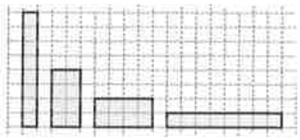
Primzahlen und Teilbarkeit

D

D1
Teiler und Vielfache

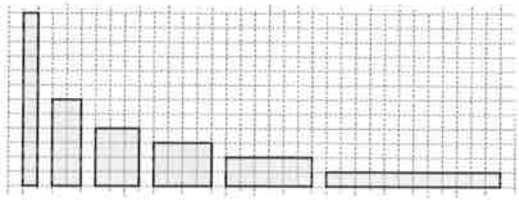
Quadrätchen und Würfelchen

D1



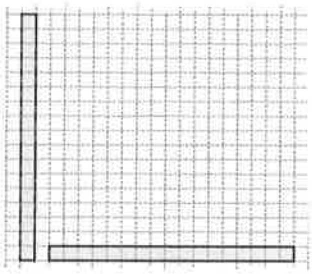
$8 \cdot 1,\ 4 \cdot 2,\ 2 \cdot 4,\ 1 \cdot 8$

D2



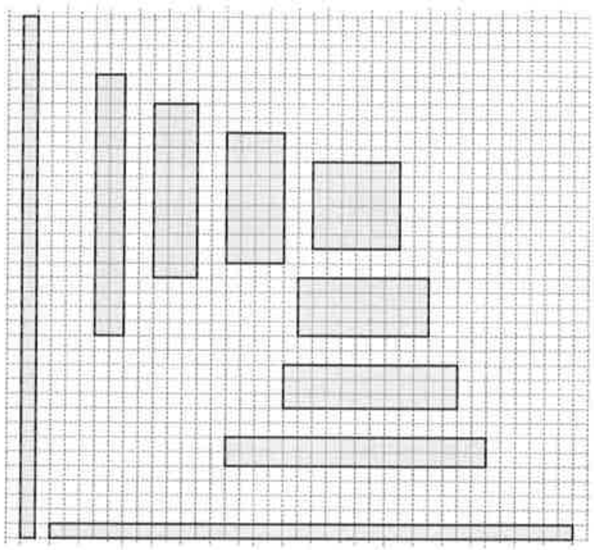
Arbeite mit System:
zuerst Länge 1, dann Länge 2, dann Länge 3, ..., immer sofern möglich.
$12 \cdot 1,\ 6 \cdot 2,\ 4 \cdot 3,\ 3 \cdot 4,\ 2 \cdot 6,\ 1 \cdot 12$

D3



Hier gibt es nicht viele Möglichkeiten.
$17 \cdot 1,\ 1 \cdot 17$

D4



Arbeite doch mal mit Symmetrien:
$36 \cdot 1$ und $1 \cdot 36$
$18 \cdot 2$ und $2 \cdot 18$
$12 \cdot 3$ und $3 \cdot 12$
$9 \cdot 4$ und $4 \cdot 9$
$6 \cdot 6$

D5 $1 \cdot 60,\ 2 \cdot 30,\ 3 \cdot 20,\ 4 \cdot 15,\ 5 \cdot 12,\ 6 \cdot 10,\ 10 \cdot 6,\ 12 \cdot 5,\ 15 \cdot 4,\ 20 \cdot 3,\ 30 \cdot 2,\ 60 \cdot 1$
(Zeichnung ähnlich wie oben).

D6 Die Anzahl kann auch ungerade sein. Wenn die gegebene Zahl von Quadrätchen eine Quadratzahl ist, so lässt sich genau ein Quadrat legen, welches durch Drehen unverändert bleibt und somit keine zweite Möglichkeit zulässt.

Schau die Fälle D1–D5 gut an.

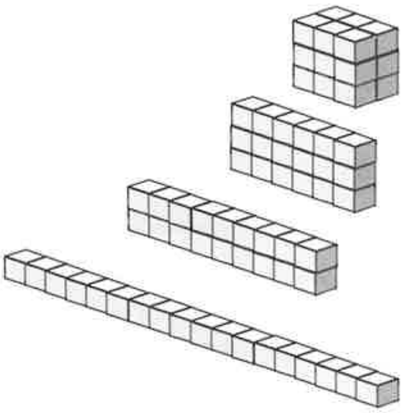
D7 So, wie man die Quadrate entlang einer Seite zerlegen kann, kann man auch das gesamte Rechteck zerlegen. Ist also, wie im Bild gezeigt, die Seite mit 10 Quadraten in $2 \cdot 5$ zerlegbar, dann ist auch das gesamte Rechteck mit Seitenlänge 2 oder 5 darstellbar.

D8 $1 \cdot 90,\ 2 \cdot 45,\ 3 \cdot 30,\ 5 \cdot 18,\ 6 \cdot 15,\ 9 \cdot 10,\ 10 \cdot 9,\ 15 \cdot 6,\ 18 \cdot 5,\ 30 \cdot 3,\ 45 \cdot 2,\ 90 \cdot 1$

Systematisch vorgehen:
$1 \cdot 90,\ 2 \cdot 45,\ 3 \cdot \ldots$

D9 $1 \cdot 144,\ 2 \cdot 72,\ 3 \cdot 48,\ 4 \cdot 36,\ 6 \cdot 24,\ 8 \cdot 18,\ 9 \cdot 16,\ 12 \cdot 12,\ 16 \cdot 9,\ 18 \cdot 8,\ 24 \cdot 6,\ 36 \cdot 4,\ 48 \cdot 3,\ 72 \cdot 2,\ 144 \cdot 1$

D10



$2 \cdot 3 \cdot 3$

$1 \cdot 6 \cdot 3$

$1 \cdot 9 \cdot 2$

$1 \cdot 1 \cdot 18$

Teilermengen

D11 $T_{16} = \{1, 2, 4, 8, 16\}$
$T_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

D12 $T_{11} = \{1, 11\}$
$T_{192} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 192\}$

D13 $T_{81} = \{1, 3, 9, 27, 81\}$ $T_{99} = \{1, 3, 9, 11, 33, 99\}$

D14 $T_{1000} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000\}$

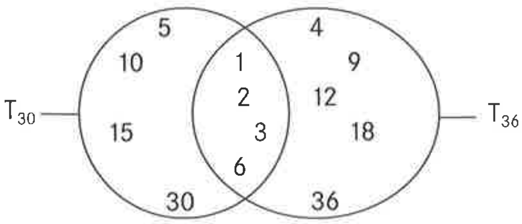
D15 $T_{2^6} = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6\}$

2^4 ist z. B. ein Teiler von 2^6.

D16 Das Produkt der Zahlen eines Paares ergibt immer die Zahl, deren Teiler man bestimmt hat. Bei Teilermengen von Quadratzahlen bleibt ein Teiler in der Mitte.

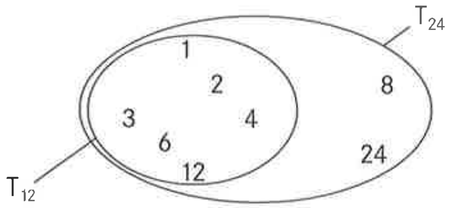
Schreibe die Paare auf und bilde ihre Produkte.

