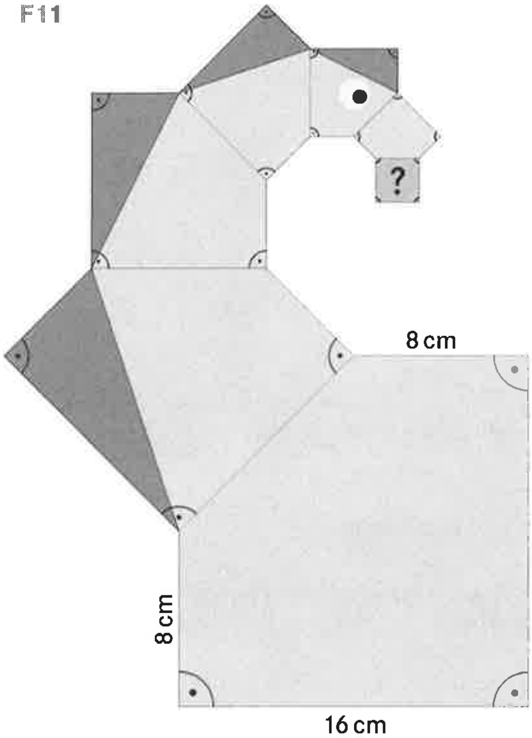
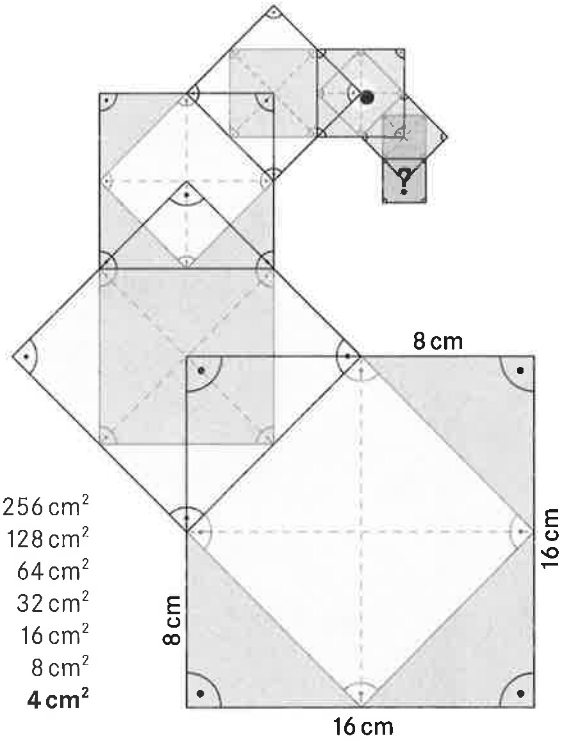
F Der Satz von Pythagoras

F1 Eine erste Begegnung mit dem Satz

Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

F11





Diese Aufgabe kann auch gut erst zu einem späteren Zeitpunkt behandelt werden.
Als Einstieg kann sie zeigen, dass die bisherigen Mittel nicht ausreichen, um beliebige Längen zu berechnen...
Sie fördert dabei ein kreatives Lösungsvorgehen beim Erkennen und Berechnen der Flächen.
Der angegebene Lösungsweg ist eine Möglichkeit, es gibt auch andere Wege.

a 1. Quadrat: 16 cm · 16 cm = 256 cm^2
2. Quadrat = Häfte des 1. Quadrates: 128 cm^2
3. Quadrat = Häfte des 2. Quadrates: 64 cm^2
4. Quadrat = Häfte des 3. Quadrates: 32 cm^2
5. Quadrat = Häfte des 4. Quadrates: 16 cm^2
6. Quadrat = Häfte des 5. Quadrates: 8 cm^2
7. Quadrat = Häfte des 6. Quadrates: **4 cm^2**

b Grösste Zacke: Ein Viertel des 2. Quadrates = **32 cm^2**
2. Zacke: Ein Viertel des 3. Quadrates = **16 cm^2**
3. Zacke: Ein Viertel des 4. Quadrates = **8 cm^2**
Kleinste Zacke: Ein Viertel des 5. Quadrates = **4 cm^2**

c Vom ersten bis zum sechsten Quadrat wird je ein Achtel abgeschnitten, das kleinste bleibt ganz.
Gesamtfläche = $\frac{7}{8} \cdot (256\,cm^2 + 128\,cm^2 + 64\,cm^2 + 32\,cm^2 + 16\,cm^2 + 8\,cm^2) + 4\,cm^2 = \mathbf{445\,cm^2}$

Mögliche Ergänzungsfrage: Wie lässt sich ein Quadrat verdoppeln oder halbieren.

