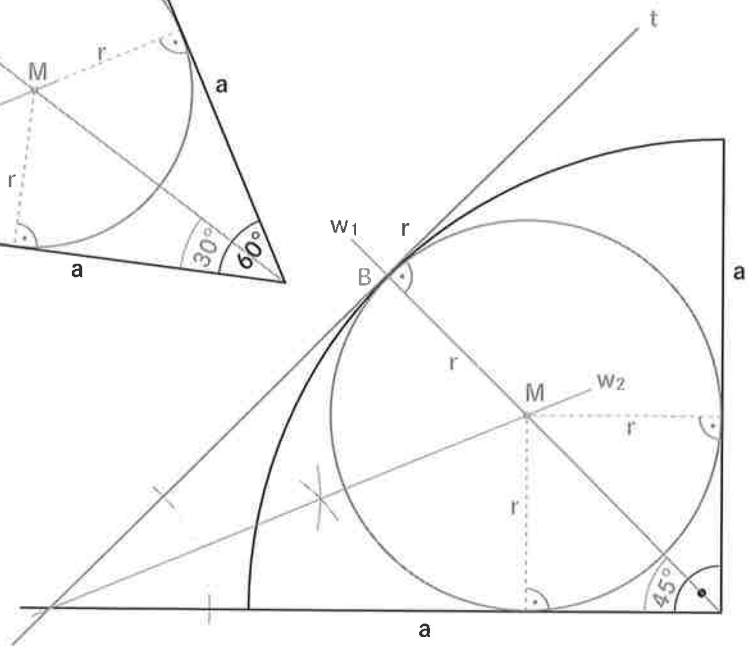
2 Lösungen

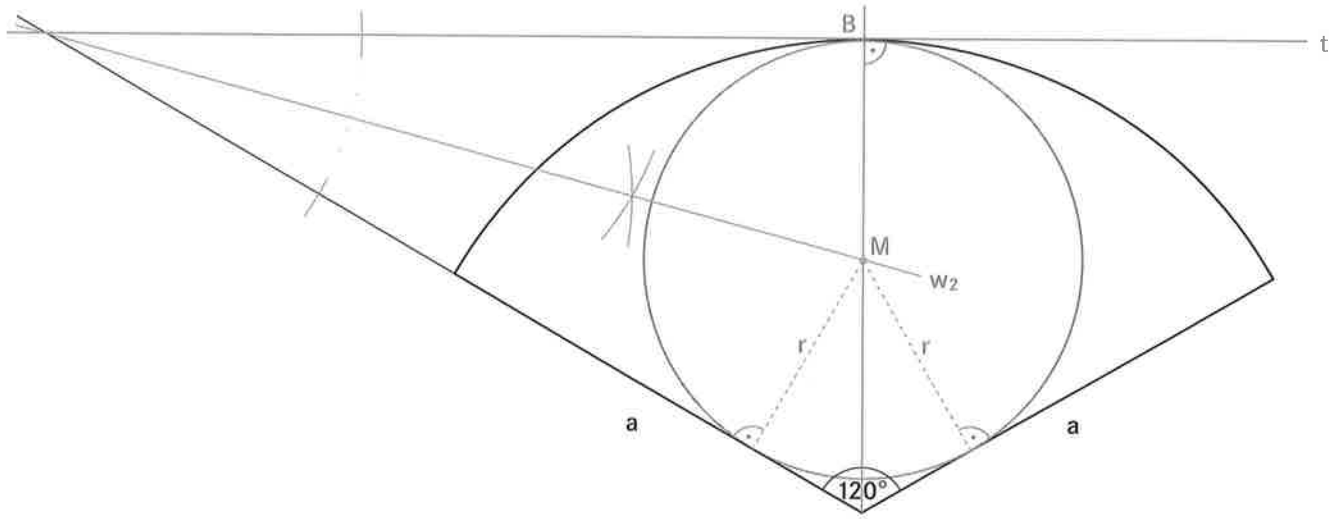
H158 **a** Lösungsidee für alle drei Sektoren:



1. Damit der Kreis die beiden Schenkel berührt, muss sein Mittelpunkt M auf der Winkelhalbierenden w_1 des Sektors liegen.
2. Die Figur ist symmetrisch. Der Berührungspunkt des Kreises mit dem Bogen ist genau in der Mitte im Punkt B.
   Mit dem Berührungspunkt ist auch die gemeinsame Tangente t bekannt. Damit lässt sich das Problem «Berührung mit dem Kreis» auf das Problem «Berührung mit der Tangente» zurückführen: Der gelbe Kreis muss die Tangente t und beispielsweise den Schenkel s berühren. Der Kreismittelpunkt M muss demnach auf der Winkelhalbierenden w_2 von s und t liegen.
3. Beide Bedingungen zusammen liefern die exakte Lage von M.
   Den Radius des Kreises erhält man durch Einzeichnen der Berührungsradien.





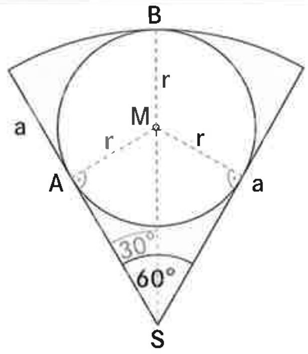


b Das Dreieck SMA ist ein halbes gleichseitiges Dreieck:
AS ist Höhe
AM ist halbe Seite, wobei $AM = r$
SM ist Seite $\Rightarrow$ $SM = 2r$

SB ist Radius des Sektors $SB = a$
und $SB = SM + MB = 2r + r = 3r$

Daraus folgt $3r = a$

$$r = \frac{a}{3}$$



ASCM ist ein Quadrat mit der Seitenlänge r.