D17



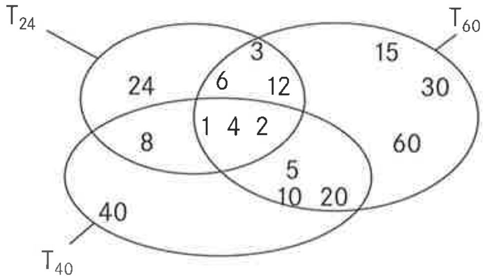
$T_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
$T_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

D18



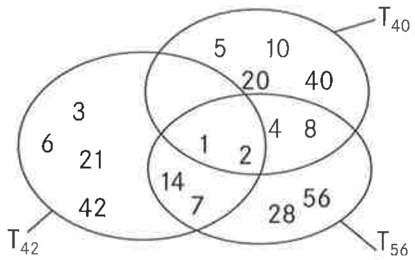
$T_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$T_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

D19



$T_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$
$T_{40} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$
$T_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$

D20



$T_{40} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$
$T_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$
$T_{56} = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$

Richtig oder falsch?

D21 **a)** richtig **b)** falsch **c)** falsch **d)** richtig

D22 **a)** richtig **b)** richtig **c)** richtig **d)** richtig

D23 **a)** richtig **b)** richtig **c)** falsch **d)** falsch

D24 **a)** falsch **b)** richtig **c)** richtig **d)** falsch

D25 **a)** richtig **b)** richtig **c)** richtig **d)** falsch

Rechne die Potenzen nicht aus.
Es ist einfacher so.

D26 **a)** richtig **b)** richtig **c)** falsch **d)** richtig

D27 **a)** richtig **b)** falsch **c)** falsch **d)** falsch

D28 **a)** richtig **b)** richtig **c)** richtig **d)** richtig

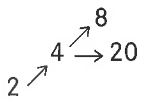
D29 **a)** richtig **b)** richtig (Beispiel: 2, 3, 5) **c)** richtig **d)** richtig

d) 2 ist entweder Teiler von n (wenn n gerade ist) oder von (n + 1), wenn n ungerade ist. 3 ist entweder Teiler von n oder von (n + 1) oder von (n + 2). Also sind 2 und 3 Teiler von $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$.

D30 **a)** richtig **b)** richtig **c)** falsch **d)** richtig

Teilbarkeitsdiagramm

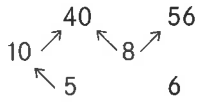
D31



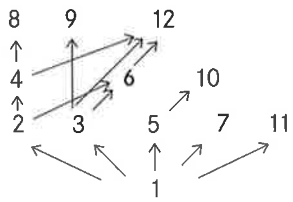
D32

1 → 10 → 100 → 1 000 → 10 000

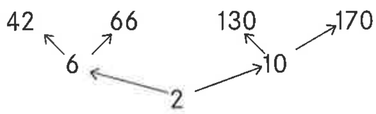
D33



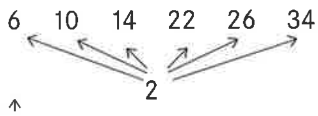
D34



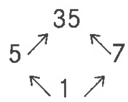
D35



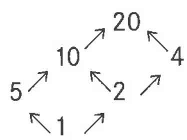
D36



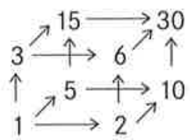
D37



D38



D39



D40

13 11 7
5 3 2 (keine Pfeile)

D41

Suche die Teiler der Zahl 225
Zerlege die Zahl 225 in ihre Faktoren.
$225 = 3^2 \cdot 5^2$
(Diagramm)
T(225) = {1, 3, 9, 5, 15, 45, 25, 75, 225}

Der Text ist von rechts nach links geschrieben und heisst etwa wie nebenstehend aufgeführt.

D42

216	72	24	8
108	36	12	4
54	18	6	2
27	9	3	1

D43 496 ist vollkommen, denn
$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$.

$T_{496} = \{1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496\}$

8128 ist vollkommen, denn
$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064 = 8128$.

$T_{8128} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1\,016, 2\,032, 4064, 8128\}$

28 ist auch vollkommen, da $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.

220 und 284 sind befreundet, weil
$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$ und
$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.

$T_{220} = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220\}$
$T_{284} = \{1, 2, 4, 71, 142, 284\}$

1184 und 1210 sind befreundet, weil $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1210$ und
$1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 = 1184$.

$T_{1184} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 37, 74, 148, 296, 592, 1184\}$
$T_{1\,210} = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110, 121, 242, 605, 1210\}$

Quersumme und Teilbarkeit

D44 –

D45 **a)** 7 **b)** 25 **c)** 19 **d)** 36

D46 **a)** 21 **b)** 57 **c)** 44 **d)** 47

D47 **a)** 3 **b)** 9 **c)** 9

D48
a) 2|60, 3|60, 4|60, 5|60, 6|60, 12|60
b) 2|90, 3|90, 5|90, 6|90, 9|90

D49
a) 2|500, 4|500, 5|500, 25|500
b) 2|600, 3|600, 4|600, 5|600, 6|600, 8|600, 12|600, 25|600

D50
a) 2|936, 3|936, 4|936, 6|936, 8|936, 9|936, 12|936
b) 2|1008, 3|1008, 4|1008, 6|1008, 8|1008, 9|1008, 12|1008

D51
a) 2|30 000, 3|30 000, 4|30 000, 5|30 000, 6|30 000, 8|30 000, 12|30 000, 25|30 000
b) keine

b) Die Teiler von 30 000 (Aufgabe a) sind sicher nicht Teiler von 30 001. Zu prüfen ist nur noch auf Teilbarkeit von 9.

D52
a) 2|33 708, 3|33 708, 4|33 708, 6|33 708, 12|33 708
b) 3|235 425, 5|235 425, 25|235 425

D53 2|1 111 111 110, 3|1 111 111 110, 5|1 111 111 110, 6|1 111 111 110, 9|1 111 111 110

D54 **a)** 0, 2, 4, 6, 8 **b)** 2 **c)** 0, 9 **d)** keine Lösung

D55 **a)** 2, 5, 8
b) 06, 12, 26, 32, 46, 52, 66, 72, 86, 92
c) 00, 09, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99
d) 12, 62, 37, 87

D56 1008 und 10 008

D57 9992 und 99 992

D58 1, 3, 7, 9

D59 Siehe den Hinweis rechts.
Die erste Klammer ist immer durch 9 teilbar. Die zweite Klammer ist die Quersumme der Zahl. Von ihr hängt es nun ab, ob die Zahl selbst durch 9 teilbar ist.

Nimm als Beispiel die Zahl 2457.
Das bedeutet
$2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 1 =$
$2 \cdot (1 + 999) + 4 \cdot (1 + 99) +$
$5 \cdot (1 + 9) + 7 \cdot (1) =$
$(2 \cdot 999 + 4 \cdot 99 + 5 \cdot 9) +$
$(2 + 4 + 5 + 7)$
Schau nun diesen Term an. Wovon hängt es ab, ob er durch 9 teilbar ist?