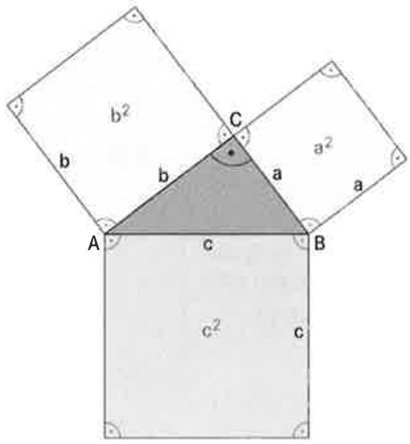
d Bei der ersten und dritten Zacke lassen sich die Längen vorerst nur durch Konstruktion und Nachmessen ermitteln. Ebenso die Länge des Rückens.
1. Zacke: **11.31 cm** und **5.66 cm** 3. Zacke: **5.66 cm** und **2.83 cm**
2. Zacke: **8 cm** und **4 cm** 4. Zacke: **4 cm** und **2 cm**
Rückenlänge: 12.65 cm + 8.94 cm + 6.33 cm + 4.47 cm = **32.39 cm**

F12 a

3/4/**5**	9/12/**15**	18/24/**30**	4.5/6/**7.5**	5.6/10.5/**11.9**
5/12/**13**	10/24/**26**	3.6/4.8/**6**	4.5/10.8/**11.7**	5.6/19.2/**20**
6/8/**10**	12/16/**20**	4/9.6/**10.4**	4.8/6.4/**8**	5.7/7.6/**9.5**
7/24/**25**	15/20/**25**	4.2/5.6/**7**	4.8/9/**10.2**	6.4/12/**13.6**
8/15/**17**	16/30/**34**	4.2/14.4/**15**	5.4/7.2/**9**	7.2/13.5/**15.3**

$a^2 + b^2 = c^2$

Der Satz von Pythagoras



Der Satz von Pythagoras stellt in einem **rechtwinkligen Dreieck** einen Zusammenhang her zwischen den Katheten a und b und der Hypotenuse c.
Er benutzt dazu die Quadrat**flächen** über den Seiten.

$$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$$

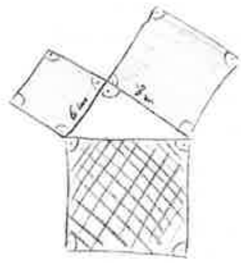
1. Katheten-quadrat + 2. Katheten-quadrat = Hypotenusen-quadrat

oder:

Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich gross wie das Hypotenusenquadrat.

Das Quadrat über der Kathete a und das Quadrat über der Kathete b haben zusammen die gleich grosse Fläche wie das Quadrat über der Hypotenuse c.

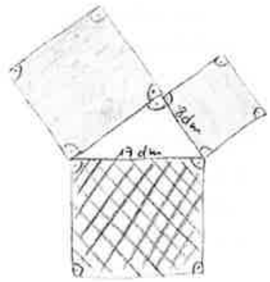
F13 a Katheten: 6 m, 8 m   Hypotenuse: x



1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat = Hypotenusenquadrat

$$(6\,\text{m})^2 + (8\,\text{m})^2 = x^2$$
$$36\,\text{m}^2 + 64\,\text{m}^2 = x^2$$
$$100\,\text{m}^2 = x^2$$
$$x = 10\,\text{m}$$

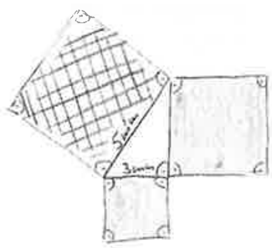
b Katheten: 8 dm, x   Hypotenuse: 17 dm



1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat = Hypotenusenquadrat

$$(8\,\text{dm})^2 + x^2 = (17\,\text{dm})^2$$
$$64\,\text{dm}^2 + x^2 = 289\,\text{dm}^2$$
$$x^2 = 289\,\text{dm}^2 - 64\,\text{dm}^2$$
$$x^2 = 225\,\text{dm}^2$$
$$x = 15\,\text{dm}$$