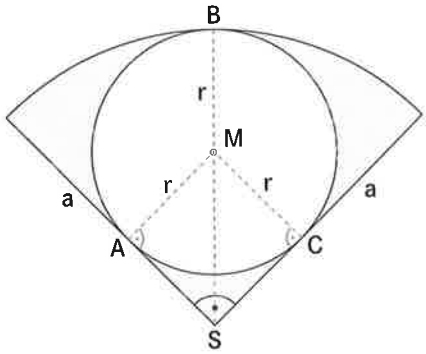
SM ist Diagonale $SM = r\sqrt{2}$

SB ist Radius des Sektors $SB = a$
und

$$\begin{aligned} SB &= SM + MB \\ &= r\sqrt{2} + r \\ &= 2.414213\ldots r \\ &\approx 2.41\,r \end{aligned}$$

Daraus folgt $2.41\,r \approx a$

$$\mathbf{r \approx 0.41\,a}$$



Das Dreieck SMA ist ein halbes gleichseitiges Dreieck:
AS ist halbe Seite
AM ist Höhe, wobei $AM = r$
SM ist Seite $\Rightarrow$

$$r = \frac{SM}{2}\sqrt{3}$$

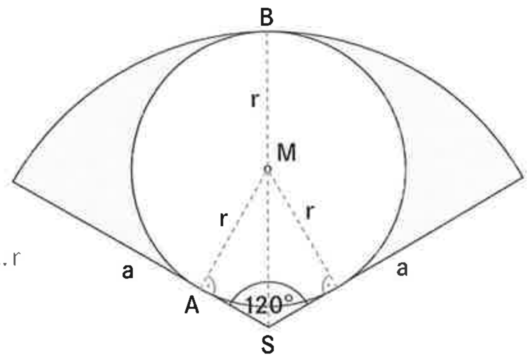
$$\begin{aligned} SM &= 2r : \sqrt{3} \\ &= 1.15470\ldots r \\ &\approx 1.15\,r \end{aligned}$$

SB ist Radius des Sektors $SB = a$
und

$$\begin{aligned} SB &= SM + MB \\ &\approx 1.15\,r + r = 2.15\,r \end{aligned}$$

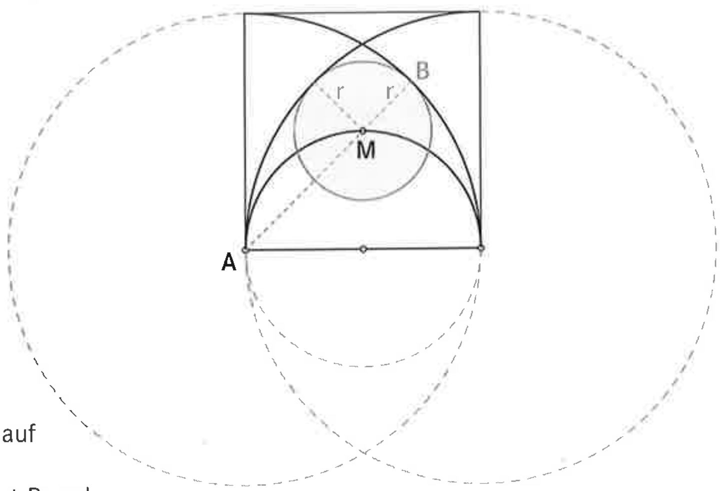
Daraus folgt $2.15\,r \approx a$

$$\mathbf{r \approx 0.46\,a}$$



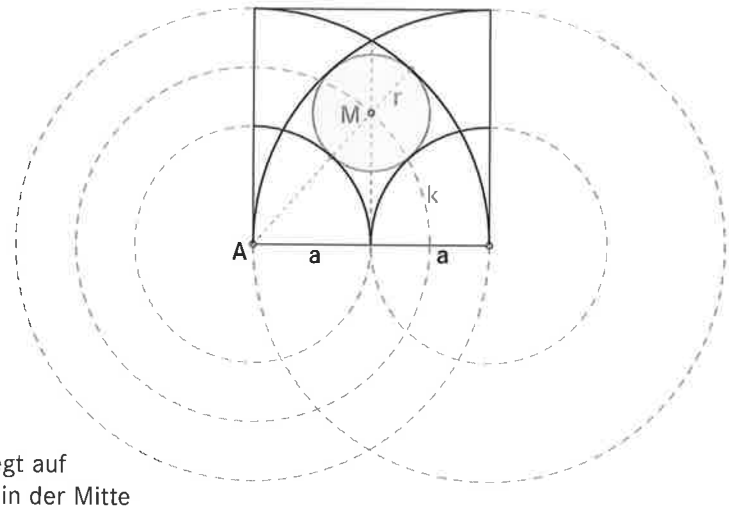
H159 **a** Mit Hilfe der ganzen Kreisfigur wird die Konstruktion schnell klar:

- Der gesuchte Kreismittelpunkt M liegt in der Mitte des Halbkreises.
- Der rechte Spitzbogen hat seinen Mittelpunkt in A.
- A, M und der Berührungspunkt B müssen auf einer Geraden liegen. Damit erhält man sofort B und den Radius r.



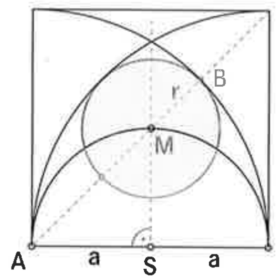
→

→ Mit Hilfe der ganzen Kreisfigur wird die Konstruktion verständlich:



- Der gesuchte Kreis liegt «eingeklemmt» zwischen den beiden Viertelskreisen mit Mittelpunkt A und Radius a bzw. 2a. Er hat also selbst den Durchmesser a, bzw. r = 0.5 a.
- Sein Mittelpunkt M liegt auf dem Kreis, der genau in der Mitte zwischen den beiden Viertelskreisen verläuft: Mittelpunkt A, Radius 1.5 a.
- Da die Figur symmetrisch ist, liegt M zudem auf der Symmetrieachse.

b Das Dreieck ASM ist ein halbes Quadrat mit der Seite a.



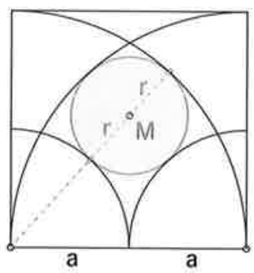
AM ist somit $AM = a\sqrt{2}$

AB ist Radius des grossen Viertelskreises:
$AB = 2a$

und $AB = AM + MB$
$= a\sqrt{2} + r$

Daraus folgt $2a = a\sqrt{2} + r$
$\mathbf{r} = 2a - a\sqrt{2} \approx \mathbf{0.59\,a}$

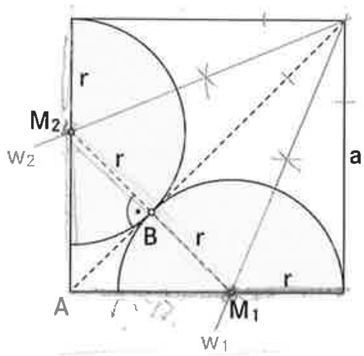
Der Durchmesser des Kreises entspricht der Breite des Viertelskreisrings: $2r = a$
$\mathbf{r = 0.5\,a}$



H160 Die Figur ist symmetrisch. Die Kreise berühren sich auf der Diagonale im Punkt B: $M_1B = M_2B = r$

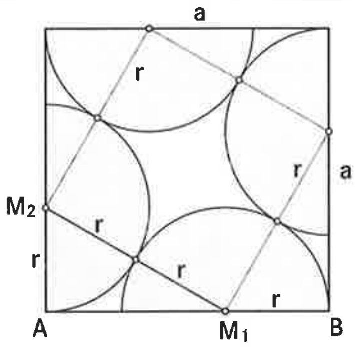
Das Dreieck AM_1M_2 ist rechtwinklig-gleichschenklig, ebenso das Dreieck AM_1B.
Daraus folgt: $AM_1 = r\sqrt{2}$

Die Quadratseite a hat folglich die Länge:
$a = r\sqrt{2} + r$
$a = 2.414213\ldots r$
$a \approx 2.41\,r$
$\mathbf{r \approx 0.41\,a}$



Die Konstruktion erfolgt mit Hilfe der Winkelhalbierenden w_1 und w_2.