D60

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0	1	2	0	4	3	2	1	0	10	10
100	0	1	0	0	4	2	4	1	0	1	4
1 000	0	1	0	0	4	6	0	1	0	10	4
10 000	0	1	0	0	4	4	0	1	0	1	4
100 000	0	1	0	0	4	5	0	1	0	10	4
1 000 000	0	1	0	0	4	1	0	1	0	1	4

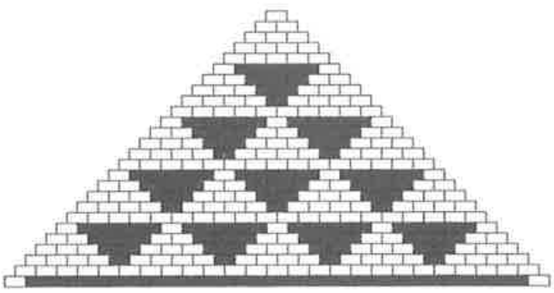
D61 {1, 1 111, 1 111 111, 1 111 111 111, ...}

Die Elemente von A ergeben bei Division durch 3 den Rest 1. Wenn man von diesen Zahlen 1 subtrahiert, sind sie also durch 3 teilbar. Bei welchen Elementen von B erhalte ich ein Vielfaches von 3, wenn ich 1 subtrahiere?

D62 **a)** 2 **b)** 2 **c)** 2 **d)** 5
e) 6 **f)** 2 **g)** 0 **h)** 10

D63 **a)** 0 **b)** n - 1 **c)** 1 **d)** 0

D64



Falls du bis zur 25. Zeile weitermachen möchtest, wirst du es mit recht grossen Zahlen zu tun haben. Für das Muster ist jedoch nicht die Zahl selber wichtig, sondern nur deren Teilbarkeit durch 5. Also genügt es, nur mit den Fünferresten zu arbeiten!
Bilde also bei jeder Summe direkt den Fünferrest. In dieser Rechnungsart gibt also $1 + 4 \rightarrow 0$, $3 + 3 \rightarrow 1$, $4 + 4 \rightarrow 3$, usw.
Dadurch wird es viel einfacher!

D65 $11 \mid 71\,929$, $11 \nmid 5\,564$, $11 \mid 4\,147$, $11 \mid$, $8\,987$, $11 \mid 1\,815$, $11 \nmid 987\,654\,321$, $11 \mid 918\,273\,645\,546\,372\,819$

Richtig oder falsch?

D66	**a)** richtig	**b)** falsch
D67	**a)** richtig	**b)** richtig
D68	**a)** falsch	**b)** richtig
D69	**a)** richtig	**b)** richtig
D70	**a)** falsch	**b)** falsch
D71	**a)** richtig	**b)** falsch
D72	**a)** falsch	**b)** richtig
D73	**a)** falsch	**b)** richtig
D74	**a)** falsch	**b)** richtig
D75	**a)** falsch	**b)** richtig: 36, 108

Zahlenspielereien

D76 891 (durch Prüfen aller Vielfachen von 99)

Die Zahl muss ein Vielfaches von 99 sein.

D77 Es geht mit beliebigen natürlichen Zahlen. Die Quersumme gibt ja den Neunerrest an und wenn man sie abzieht, dann fällt dieser Rest gerade weg.

D78 1320

Die Zahl muss ein Vielfaches vom kgV(20, 24) sein.

D79 Ja. Die Zahl ist sicher durch 1001 teilbar, da das zweimalige Hintereinanderschreiben einer dreistelligen Zahl einer Multiplikation mit 1001 gleich kommt. Und 7, 11 und 13 sind Teiler von 1001.

D80 Bei einer Zahl ändert die Quersumme nicht, wenn man die Ziffern vertauscht. Diese Quersumme gibt aber den Neunerrest an. Die Differenz zweier Zahlen mit demselben Neunerrest ergibt eine Zahl mit Neunerrest 0. Die Quersumme der Differenz muss also den Neunerrest 0 ergeben. $3 + 4 + 1 + 5 = 13$. Neunerrest 0 erreicht man nur durch die zusätzliche Ziffer 5, mit der man auf 18 ergänzt.

D81 5, 13 (und 563)

Hoffentlich hat dein Rechner für x! eine Taste.

D82 durch 9, 999, $10^{41} - 1$ (41 Neunen) und durch die Zahl v selbst.

Die Zahl v hat 123 Neunen. Die Teiler von 123 sind 1, 3, 41, und 123. Man kann also die Zahl v in 41 Teile mit je drei Neunen unterteilen. Jeder dieser Teile ist durch 999 teilbar.

D83 Man muss ja nicht daran glauben, wenn man nicht will.

D84

	Zahl	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	weitere Teiler
I	10	x			x				x			
II	12	x	x	x		x				x		
III	15		x		x						x	
IV	6	x	x			x						
V	24	x	x	x		x	x			x		24
VI	60	x	x	x	x	x			x	x	x	20, 30, 60
VII	120	x	x	x	x	x	x		x	x	x	20, 24, 30, 40, 60, 120
VIII	36	x	x	x		x		x		x		18, 36
IX	45		x		x			x			x	45

Ist eine Zahl t ein Teiler einer Zahl n, so ist auch jeder Teiler von t ein Teiler von n. Mit diesem Satz kann man schon einmal I, II und III lösen.

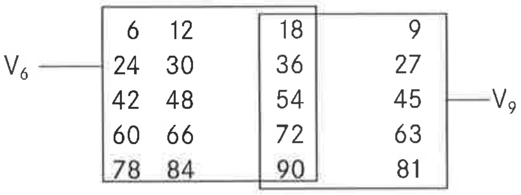
c) In der ersten Spalte hätten auch die Vielfachen der angegebenen Zahlen stehen können.

Menge der Vielfachen

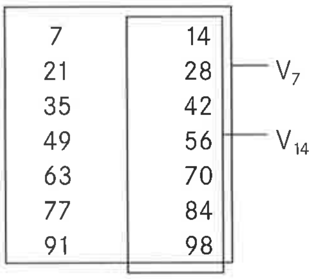
D85

a) 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60.
b) 9 Gondeln transportieren 54 Personen.

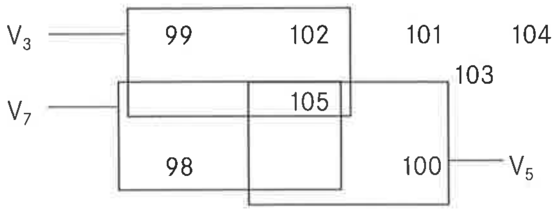
D86



D87

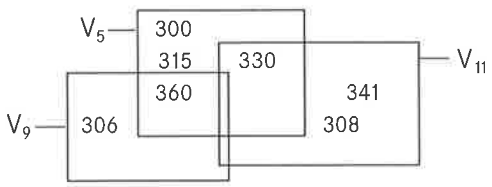


D88



Vielleicht schreibst du für jede Zahl zunächst auf, welche der drei Teiler 3, 5 und 7 sie hat.
Nachher suchst du das entsprechende Feld im Diagramm und trägst die Zahl ein.