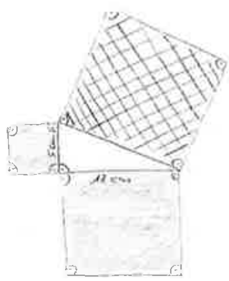
c Katheten: 3 mm, x   Hypotenuse: 5 mm



1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat = Hypotenusenquadrat

$$(3\,\text{mm})^2 + x^2 = (5\,\text{mm})^2$$
$$9\,\text{mm}^2 + x^2 = 25\,\text{mm}^2$$
$$x^2 = 25\,\text{mm}^2 - 9\,\text{mm}^2$$
$$x^2 = 16\,\text{mm}^2$$
$$x = 4\,\text{mm}$$

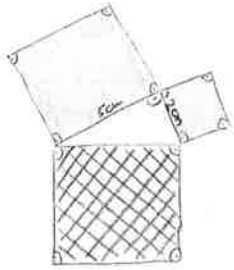
d Katheten: 12 cm, 5 cm   Hypotenuse: x



1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat = Hypotenusenquadrat

$$(12\,\text{cm})^2 + (5\,\text{cm})^2 = x^2$$
$$144\,\text{cm}^2 + 25\,\text{cm}^2 = x^2$$
$$169\,\text{cm}^2 = x^2$$
$$x = 13\,\text{cm}$$

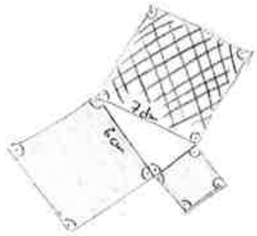
F14 **a** Es ist eine Seite des Quadrates gesucht, dessen Fläche $(5\,cm)^2 + (2\,cm)^2 = 29\,cm^2$ beträgt.



Ihre Länge ist $\sqrt{29}\,cm = 5.38516480713...\,cm$

$\sqrt{29}$ ist die Zahl, die mit sich selbst multipliziert 29 gibt.

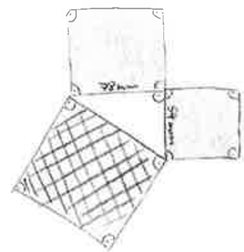
b Es ist eine Seite des Quadrates gesucht, dessen Fläche $(7\,dm)^2 - (6\,dm)^2 = 13\,dm^2$ beträgt.



Ihre Länge ist $\sqrt{13}\,dm = 3.60555127546...\,dm$

$\sqrt{13}$ ist die Zahl, die mit sich selbst multipliziert 13 gibt.

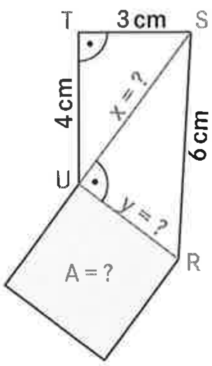
c Es ist eine Seite des Quadrates gesucht, dessen Fläche $(78\,mm)^2 + (54\,mm)^2 = 9\,000\,mm^2$ beträgt.



Ihre Länge ist $\sqrt{9000}\,mm = 94.8683298051...\,mm$

$\sqrt{9000}$ ist die Zahl, die mit sich selbst multipliziert 9000 gibt.

F15 **a** x ist Hypotenuse im $\triangle UST$, Katheten: 4 cm, 3 cm



Hypotenusenquadrat = 1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat

$$x^2 = (4\,cm)^2 + (3\,cm)^2$$
$$x^2 = 16\,cm^2 + 9\,cm^2$$
$$x^2 = 25\,cm^2$$
$$x = 5\,cm$$

y ist Kathete im $\triangle RSU$, 2. Kathete: x = 5 cm, Hypotenuse: 6 cm

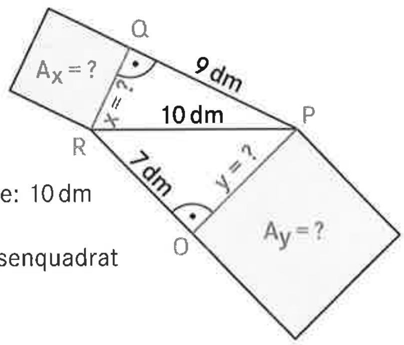
1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat = Hypotenusenquadrat