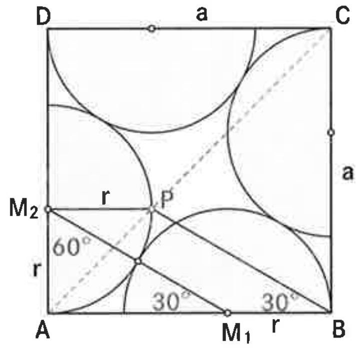
H161 Das Dreieck AM_1M_2 ist ein halbes gleichseitiges Dreieck:



AM_2 ist halbe Seite, wobei $AM_2 = r$
M_1M_2 ist Seite $M_1M_2 = 2r$
AM_1 ist Höhe $AM_1 = r\sqrt{3}$

AB ist Seite des Quadrates $AB = a$
und
$$\begin{aligned} AB &= AM_1 + M_1B \\ &= r\sqrt{3} + r \\ &= 2.732\ldots r \\ &\approx 2.73r \end{aligned}$$

Daraus folgt $2.73r \approx a$
$$\mathbf{r = 0.37a}$$



Lösungsidee für die Konstruktion:
- M_1BPM_2 ist ein Rhomboid, weil M_1B und M_2P parallel und gleich lang sind.
- Der Winkel bei B ist ein 30°-Winkel, weil AM_1M_2 ein halbes gleichseitiges Dreieck ist.
- Das Dreieck APM_2 ist ein halbes Quadrat. P liegt somit auch auf der Diagonale AC und lässt sich konstruieren.
- Mit P erhält man sofort auch M_2 und den Radius r.

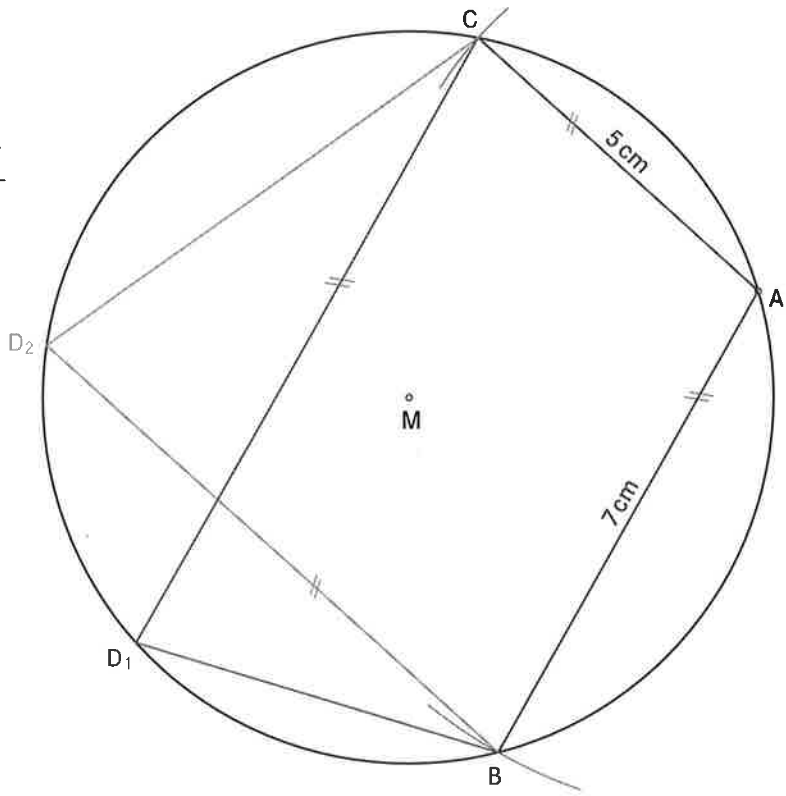
H162 Arbeitsblatt

H163 a, b
Die beiden Sehnen
AB = 7 cm und
AC = 5 cm lassen sich auf zwei verschiedene Arten zu einem gleichschenkligen Trapez ergänzen:

1. Parallele zu AB durch C → D_1

2. Parallele zu AC durch B → D_2

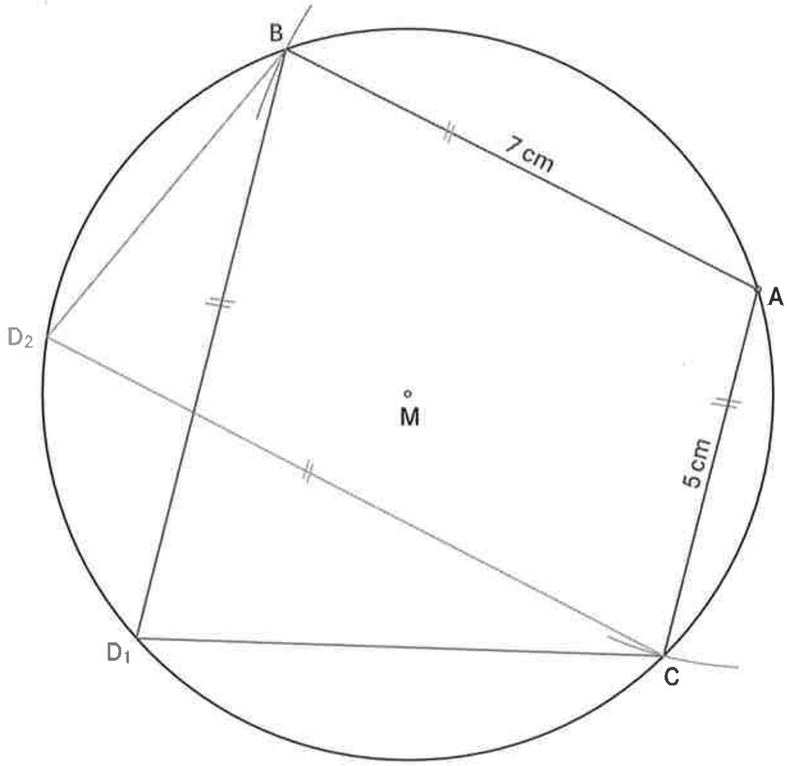
2 Lösungen



Variante
Zeichnet man am Anfang AB oberhalb und AC unterhalb A, so erhält man zwei zu ACD_1B und ACD_2B kongruente gleichschenklige Trapeze in anderer Lage: Sie sind an der Achse (AM) gespiegelt. **Abbildung nächste Seite**