D89



Vielleicht schreibst du für jede Zahl zunächst auf, welche der drei Teiler 5, 9 und 11 sie hat. Dann suchst du das entsprechende Feld im Diagramm und trägst die Zahl ein.

D90

Die 72 Nougateier haben 224.64 Mark gekostet und der Preis für ein einzelnes Ei betrug 3.12 Mark.

$72 = 8 \cdot 9$
Der Preis ist durch 8 teilbar; also ist die letzte Ziffer ...
Ausserdem ist der Preis durch 9 teilbar.; also ist die erste Ziffer ...

Kontrollaufgaben

D91

$180 = 1 \cdot 180 = 2 \cdot 90 = 3 \cdot 60 = 4 \cdot 45 =$
$5 \cdot 36 = 6 \cdot 30 = 9 \cdot 20 = 10 \cdot 18 = 12 \cdot 15 =$
$15 \cdot 12 = 18 \cdot 10 = 20 \cdot 9 = 30 \cdot 6 = 36 \cdot 5 =$
$45 \cdot 4 = 60 \cdot 3 = 90 \cdot 2 = 180 \cdot 1$
$T_{180} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180\}$

Gehe systematisch vor:
$1 \cdot 180,\ 2 \cdot ...,\ 3 \cdot ...,$ falls es geht.

D92

$T_{3^4} = \{1, 3, 3^2, 3^3, 3^4\}$

3^4 nicht ausrechnen. Überlegen!

D93

$\{1, 2, 3, 6\}$
Übrigens gilt: $T_{36} \cap T_{42} = T_{ggT(36,\,42)} = T_6$

$T_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$
$T_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$

D94

23 046 = 23 000 + 46. Da beide Summanden offensichtlich durch 23 teilbar sind, ist es auch die Summe.

Gemeint ist die Regel: Ist t Teiler zweier (verschiedener) Zahlen, so ist t auch Teiler ihrer Summe.

D95

10 296 ist durch 2, 3, 4, 6, 8, 9, und durch 12 teilbar.

Du musst die Teilbarkeitssätze gut kennen und können.

D96

a) 1, 4, 7 **b)** keine Lösung **c)** 0, 4, 8

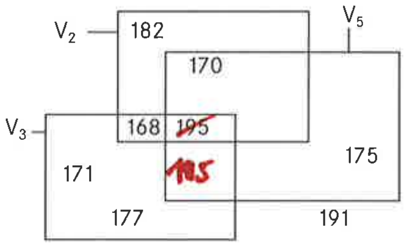
D97

a) richtig
b) falsch. Beispiel: 180 ist nicht durch 120 teilbar.

D98

a) falsch **b)** richtig

D99



Vielleicht schreibst du für jede Zahl zunächst auf, welche der drei Teiler 2, 3 und 5 sie hat.
Nachher suchst du das entsprechende Feld im Diagramm und trägst die Zahl ein.

D100

48, 96, 192

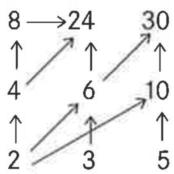
D101

1, 2, 3, 6, 9, 18, 19, 27, 38, 54

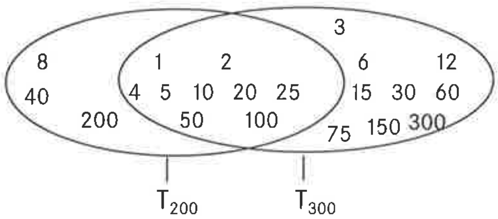
D102

126

D103



D104



D105

$\{10, 25, 40, 55, ...\}$

D2
Primzahlen, ggT und kgV

Den Primzahlen auf der Spur

D106 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …

D107

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Die letzte Zahl, die gestrichen wird, ist 91. Nach Abstreichen der Siebnerzahlen ist also fertig.

D108 ERATOSTHENES, griechischer Gelehrter und Dichter aus Kyrene, * um 275 v. Chr, † um 195 v. Chr.; Leiter der Bibliothek von Alexandria; bezeichnete sich als erster als Philologe; schrieb über die «alte Komödie» und stellte Katasterismoi (Sagen von Verwandlungen in Sterne) zusammen; machte durch Einführung der Mathematik und Astronomie in die Geografie diese zur Wissenschaft; er berechnete annähernd richtig den Umfang der Erdkugel aus den Sonnenhöhen an zwei Punkten des gleichen Meridians; er entwarf eine Erdkarte und fand ein Verfahren zur Auszählung der Primzahlen.

Verwende Lexika, mathematische Nachschlagewerke, Internet, …

D109

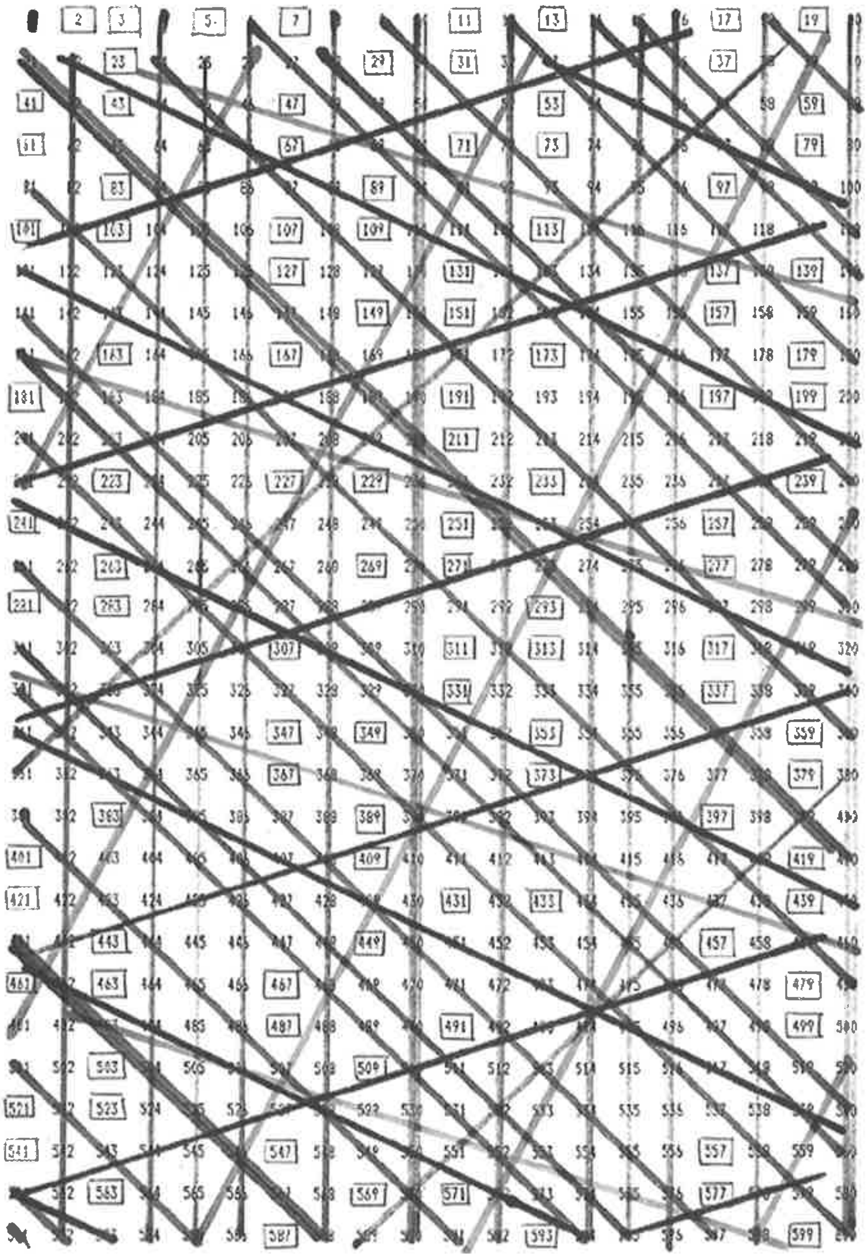
a) 210 , 330, 390, 462, 510, 546 und 570 sind viermal gestrichen, weil sie vier verschiedene Primfaktoren enthalten.