$$y^2 + (5\,cm)^2 = (6\,cm)^2$$
$$y^2 = (6\,cm)^2 - (5\,cm)^2$$
$$y^2 = 11\,cm^2$$
$$\mathbf{y} = \sqrt{11}\,cm \approx \mathbf{3.32\,cm} \qquad \mathbf{A} = y^2 = \mathbf{11\,cm^2}$$

b x ist Kathete im $\triangle RPQ$,
2. Kathete: 9 dm, Hypotenuse: 10 dm

1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat = Hypotenusenquadrat

$$x^2 + (9\,dm)^2 = (10\,dm)^2$$
$$x^2 = (10\,dm)^2 - (9\,dm)^2$$
$$x^2 = 19\,dm^2$$
$$\mathbf{x} = \sqrt{19}\,dm \approx \mathbf{4.36\,dm}$$
$$\mathbf{A_x = 19\,dm^2}$$



y ist Kathete im $\triangle ROP$, 2. Kathete: 7 dm, Hypotenuse: 10 dm

1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat = Hypotenusenquadrat

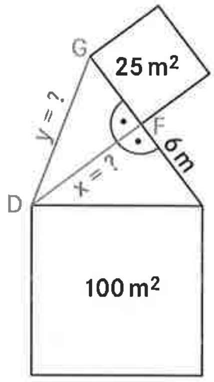
$$y^2 + (7\,dm)^2 = (10\,dm)^2$$
$$y^2 = (10\,dm)^2 - (7\,dm)^2$$
$$y^2 = 51\,dm^2$$
$$\mathbf{y} = \sqrt{51}\,dm \approx \mathbf{7.14\,dm} \qquad \mathbf{A_y = 51\,dm^2}$$

→

■ x ist Kathete im $\triangle$DEF, 2. Kathete: 6 m, Hypotenuse: 10 m

1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat = Hypotenusenquadrat

$$x^2 + (6\,\text{m})^2 = (10\,\text{m})^2$$
$$x^2 = (10\,\text{m})^2 - (6\,\text{m})^2$$
$$x^2 = 64\,\text{m}^2$$
$$\mathbf{x = 8\,m}$$



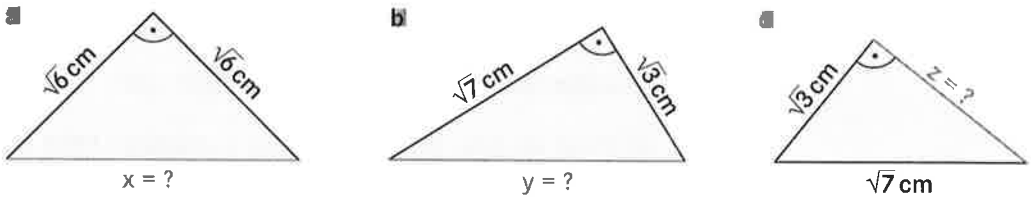
y ist Hypotenuse im $\triangle$DFG, Katheten: x, 5 m

Hypotenusenquadrat = 1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat

$$y^2 = (8\,\text{m})^2 + (5\,\text{m})^2$$
$$y^2 = 89\,\text{m}^2$$
$$\mathbf{y = \sqrt{89}\,m \approx 9.43\,m}$$

F16 Arbeitsblatt

F17



a x ist Hypotenuse, Katheten: $\sqrt{6}$ cm, $\sqrt{6}$ cm

Hypotenusenquadrat = 1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat

$$x^2 = (\sqrt{6}\,\text{cm})^2 + (\sqrt{6}\,\text{cm})^2$$
$$x^2 = 6\,\text{cm}^2 + 6\,\text{cm}^2$$
$$x^2 = 12\,\text{cm}^2$$
$$\mathbf{x = \sqrt{12}\,cm}$$

b y ist Hypotenuse, Katheten: $\sqrt{7}$ cm, $\sqrt{3}$ cm

Hypotenusenquadrat = 1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat

$$y^2 = (\sqrt{7}\,\text{cm})^2 + (\sqrt{3}\,\text{cm})^2$$
$$y^2 = 7\,\text{cm}^2 + 3\,\text{cm}^2$$
$$y^2 = 10\,\text{cm}^2$$
$$\mathbf{y = \sqrt{10}\,cm}$$