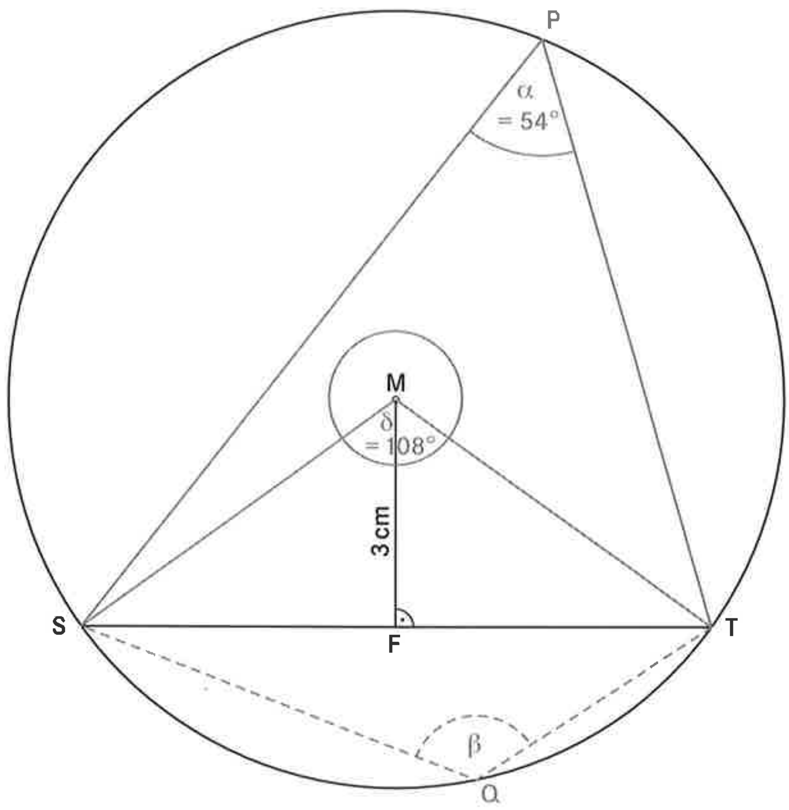
→

→



H164 **a** Zeichne von M aus eine beliebige Strecke MF = 3 cm.
ST steht dann senkrecht dazu.

b Beispiel:



c Gemessen:
α = 54°

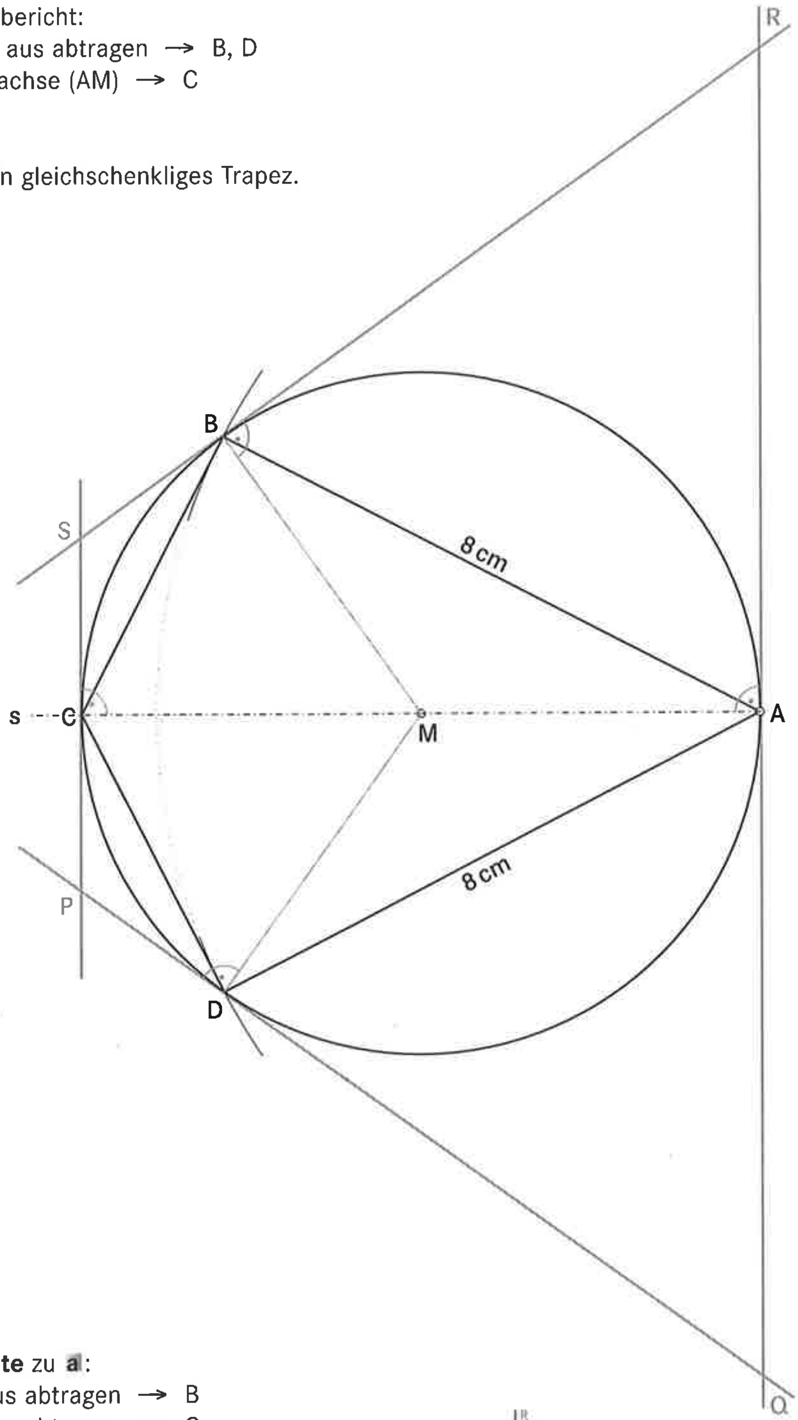
Folglich ist:
$\delta = 2\alpha$ = 108°

Für den Peripheriewinkel auf der andern Seite der Sehne gilt:
$\beta = 180° - \alpha$ = **126°**

Falls du deine Sehne ST oberhalb M gezeichnet hast, ist es auch möglich, dass du β gemessen und α berechnet hast. Die Grössen sind letztlich aber gleich.