b) 23 Primzahlzwillinge:

3/5	5/7	11/13	17/19
29/31	41/43	59/61	71/73
101/103	107/109	137/139	149/151
179/181	191/193	197/199	227/229
281/283	311/313	347/349	419/421
431/433	461/463	521/523	

c) Primzahldrillinge: nur 3, 5, 7.

Streiche zunächst die Vielfachen mit Bleistift, bis du erkennst, wie sie angeordnet sind. Verwende dann ein Lineal und streiche ganze Linien ab.



D110 19, 29, 59, 79, 89

D111 149

D112

1. Es genügt, nur Primzahlen als Teiler zu prüfen.
2. Mit dem Prüfen kann abgebrochen werden, wenn das Quadrat des Prüfteilers t grösser als die Testzahl n ist.

Beispiel: Ist 47 eine Primzahl?
$7 \cdot 7 = 49 > 47$
Man muss nur alle Primzahlen bis 7 prüfen. Denn wenn es einen echten Teiler von 47 gibt, der grösser als 7 ist, dann gibt es auch mindestens einen Primfaktor, der kleiner als 7 ist.
2, 3, 5 und 7 sind keine Teiler von 47, also ist 47 eine Primzahl.

D113 Nein. $667 = 23 \cdot 29$

D114 Ja. Sie ist durch keine der Primzahlen < 37 teilbar.

D115 –

D116 Pascal-Programm:

```
PROGRAM Primzahlen; {W-Dur}

VAR
  e,n,t: LongInt;

BEGIN
  Write( Zahlen untersuchen bis' );
  ReadLn(e);
  Write(2:8,3:8);
  n:=5;
  REPEAT
    IF e=3 THEN Write(3:8) ELSE
    BEGIN
      t:=1;
      REPEAT
        t:=t+2
      UNTIL (t*t>n) OR (n MOD t=0);
      IF t*t>n THEN Write(n:8)
    END;
    n:=n+2
  UNTIL n>e;
  WriteLn
END.
```

Versuche im ersten Anlauf noch nicht, Tricks einzubauen. Wenn das Programm funktioniert, so kannst du das Programm immer noch schneller machen.

BASIC-Programm:

```
REM  Primzahlen {W-Dur}
     CLS
     INPUT "Zahlen unter-
     suchen bis"; e
     PRINT 2, 3,
     FOR n = 5 TO e STEP 2
        t = 3
100     IF n MOD t = 0 THEN 200
        t = t + 2
        IF t * t <= n THEN 100
        PRINT n,
200  NEXT n
     END
```

D117 $2^3 - 1 = 7$ ist prim, also 2. Mersenne-Primzahl.
$2^4 - 1 = 15 = 3 \cdot 5$.
$2^5 - 1 = 31$ ist prim, also 3. Mersenne-Primzahl.
$2^6 - 1 = 63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$.
$2^7 - 1 = 127$ ist prim, also 4. Mersenne-Primzahl.

D118 **a)** 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97
b) Für n = 41 entsteht 41^2 und somit keine Primzahl.

D119 $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$
Die Fermatzahlen wachsen wegen der Doppelpotenz sehr schnell.
Für n = 5 entsteht die Zahl $F_4 = 4\,294\,967\,297$.
Von Hand dauert die Berechnung wohl einige Zeit. Ganz zu schweigen vom Finden eines Teilers, denn es bleibt nichts anderes übrig, als durch alle Primzahlen < 65 536 zu teilen. Es ist anzunehmen, dass du selbst mit dem Taschenrechner nicht die Geduld hattest, so lange zu probieren, bis du den Teiler 641 gefunden hast.

D120 2, 3, 5, 7, 11, 13. Man kann vermuten, dass gerade die Primzahlen herauskommen. Es handelt sich hier um den wilsonschen Satz, der von Lagrange bewiesen worden ist.

Hoffentlich hat dein Rechner für x! eine Taste.

Primfaktorzerlegung

D121 **a)** $14 = 2 \cdot 7$ **b)** $15 = 3 \cdot 5$ **c)** $16 = 2^4$
d) 17 ist prim **e)** $18 = 2 \cdot 3^2$

D122 **a)** $28 = 2^2 \cdot 7$ **b)** $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
c) $64 = 2^6$ **d)** $2^3 \cdot 3^2$ **e)** $2^3 \cdot 11$

D123 **a)** $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ **b)** $91 = 7 \cdot 13$
c) $92 = 2^2 \cdot 23$
d) $93 = 3 \cdot 31$ **e)** $94 = 2 \cdot 47$

D124 **a)** $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ **b)** $361 = 19^2$
c) $362 = 2 \cdot 181$, **d)** $363 = 3 \cdot 11^2$
e) $364 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$

D125 **a)** $663 = 3 \cdot 13 \cdot 17$ **b)** $740 = 2^2 \cdot 5 \cdot 37$
c) $999 = 3^3 \cdot 37$

D126 **a)** $10\,124 = 2^2 \cdot 2531$ **b)** $10\,125 = 3^4 \cdot 5^3$

D127 $11! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$

D128

Runde	z	t	t notieren?
1.	360	2	→ 2
2.	180	2	→ 2
3.	90	2	→ 2
4.	45	2	
5.	45	3	→ 3
6.	15	3	→ 3
7.	5	3	
8.	5	5	→ 5

D129

```
REM Primfaktorzerlegung
REM ————————
    INPUT «Zu zerlegende Zahl:»; Z
    PRINT «Gefundene Faktoren:»;
    T = 2
100 IF Z MOD T > 0 THEN 200
    PRINT T;
     Z = Z / T
     IF Z > 1 THEN 10
    GOTO 999
200 T = T + 1
    GOTO 100
999 END
```

D130

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$
$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$ $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$
$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ $3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$ $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$
$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

Es gibt 10 Möglichkeiten.

D131 Die Kanufahrerin ist 41 Jahre alt.