c z ist Kathete, 2. Kathete: $\sqrt{3}$ cm, Hypotenuse: $\sqrt{7}$ cm

1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat = Hypotenusenquadrat

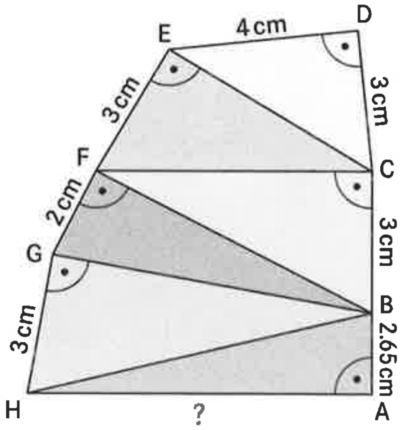
$$z^2 + (\sqrt{3}\,\text{cm})^2 = (\sqrt{7}\,\text{cm})^2$$
$$z^2 = 7\,\text{cm}^2 - 3\,\text{cm}^2$$
$$z^2 = 4\,\text{cm}^2$$
$$\mathbf{z = 2\,cm}$$

F18 ■ Hier muss in mehreren Schritten gerechnet werden.

1. Schritt:
EC ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ECD.
Katheten: CD = 3 cm und ED = 4 cm

$$EC^2 = (3\,\text{cm})^2 + (4\,\text{cm})^2$$
$$EC^2 = 25\,\text{cm}^2$$
$$EC = 5\,\text{cm}$$

2. Schritt:
FC ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck FCE.
Katheten: EC = 5 cm und FE = 3 cm



$FC^2 = (5\,cm)^2 + (3\,cm)^2$
$FC^2 = 34\,cm^2$
$FC \;= \sqrt{34}\,cm \approx 5.83\,cm$

3. Schritt:
FB ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck FBC.
Katheten: $BC = 3\,cm$ und $FC = \sqrt{34}\,cm$

$FB^2 = (3\,cm)^2 + (\sqrt{34}\,cm)^2$
$FB^2 = 43\,cm^2$
$FB \;= \sqrt{43}\,cm \approx 6.56\,cm$

4. Schritt:
GB ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck GBF.
Katheten: $GF = 2\,cm$ und $FB = \sqrt{43}\,cm$

$GB^2 = (2\,cm)^2 + (\sqrt{43}\,cm)^2$
$GB^2 = 47\,cm^2$
$GB \;= \sqrt{47}\,cm \approx 6.86\,cm$

5. Schritt:
HB ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck HBG.
Katheten: $HG = 3\,cm$ und $GB = \sqrt{47}\,cm$

$HB^2 = (3\,cm)^2 + (\sqrt{47}\,cm)^2$
$HB^2 = 56\,cm^2$
$HB \;= \sqrt{56}\,cm \approx 7.48\,cm$

6. Schritt:
HA ist **Kathete** im rechtwinkligen Dreieck HAB.
2. Kathete: $AB = 2.65\,cm$ Hypotenuse $HB = \sqrt{56}\,cm$

$HA^2 + (2.65\,cm)^2 = (\sqrt{56}\,cm)^2$
$HA^2 = (\sqrt{56}\,cm)^2 - (2.65\,cm)^2$
$HA^2 = 48.9775\,cm^2$
$\mathbf{HA} = \sqrt{48.9775}\,cm \approx \mathbf{7\,cm}$

Beachte:

$(\sqrt{x}\,cm)^2 = x\,cm^2$

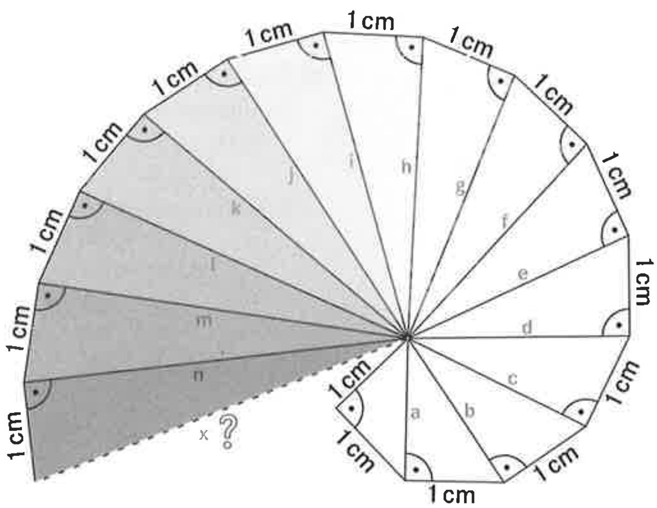
Verwende zum Weiterrechnen immer die exakten Werte.