H165 **a** Konstruktionsbericht:
- 8 cm von A aus abtragen → B, D
- Symmetrieachse (AM) → C

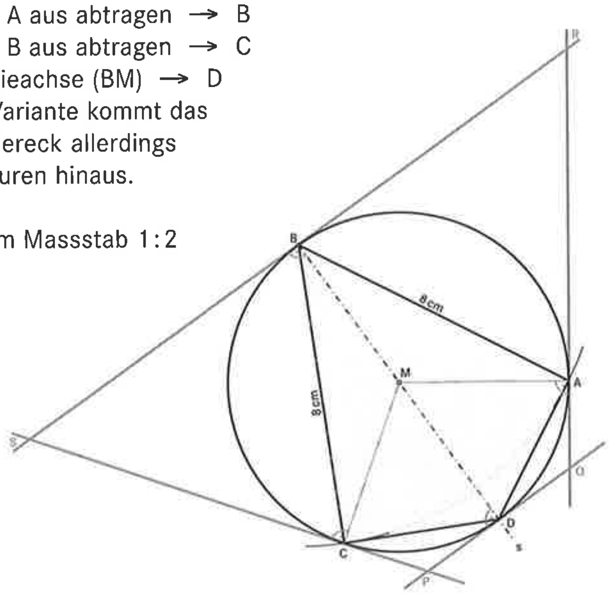
b Es entsteht ein gleichschenkliges Trapez.



Mögliche **Variante** zu **a**:
- 8 cm von A aus abtragen → B
- 8 cm von B aus abtragen → C
- Symmetrieachse (BM) → D

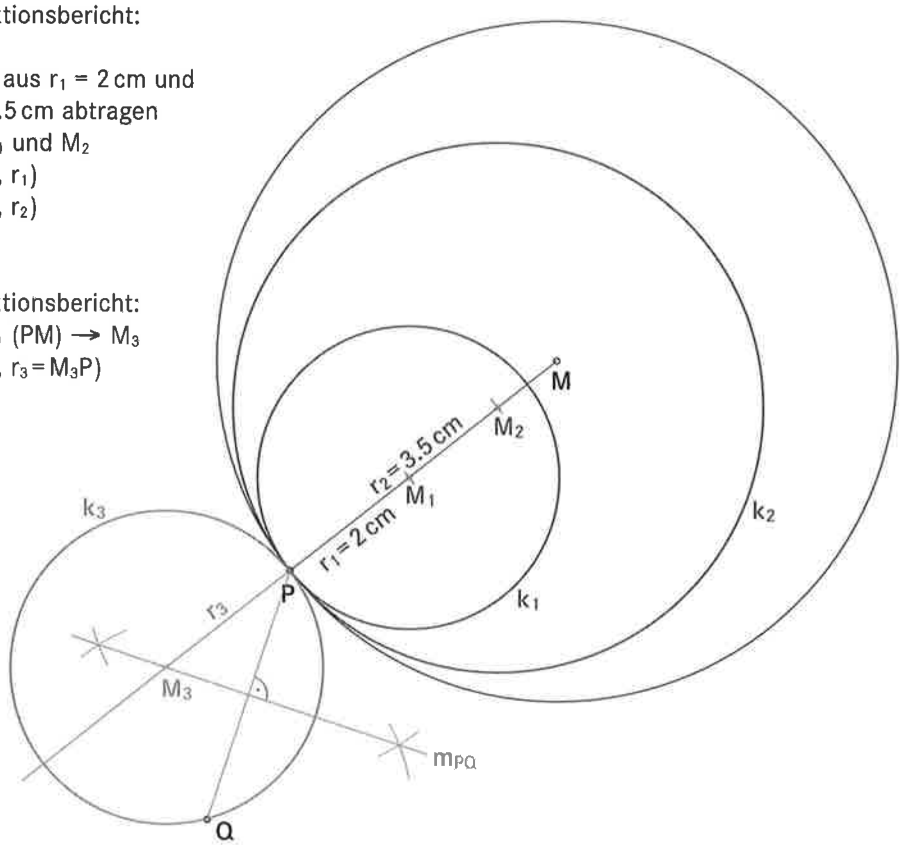
Bei dieser Variante kommt das Tangentenviereck allerdings über die Spuren hinaus.

Abbildung im Massstab 1:2

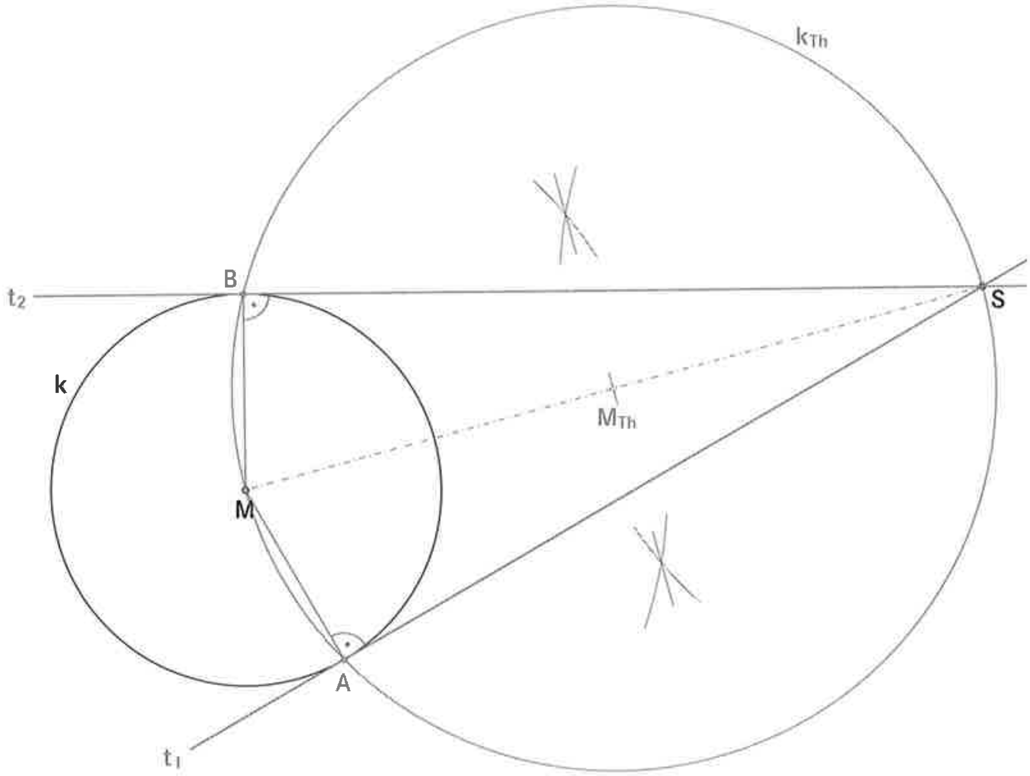


H166 **a** Konstruktionsbericht:
- (PM)
- von P aus $r_1 = 2\,\text{cm}$ und $r_2 = 3.5\,\text{cm}$ abtragen $\rightarrow M_1$ und M_2
- $k_1(M_1, r_1)$
  $k_2(M_2, r_2)$

b Konstruktionsbericht:
- $m_{PQ} \cap (PM) \rightarrow M_3$
- $k_3(M_3, r_3 = M_3P)$