$369 = 3 \cdot 3 \cdot 41$
Die Varianten 3 m Kanu, 3 Jahre alt und 41 Kinder oder 41 m Kanu, 3 Jahre alt und 3 Kinder sind unwahrscheinlich.

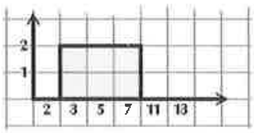
D132 In der Codierung wird nur angegeben, wie oft ein Primfaktor auftritt. Die erste Zahl bezieht sich immer auf die erste Primzahl, also auf 2, die zweite immer auf die zweite Primzahl, also auf 3, die dritte immer auf 5, die vierte auf 7, usw.

D133 $11 = (0,0,0,0,1)$, $12 = (2,1)$, $13 = (0,0,0,0,0,1)$,
$14 = (1,0,0,1)$, $15 = (0,1,1)$, $16 = (4)$,
$17 = (0,0,0,0,0,0,1)$, $18 = (1,2)$,
$19 = (0,0,0,0,0,0,0,1)$, $20 = (2,0,1)$

D134 **a)** $(0,3) = 27$ **b)** $(0,0,0,0,1,1) = 143$
c) $(6,0,6) = 1\,000\,000$

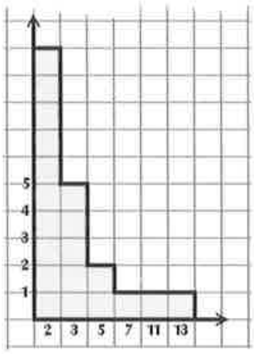
c) $(6,0,6) = (2 \cdot 5)^6$

D135



$11\,025 = 9 \cdot 25 \cdot 49$

D136



$13! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot$
$(2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot$
$(3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 13$

D137 30

D138 6

D139 210

Es müssen die kleinsten Primfaktoren vorkommen ...

D140 **a)** 4, 6, 8, 12
b) Addiere im Primfaktorcode zu jeder Zahl 1 und multipliziere die Ergebnisse miteinander.
c) $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1)$

D141 Er wurde 22 Jahre alt und fiel im Jahre 1512.

$451\,066 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 101$

Der grösste gemeinsame Teiler (ggT)

D142 **a)** 2 **b)** 5 **c)** 3 **d)** 11

D143 **a)** 17 **b)** 12 **c)** 14 **d)** 8

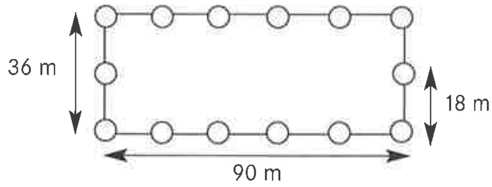
D144 **a)** 199 **b)** 25 **c)** 150 **d)** 1

D145	**a)** 54	**b)** 16	**c)** 23	**d)** 1 250
D146	**a)** 15	**b)** 4	**c)** 84	**d)** 198
D147	**a)** 63	**b)** 179	**c)** 1	**d)** 12
D148	**a)** 11	**b)** 260	**c)** 15	**d)** 8!

D149 Der ggT teilerfremder Zahlen ist 1.

D150 In der Schnittmenge befinden sich die gemeinsamen Teiler (gT). Die grösste Zahl in der Schnittmenge ist also der ggT.

D151 **a), c)**



b) ggT(90, 36) = 18, also 18 m Abstand

Wenn alle Baumabstände gleich gross sein sollen, muss der Abstand ein gemeinsamer Teiler von 90 m und 36 m sein. Damit man möglichst wenig Bäume braucht, wählt man den ggT.

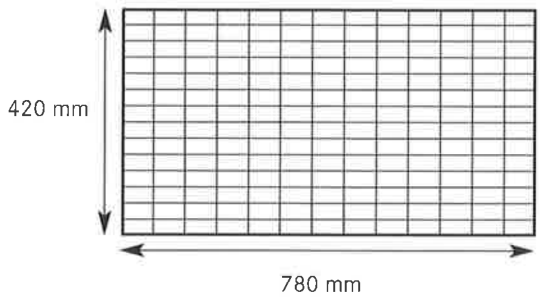
D152 ggT(120, 64) = 8, also 8x8-dm-Platten

Rechne in dm um.

D153 1.4 m

Rechne in dm um.

D154 Teilrechtecke: 30 mm · 60 mm
Anzahl Teilrechtecke: 14 · 13 = 182



Schrumpfe die lange Seite samt Platten auf die halbe Länge, dann ist die Aufgabe gleich wie D152.
ggT(420, 390) = 30

D155 2 · 2 · 3 · 11 = 132

1452 = (2,1,0,0,2)
1320 = (3,1,1,0,1)
ggT(1 452, 1 320) = (2,1,0,0,1)

D156 Die Schnittmenge der Balken ergibt die Balken des ggT.

Primfaktorendiagramm
vgl. D135 und D136.

D157 **a)** 517 **b)** 225 **c)** 274

D158 4 Lösungen: 14, 28, 42, 56

14 ist Teiler der gesuchten Zahl. In Frage kommen also nur die Vielfachen von 14.

D159 1, 4, 9

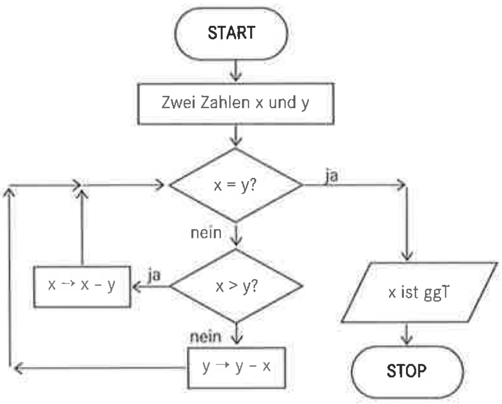
D160 ggT(42, 112) = 14, also 42 : 112 = 3 : 8.
Die Torten müssen geachtelt werden und jede Person bekommt drei Stücke.

D161

x	x = y ?	y
70	≠	28
70 - 28 = 42	≠	28
42 - 28 = 14	≠	28
14	=	28 - 14 = 14

a) ggT(70, 28) = 14
b) ggT(621, 393) = 3
c) ggT(5095, 505) = 5
d) Im euklidischen Algorithmus wird durch die kleinere Zahl dividiert mit Rest. Beim Algorithmus dieser Aufgabe wird statt der Division die kleinere Zahl mehrmals hintereinander subtrahiert.

D162



D163

Pascal-Programm:

```
PROGRAM ggT;
VAR
   x,y: Word;
BEGIN
   Write(« 1. Zahl»); ReadLn(x);
   Write(«2. Zahl»); ReadLn(y);
   WHILE x<>y DO
   IF x>y THEN x:=x-y ELSE y:=y-x;
   Write( Der ggT ist' ,x)
END.
```

Basic-Programm:

```
  REM ggT-Algorithmus
  REM ————
1 INPUT « 1. Zahl»; x
  INPUT «2. Zahl»; y
2 IF x = y THEN GOTO 5
3 IF x > y THEN x = x - y ELSE y =
  y - x
4 GOTO 2
5 PRINT «Der ggT ist», x
  END
```

D164

Analog dem Algorithmus in D161 kann man so lange die kleinere von der grösseren Strecke abziehen (d. h. mit Zirkel abtragen), bis zwei gleich lange Strecken übrig bleiben. Das grösste gemeinsame Mass ist hier 1.5 cm.