Wenn du mit gerundeten Zwischenresultaten weiterrechnest, so kann sich der Fehler (die Abweichung) mit jedem Schritt vergrössern.

d $a^2 = (1\,cm)^2 + (1\,cm)^2$
$a^2 = 1\,cm^2 + 1\,cm^2$
$a^2 = 2\,cm^2$
$a \;= \sqrt{2}\,cm$

$b^2 = a^2 + (1\,cm)^2$
$b^2 = 2\,cm^2 + 1\,cm^2$
$b^2 = 3\,cm^2$
$b \;= \sqrt{3}\,cm$

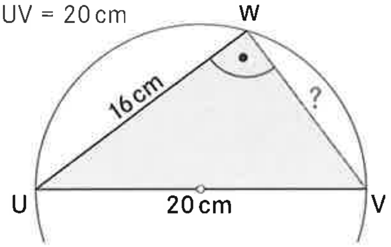
$c^2 = b^2 + (1\,cm)^2$
$c^2 = 3\,cm^2 + 1\,cm^2$
$c^2 = 4\,cm^2$
$c \;= \sqrt{4}\,cm = 2\,cm$



entsprechend:

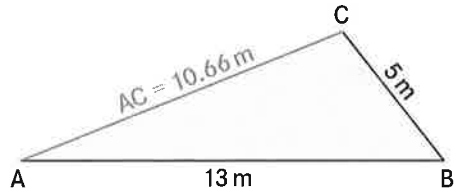
$d^2 = 5\,cm^2$	$d = \sqrt{5}\,cm$	$j^2 = 11\,cm^2$	$j = \sqrt{11}\,cm$
$e^2 = 6\,cm^2$	$e = \sqrt{6}\,cm$	$k^2 = 12\,cm^2$	$k = \sqrt{12}\,cm$
$f^2 = 7\,cm^2$	$f = \sqrt{7}\,cm$	$l^2 = 13\,cm^2$	$l = \sqrt{13}\,cm$
$g^2 = 8\,cm^2$	$g = \sqrt{8}\,cm$	$m^2 = 14\,cm^2$	$m = \sqrt{14}\,cm$
$h^2 = 9\,cm^2$	$h = \sqrt{9}\,cm = 3\,cm$	$n^2 = 15\,cm^2$	$n = \sqrt{15}\,cm$
$i^2 = 10\,cm^2$	$i = \sqrt{10}\,cm$	$x^2 = 16\,cm^2$	$\mathbf{x} = \sqrt{16}\,cm = \mathbf{4\,cm}$

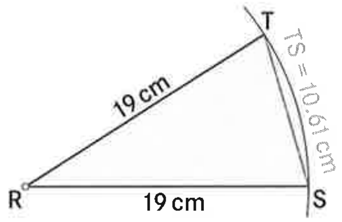
F19 **a** Das Dreieck UVW ist rechtwinklig (Thaleskreis).
Katheten: UW = 16 cm und VW = ? Hypotenuse: UV = 20 cm



$$(16\,\text{cm})^2 + VW^2 = (20\,\text{cm})^2$$
$$VW^2 = 400\,\text{cm}^2 - 256\,\text{cm}^2$$
$$VW^2 = 144\,\text{cm}^2$$
$$VW = 12\,\text{cm}$$

b, **c** Die beiden Dreiecke sind offensichtlich **nicht rechtwinklig**.
Der Satz des Pythagoras kann deshalb hier **nicht** angewendet werden.
Um die gesuchten Längen zu bestimmen, müsstest du die Dreiecke konstruieren (△ABC beispielsweise im Massstab 1 : 100) und dann die gesuchten Seiten messen.

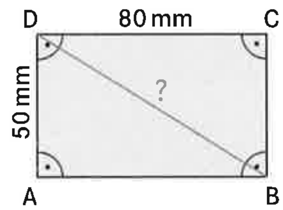




An dieser Stelle könnte auch die Beweissequenz eingeschoben werden. **F412** - **F414**.