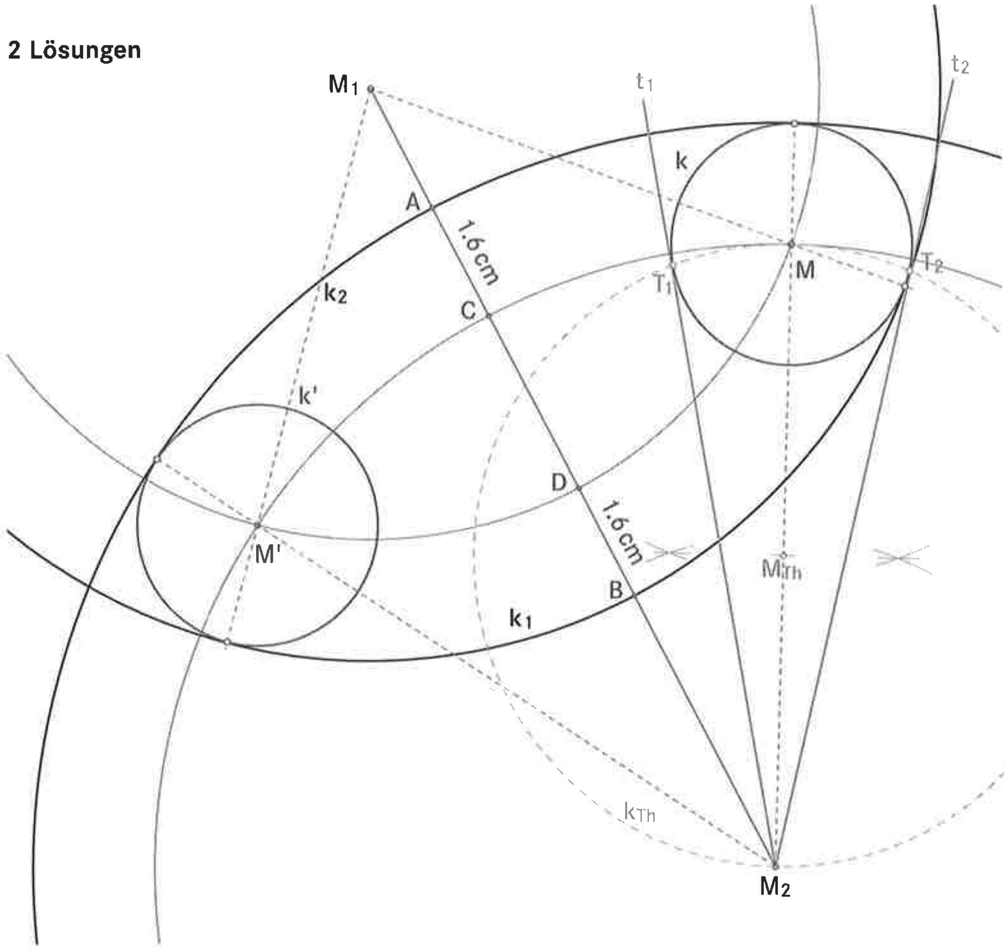
H167 Konstruktionsbericht:
- Thaleskreis k_{Th} über SM schneiden mit dem Kreis k $\rightarrow$ Berührungspunkte A und B
- $t_1 = (SA)$
- $t_2 = (SB)$



H168 **a** Lösungsidee:
Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt einerseits auf einem Kreis um M_1 mit dem Radius r_1 - 1.6 cm und anderseits auf einem Kreis um M_2 mit dem Radius r_2 - 1.6 cm.

Konstruktionsbericht:
- $(M_1M_2) \cap k_1, k_2 \longrightarrow A, B$
- von A aus 1.6 cm auf AM_2 abtragen $\longrightarrow$ A
- von B aus 1.6 cm auf BM_1 abtragen $\longrightarrow$ D
- $k(M_1, r=M_1D) \cap k(M_2, r=M_2C) \longrightarrow M, M'$
- $k = k(M, r = 1.6\,\text{cm})$
  $k' = k(M', r = 1.6\,\text{cm})$

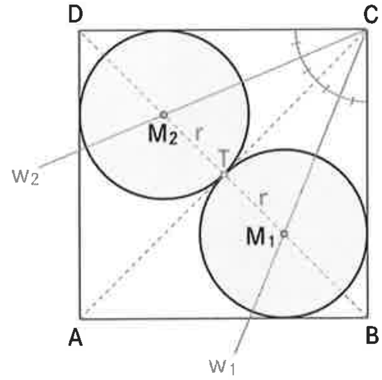
2 Lösungen



b Konstruktionsbericht für Tangenten an k (für k' analoges Vorgehen):
- Thaleskreis k_{Th} über M_2M schneiden mit dem Kreis k $\longrightarrow$ Berührungspunkte T_1 und T_2
- $t_1 = (M_2T_1)$
- $t_2 = (M_2T_2)$

Fehlerhinweis:
In der 1. Auflage des Aufgabenbuches hat sich leider bei dieser Aufgabe ein Fehler eingeschlichen.
In **b** sollte es heissen: Lege vom **M_2** aus die Tangente an k.