D165

Es ist zu erwarten, dass ihr zu verschiedenen Resultaten kommt, die jedoch allesamt falsch sind. Tatsache ist, dass es zwischen der Seite und der Diagonale eines Quadrats überhaupt kein gemeinsames Mass gibt. Man sagt auch, die beiden Strecken seien inkommensurabel.

Schau nach, was das Wort «inkommensurabel» bedeutet.

Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)

D166 Immer nach 20 Feldern sind die Kreuzchen übereinander. Man erkennt: $20 = 4 \cdot 5$. Im zweiten Beispiel tritt die Wiederholung nach 30 Feldern ein. $6 \cdot 10$ ergibt aber 60. Also ist der Zusammenhang nicht so einfach.

D167 V_6 = {6, 12, 18, **24**, 30, 36, 42, **48**, 54, 60, 66, **72**}
V_8 = {8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56, 64, **72**}

D168 V_{14} = {14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, **126**, 140, 154, 168, 182, 196, 210, 224, 238, **252**}
V_{18} = {18, 36, 54, 72, 90, 108, **126**, 144, 162, 180, 198, 216, 234, **252**}

D169

V_{12}: 12, 24, 48, 60, 84, 96 | 36, 72 | 18, 54, 90 : V_{18}

D170

V_9: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 | 99 | 88, 77, 66, 55, 11, 22, 33, 44 : V_{11}

D171	**a)** 24	**b)** 14	**c)** 72	**d)** 99
D172	**a)** 220	**b)** 180	**c)** 144	**d)** 200
D173	**a)** 9900	**b)** 398	**c)** 36	**d)** 180
D174	**a)** 392	**b)** 21 484	**c)** 13 090	**d)** 2220
D175	**a)** 4200	**b)** 350	**c)** 8775	**d)** 7992
D176	**a)** 1221	**b)** 13 860	**c)** 110 880	**d)** 504
D177	**a)** 840	**b)** 600	**c)** 4200	**d)** 7056

D178 Das kgV ist das Produkt der teilerfremden Zahlen.

D179 In der Schnittmenge befinden sich die gemeinsamen Vielfachen (gV). Die kleinste Zahl in der Schnittmenge ist also das kgV.

D180 um 8.30 bzw. 10.00 Uhr

kgV(15, 18) bzw. kgV(15, 18, 20) Minuten nach 7 Uhr.

D181 Nein, man bräuchte 10.582 m Höhe.

$814 = 2 \cdot 11 \cdot 37$,
$962 = 1 \cdot 13 \cdot 37$

D182 kgV(57, 89) = 5 073
5 073 mm : 57 mm = 89 mm = 57
Es braucht $89 \cdot 57$ = 5073 Karten, also 141 Sets à 36 Karten oder 96 Sets à 53 Karten.

Jasskartenformat: 57 x 89 mm

D183 Es braucht 432 Klötze.

kgV(36, 27, 24) = 216, also (216 : 36) · (216 : 27) · (216 : 24)

D184 240 Monate (20 Jahre), falls sie je gleichzeitig revidiert werden. Es wäre aber auch möglich, dass sie nie gleichzeitig revidiert werden (gerade/ungerade Monate).

kgV(6, 10, 16) = 240

D185 am 24. April des darauffolgenden Jahres

kgV(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) = 420

D186 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$

D187 42

In Frage kommen nur die Zahlen 35, 42 und 49.

D188 Nach 2 Umdrehungen des grossen Rades stimmen die Markierungen wieder überein. Das kleine Rad macht dabei 9 Umdrehungen.

Man kann sich die Frage stellen, wie viele Zähne die beiden Räder zusammen haben. Interessanter ist jedoch, zu bestimmen, wie viele Umdrehungen das grosse Rad machen muss, bis die beiden Markierungen wieder aufeinanderzeigen.

D189 Die Zahlen sind: 1452 und 270 270,
kgV = (2, 3, 1, 1, 2, 1) = 5 945 940

D190 Die Vereinigungsmenge der Balken ergibt die Balken des kgV.

Primfaktorendiagramm
vgl. D135 und D136.

D191 a · b = ggT(a, b) · kgV(a, b)
Erklärung: Für den ggT nimmt man von jeder Stelle der beiden Primzahlcodes die kleinere Zahl. Für den kgV nimmt man die grössere Zahl. Wenn man ggT (x, y) mal kgV(x, y) rechnet, nimmt man also von jeder Stelle die kleinere und die grössere Zahl. Das ergibt aber gerade das Produkt von x und y.

a	b	a · b	ggT	kgV
6	9	54	3	18
4	5	20	1	20
16	40	640	8	80
12	12	144	12	12
3	7	21	1	21
8	1	8	1	8

In die mittlere Spalte setzt man das Produkt a · b

D192 Rest 2 bei Division durch 6 bei: 2, 8, 14, 20, 26, ...
Rest 2 bei Division durch 8 bei: 2, 10, 18, 26, 34, ...
Rest 2 bei Division durch 6 und 8: 2, 26, 50, 74, 98

D193 Einzige Lösung ist 2519.

Solche Zahlen wiederholen sich im Abstand kgV(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) = 2520. (Zahl − 1) erfüllt in einem gewissen Sinne die gesuchte Eigenschaft.

D194

6	6	6	6	0	0		1	4	9	6
5	5	6	5	6		2	0	4	8	6
4	4	2	2		1	2	3	4	5	6
6	2	4		4	3	2		4	3	9
	1	2	3	4	5	6	8		2	9
9		7	6	8		6	8	4		9
8	1		9	8	7	6	5	4	3	
7	0	2		8	4	6		4	5	3
6	0	7	5	8	4		9	1	4	4
5	0	7	0	4		8	6	4	2	0
1	0	2	0		7	4	0	4	7	5

Das Rätsel ist nicht gerade einfach! Angaben wie z. B. «durch neun teilbar» helfen ja nur, wenn alle Ziffern bis auf eine bekannt sind. Fragen wie «grösste Zahl mit soundso Ziffern, die durch dasunddas teilbar ist» sind die wichtigen Stützen zum Vorwärtskommen. Beantworte diese Fragen zuerst.