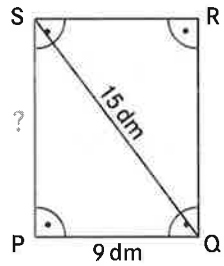
d Offensichtlich! Die beiden Beispiele bei **b** und **c** zeigen es deutlich.
Falls man hier versucht mit Pythagoras zu rechnen erhält man falsche Längen.

F110 **a** Die Diagonale DB des Rechtecks ABCD ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck DBC (oder in ABD).
Katheten: DC = 80 mm, BC = 50 mm



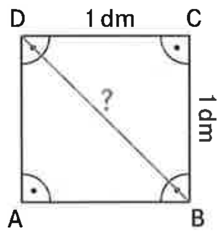
Hypotenusenquadrat = 1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat
$$DB^2 = DC^2 + BC^2$$
$$DB^2 = (80\,\text{mm})^2 + (50\,\text{mm})^2$$
$$DB^2 = 8\,900\,\text{mm}^2$$
$$DB = \sqrt{8\,900}\,\text{mm} \approx \mathbf{94.34\,mm}$$

b Die Seite PS des Rechtecks PQRS ist Kathete im rechtwinkligen Dreieck PQS.
2. Kathete: PQ = 9 dm, Hypotenuse: SQ = 15 dm



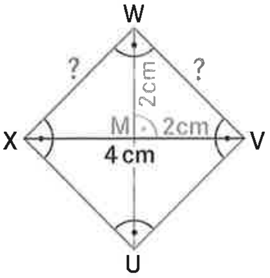
1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat = Hypotenusenquadrat
$$PQ^2 + PS^2 = SQ^2$$
$$(9\,\text{dm})^2 + PS^2 = (15\,\text{dm})^2$$
$$PS^2 = (15\,\text{dm})^2 - (9\,\text{dm})^2$$
$$PS^2 = 144\,\text{dm}^2$$
$$\mathbf{PS = 12\,dm}$$

c Die Diagonale DB des Quadrates ABCD ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck DBC.
Katheten: DC = BC = 1 dm



Hypotenusenquadrat = 1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat
$$DB^2 = DC^2 + BC^2$$
$$DB^2 = (1\,\text{dm})^2 + (1\,\text{dm})^2$$
$$DB^2 = 2\,\text{dm}^2$$
$$\mathbf{DB} = \sqrt{2}\,\text{dm} \approx \mathbf{1.41\,dm}$$

d Die Diagonalen eines Quadrates stehen senkrecht zueinander und halbieren sich.
VW ist Hypotenuse im Dreieck MVW.
Katheten dieses Dreiecks sind MV = MW = 2 cm

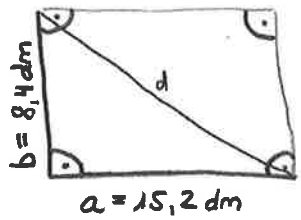


Hypotenusenquadrat = 1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat

$$\begin{aligned} VW^2 &= MV^2 + MW^2 \\ VW^2 &= (2\,\text{cm})^2 + (2\,\text{cm})^2 \\ VW^2 &= 8\,\text{cm}^2 \\ \mathbf{VW} &= \sqrt{8}\,\text{cm} \approx \mathbf{2.83\,cm} \end{aligned}$$

F111 Es gilt bei allen Teilaufgaben: d ist Hypotenuse im halben Rechteck, a und b sind Katheten.

a a = 15.2 dm b = 8.4 dm zu berechnen: d, u, A

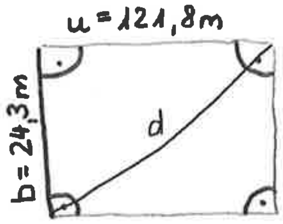


d: $d^2 = a^2 + b^2$
$d^2 = (15.2\,\text{dm})^2 + (8.4\,\text{dm})^2 = 301.6\,\text{dm}^2$
$\mathbf{d} = \sqrt{301.6}\,\text{dm} \approx \mathbf{17.37\,dm}$

u: $\mathbf{u} = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 30.4\,\text{dm} + 16.8\,\text{dm} = \mathbf{47.2\,dm}$