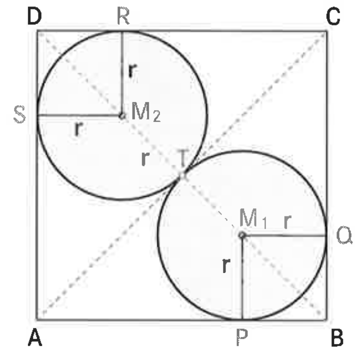
H169 **a** Lösungsidee für die Konstruktion:



- Die Figur ist symmetrisch:
  Die beiden Kreise berühren sich auf der Diagonale AC.
  Die beiden Kreismittelpunkte M_1 und M_2 liegen auf der Diagonale BD.
- Weil k_1 beispielsweise AC und BC berührt, muss M_1 zudem auf der Winkelhalbierenden w_1 liegen.
  Damit ist M_1 bestimmt.
- M_2 analog mit w_2
- $r = M_1T = M_2T$

Berechnung: Siehe nächste Seite. →

→ Berechnung des Kreisradius r:
Quadratseite a = 10 cm



$PBQM_1$ ist ein Quadrat der Seitenlänge r
BM_1 ist Diagonale $\qquad BM_1 = r\sqrt{2}$

SM_2RD ist ein Quadrat der Seitenlänge r
DM_2 ist Diagonale $\qquad DM_2 = r\sqrt{2}$

BD ist Diagonale des Quadrates ABCD

$$BD = a\sqrt{2}$$
$$\approx 14.14\,\text{cm}$$

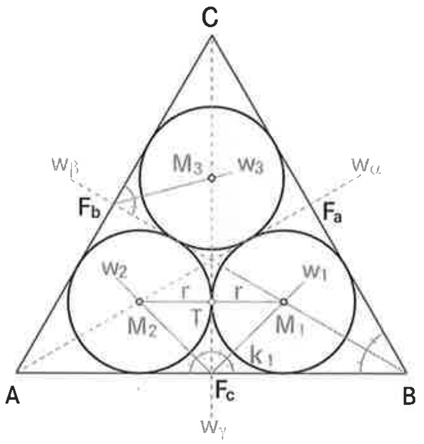
und

$$BD = BM_1 + M_1M_2 + DM_2$$
$$= r\sqrt{2} + 2r + r\sqrt{2}$$
$$= 4.828427\ldots r$$
$$\approx 4.82\,r$$

Daraus folgt $\qquad 4.82\,r \approx 14.14\,\text{cm}$

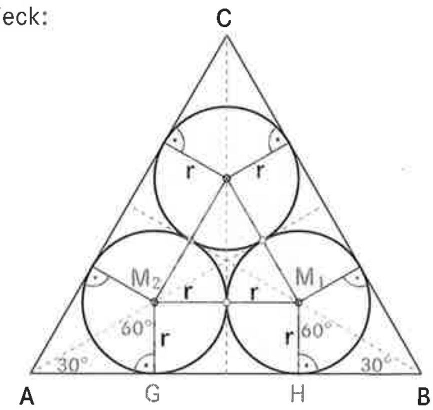
$$\mathbf{r \approx 2.93\,cm}$$

b Lösungsidee für die Konstruktion:



- Die Figur ist symmetrisch:
  Die Kreise berühren sich paarweise auf den Symmetrieachsen w_α, w_β, w_γ.
  M_1 liegt auf w_β, M_2 auf w_α und M_3 auf w_γ.
- Weil k_1 beispielsweise CF_c und BC berührt (Inkreis im Dreieck F_cBC), muss M_1 zudem auf der Winkelhalbierenden w_1 liegen.
  Damit ist M_1 bestimmt.
- M_2 analog mit w_2, M_3 analog mit w_3
- $r = M_1T = M_2T$ (beispielsweise)

Berechnung des Kreisradius r:
Dreieckseite a = 10 cm



Das Dreieck HBM_1 ist ein halbes gleichseitiges Dreieck:
HM_1 ist halbe Seite $\qquad HM_1 = r$
BM_1 ist Seite $\qquad BM_1 = 2r$
HB ist Höhe $\qquad HB = r\sqrt{3}$

Analoges gilt für das Dreieck AGM_2: $\quad AG = r\sqrt{3}$

AB ist Seite des Dreiecks $\qquad AB = a = 10\,\text{cm}$

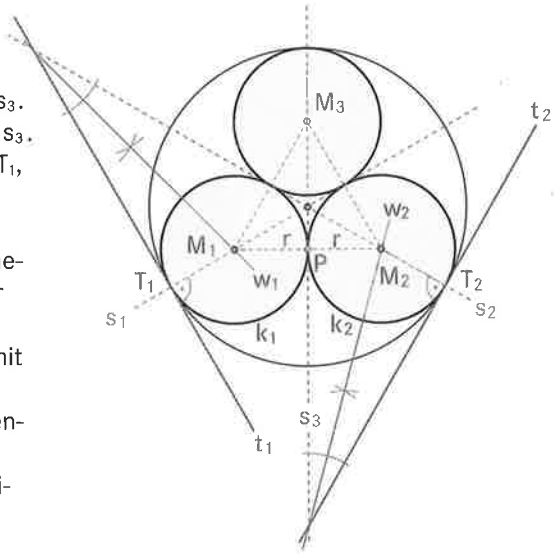
und

$$AB = AG + GH + HB$$
$$= r\sqrt{3} + 2r + r\sqrt{3}$$
$$= 5.46410\ldots r$$
$$\approx 5.46\,r$$

Daraus folgt $\qquad 5.46\,r \approx 10\,\text{cm}$

$$\mathbf{r = 1.83\,cm}$$

d Lösungsidee für die Konstruktion:
- Die Figur ist symmetrisch:
  Die Kreise berühren sich paarweise auf den Symmetrieachsen s_1, s_2 und s_3.
  M_1 liegt auf s_1, M_2 auf s_2 und M_3 auf s_3.
- k_1 berührt den umgebenden Kreis in T_1, also auch die Tangente t_1 in diesem Punkt.
- Weil k_1 die Tangente t_1 und die Symmetrieachse s_2 berührt, muss M_1 auf der Winkelhalbierenden w_1 liegen.
  Weil M_1 zudem auf s_1 liegt, ist M_1 damit bestimmt.
- $M_2 \in s_2$ analog mit der Winkelhalbierenden von s_3 und t_2
- M_3 beispielsweise mit dem gleichseitigen Dreieck $M_1M_2M_3$
- $r = M_1P = PM_2$ (beispielsweise)

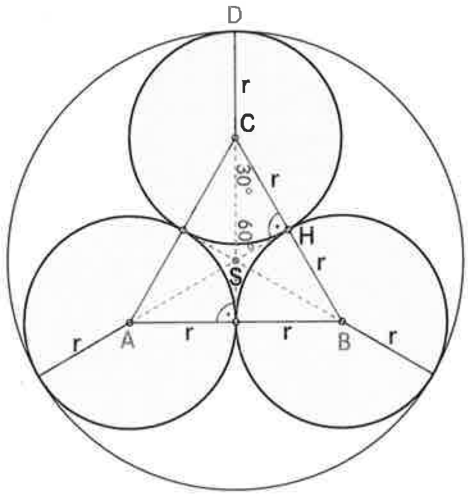


Berechnung des Kreisradius r:
Grosser Radius a = 6 cm

Das kleine Dreieck SHC ist ein halbes gleichseitiges Dreieck:
SH ist halbe Seite
HC ist Höhe, wobei $\quad HC = r$