Vorbereitung Bruchrechnen

D195 a) $\frac{6}{11}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{8}$ — a) ggT 6 b) ggT 15 c) ggT 44

D196 a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{5}$ — a) ggT 105 b) ggT 143 c) ggT 35

D197 a) $\frac{7}{8}$ b) $\frac{9}{11}$ c) $\frac{2}{3}$ — a) ggT 21 b) ggT 22 c) ggT 91

D198 a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{6}{5}$ c) $\frac{10}{11}$ — a) ggT 133 b) ggT 77 c) ggT 85

D199 a) $\frac{38}{33}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{34}{57}$ — a) ggT 69 b) ggT 1189 c) ggT 1309

D200 a) $\frac{2}{6}, \frac{1}{6}$ b) $\frac{3}{24}, \frac{2}{24}$ c) $\frac{5}{40}, \frac{4}{40}$ — a) kgV 6 b) kgV 24 c) kgV 40

D201 a) $\frac{12}{18}, \frac{3}{18}, \frac{10}{18}$ b) $\frac{6}{12}, \frac{4}{12}, \frac{3}{12}$ c) $\frac{5}{45}, \frac{3}{45}, \frac{45}{45}$ — a) kgV 18 b) kgV 12 c) kgV 45

D202 a) $\frac{11}{12}$ b) $\frac{5}{24}$ c) $\frac{1}{180}$ — a) kgV 12 b) kgv 24 c) kgV 180

D203 a) $\frac{31}{30}$ b) $\frac{38}{45}$ c) $\frac{31}{42}$ — a) kgV 30 b) kgV 45 c) kgV 42

D204 a) $\frac{73}{60}$ b) $\frac{67}{75}$ c) $\frac{46}{50}, \frac{23}{25}$ — a) kgV 60 b) kgV 75 c) kgV 50

Und jetzt noch dies

D205 1904, 1996, 2000, 2004, 2400, 4916

Bis zum Jahr 4916 wird sich ein kleiner Fehler aufsummiert haben, dass man dannzumal entscheiden muss, ob man einen Schalttag ausfallen lässt.

D206 Weil 365 : 7 den Rest 1 ergibt, verschiebt sich der Wochentag jedes Jahr um eins vorwärts. Liegt noch ein Schalttag dazwischen, dann um zwei vorwärts.

D206: Wie viele Wochen hat ein Jahr?

D207 2660 Jahre

Typische kgV-Aufgabe!

D208

Nach 60 Tagen zeigen beide Uhren 7 Uhr (gerechnet mit einer 12-Stunden-Anzeige).

Nach einem Tag beträgt der Unterschied 12 Minuten, nach zwei Tagen 24 Minuten ...

D209

778.7 Tage

Diese Aufgabe hat nichts mit dem kgV zu tun.

D210

um 7.05 Uhr

D211

4 = 2 + 2	6 = 3 + 3	8 = 5 + 3
10 = 7 + 3	12 = 7 + 5	14 = 11 + 3
16 = 13 + 3	18 = 13 + 5	20 = 17 + 3
22 = 19 + 3	24 = 19 + 5	26 = 23 + 3
28 = 23 + 5	30 = 23 + 7	32 = 29 + 3
34 = 31 + 3	36 = 31 + 5	38 = 31 + 7
40 = 37 + 3	42 = 37 + 5	44 = 37 + 7
46 = 43 + 3	48 = 43 + 5	50 = 43 + 7

Eine Liste aller Primzahlen bis 50 ist hilfreich. Oft gibt es mehrere Lösungen.

D212

Sind die drei Faktoren verschieden: 8
Sind zwei Faktoren gleich: 6
Sind alle drei Faktoren gleich: 4

Man muss unterscheiden, ob es sich dabei um verschiedene oder teilweise gleiche Faktoren handelt.

D213

Das kgV ist 140.

Zur Erinnerung:
$ggT(a, b) \cdot kgV(a, b) = a \cdot b$

D214

Die Quadrate von Primzahlen, zum Beispiel 4 oder 9.

D215

a) $\Omega = (a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot ...) + 1$
b) Es entsteht immer Rest 1
c) Die bereits verwendeten Primzahlen können in der Primfaktorzerlegung von Ω nicht vorkommen.

Zahlenbeispiel:
$a = 3$ und $b = 4$, $\Omega = 13$.
13 mod 3 = 1 und 13 mod 4 = 1.

D216

$x = 4$

x muss gerade sein und die Quersumme $16 + 5x$ muss durch 3 teilbar sein.

D217

4 = 1 + 3, 7 = 2 + 5
11 = 4 + 7, 16 = 6 + 10
17 = 8 + 9

Die Summe 4 kann nur durch die Zahlen 1 und 3 entstehen. In welcher Summe kann die Zahl 2 nun noch stecken?

D218

Die 6 Kinder sind 5, 7, 11, 13, 17 und 19 Jahre alt.

D219

1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033 (Zwilling), 1039, 1049 (ist mit 1051 wieder Zwilling).

Wenn man die Methode nicht von Anfang an durchführt, so muss man die ersten paar Primzahlen schon kennen.

D220

a) richtig **b)** richtig (gilt auch für Nichtprimzahlen)
c) richtig **d)** sicher nicht!

a) Die grössten zweistelligen Primzahlen sind 97 und 89.

D221

$1989 = 1 \cdot 1989 = 3 \cdot 663 = 9 \cdot 221 = 13 \cdot 153 = 17 \cdot 117 = 39 \cdot 51$ und Vertauschungen

$1989 = 3^2 \cdot 13 \cdot 17$.
Wie viele Elemente hat also T_{1989}?

D222

918882**0**819**8**3333**5**0848623418**0**771120**6**04590

Die gegebenen Ziffern sind doch schon Hilfe genug!

D223	$5^5 - 4 = 3121$ waren es am Anfang, 1020 sind noch im Versteck.	
D224	Stein 2-3 wurde gezogen,	Erstelle eine Liste mit allen möglichen Steinen und notiere dazu jeweils Summe und Produkt. Analysiere nun die Aussagen der Reihe nach. Da zuerst Spieler A anhand des Produktes nicht herausfinden konnte, welcher Stein es ist, muss dieses Produkt eine Zahl sein, die in der Tabelle mehrfach auftritt. Alle Steine, die zu Produkten führen, die nur einmal auftreten, kommen also schon nicht mehr in Frage. Fahre mit ähnlichen Überlegungen fort.
D225	2, 4, 6, 12, 24, 36, 48, 60, 120	Bilde die Teilermengen von 3, 4, 5, ... und betrachte jeweils die Anzahl Teiler.

Kontrollaufgaben

D226	$336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$	
D227	$77\,000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$	
D228	ggT(102, 272) = 34, kgV(102, 272) = 816	$102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$, $272 = 2^4 \cdot 17$.
D229	997	Verwende den Euklidischen Algorithmus.
D230	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 = 792$	$24 = 2^3 \cdot 3$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$ $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$
D231	Nein. $871 = 13 \cdot 67$	Teile durch die Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, ..., 29
D232	$125 \cdot 88 = 11\,000$	kgV(176, 250) = 22 000
D233	(8,4,2,1)	$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5)$
D234	720	Der Primfaktor 2 kann hier 0 bis 5-mal im Teiler enthalten sein. Das ergibt 6 Möglichkeiten.
D235	353, 653, 953	Bei Division durch 12 ergeben 5, 17, 29, 41, ... immer Rest 5. Betrachte deren Reste bei Division durch 25. So findest du die erste Zahl. Zahlen mit dieser Eigenschaft wiederholen sich im Abstand kgV (12, 25).