SC ist Seite $\Rightarrow$ $\quad r = \frac{SC}{2}\sqrt{3}$

$$SC = 2r : \sqrt{3}$$
$$= 1.15470\ldots r$$
$$\approx 1.15\,r$$



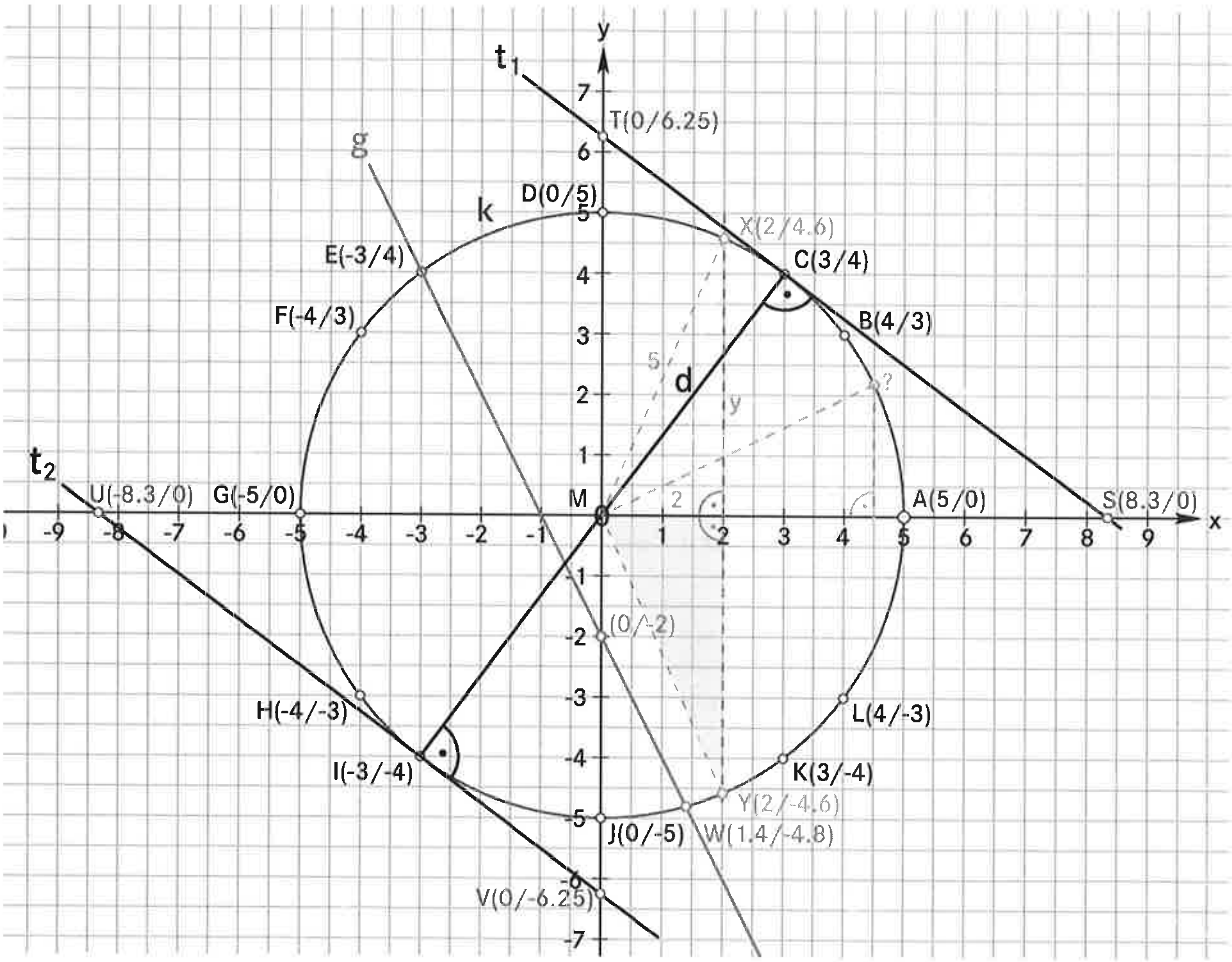
SD ist Radius des grossen Kreises
$$SD = a = 6\,\text{cm}$$
und $\quad SD = SC + CD$
$$\approx 1.15\,r + r = 2.15\,r$$

Daraus folgt $\quad 2.15\,r \approx 6\,\text{cm}$

$$\mathbf{r \approx 2.78\,cm}$$

H2 Kreise im Koordinatensystem

H21 **a** A(5/0), B(4/3), C(3/4), D(0/5), E(-3/4), F(-4/3), G(-5/0), H(-4/-3), I(-3/-4), J(0/-5), K(3/-4), L(4/-3)



b Der zweite Endpunkt des Durchmessers von C(3/4) aus ist **I(-3/-4)**.

c Tangente t_1 durch C: Schnittpunkt mit der x-Achse: S(8.3/0) genau: S($\frac{25}{3}$/0)
Schnittpunkt mit der y-Achse: T(0/6.25)

Tangente t_2 durch I: Schnittpunkt mit der x-Achse: U(-8.3/0) genau: S(-$\frac{25}{3}$/0)
Schnittpunkt mit der y-Achse: V(0/-6.25)

d Gerade g durch E und (0/-2): 2. Schnittpunkt mit dem Kreis: W(1.4/-4.8)

e **1** X(2/4.6) Y(2/-4.6)
2 X(2/**y=?**) Y(2/**y=?**)
Das eingezeichnete obere Dreieck (2/0)XM hat die Katheten 2 und y, und die Hypotenuse 5. Das untere Dreieck (2/0)YM ebenfalls.
Es gilt der Satz von Pythagoras: $2^2 + y^2 = 5^2$

$$y^2 = 5^2 - 2^2 = 21$$

$$\mathbf{y} = \pm\sqrt{21} \approx \mathbf{\pm 4.58} \quad \rightarrow \quad X(2/\mathbf{4.58}), Y(2/\mathbf{-4.58})$$

f Falls der Punkt (4.5/2.2) auf dem Kreis liegt, müsste der Satz von Pythagoras gelten:

$$4.5^2 + 2.2^2 \;?{=}?\; 5^2$$

$$25.09 \neq 25 \quad \rightarrow \quad (4.5/2.2) \notin k$$

Der Punkt (4.5/2.2) liegt **nicht** auf dem Kreis.

Fehlerhinweis:
In der 1. Auflage des Aufgabenbuches hat sich leider bei dieser Aufgabe ein Fehler eingeschlichen.
In **f** sollte es heissen: Liegt der Punkt **(4.5/2.2)** auf dem Kreis?
Der angegebene Punkt (4.5/3.5) liegt offensichtlich nicht auf dem Kreis.