A: $\mathbf{A} = a \cdot b = 15.2\,\text{dm} \cdot 8.4\,\text{dm} = \mathbf{127.68\,dm^2}$

b b = 24.3 m u = 121.8 m zu berechnen: a, d, A

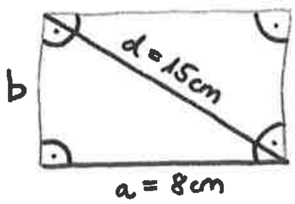


a: $2 \cdot (a + b) = u \quad |: 2$
$a + b = u : 2$
$a + 24.3\,\text{m} = 60.9\,\text{m}$
$\mathbf{a} = 60.9\,\text{m} - 24.3\,\text{m} = \mathbf{36.6\,m}$

d: $d^2 = a^2 + b^2$
$d^2 = (36.6\,\text{m})^2 + (24.3\,\text{m})^2 = 1930.05\,\text{m}^2$
$\mathbf{d} = \sqrt{1930.05}\,\text{m} \approx \mathbf{43.93\,m}$

A: $\mathbf{A} = a \cdot b = 36.6\,\text{m} \cdot 24.3\,\text{m} = \mathbf{889.38\,m^2}$

c a = 8 cm d = 15 cm zu berechnen: b, u, A

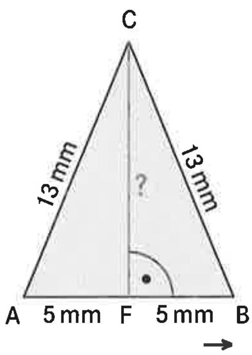


b: $a^2 + b^2 = d^2$
$b^2 = d^2 - a^2$
$b^2 = (15\,\text{cm})^2 - (8\,\text{cm})^2 = 161\,\text{cm}^2$
$\mathbf{b} = \sqrt{161}\,\text{cm} \approx \mathbf{12.69\,cm}$

u: $\mathbf{u} = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 16\,\text{cm} + 2 \cdot \sqrt{161}\,\text{cm} \approx \mathbf{41.38\,cm}$

A: $\mathbf{A} = a \cdot b = 8\,\text{cm} \cdot \sqrt{161}\,\text{cm} \approx \mathbf{101.51\,cm^2}$

F112 **a** Das Dreieck ABC ist gleichschenklig. Die Teildreiecke AFC und FBC sind rechtwinklig.
$\triangle$FBC Katheten: FB = 5 mm, FC = ? Hypotenuse: BC = 13 mm
$\triangle$AFC Katheten: AF = 5 mm, FC = ? Hypotenuse: AC = 13 mm

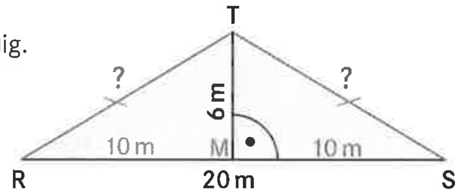


1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat = Hypotenusenquadrat

$$\begin{aligned} (5\,\text{mm})^2 + FC^2 &= (13\,\text{mm})^2 \\ FC^2 &= 169\,\text{mm}^2 - 25\,\text{mm}^2 \\ FC^2 &= 144\,\text{mm}^2 \\ \mathbf{FC} &= \sqrt{144}\,\text{mm} = \mathbf{12\,mm} \end{aligned}$$

→

Das Dreieck RST ist gleichschenklig.
Die beiden Hälften RMT und MST sind rechtwinklig.

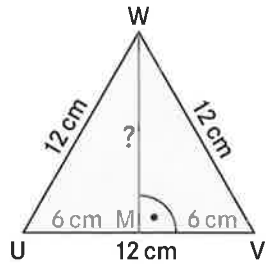


$\triangle$RMT Katheten: RM = 10 m, MT = 6 m
Hypotenuse: RT = ?
$\triangle$MST Katheten: MS = 10 m, MT = 6 m
Hypotenuse: ST = RT

Hypotenusenquadrat = 1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat

$$RT^2 = RM^2 + MT^2$$
$$RT^2 = (10\,m)^2 + (6\,m)^2$$
$$RT^2 = 136\,m^2$$
$$\mathbf{RT} = \sqrt{136}\,m \approx \mathbf{11.66\,m}$$

Das Dreieck UVW ist gleichseitig.
Die beiden Hälften UMW und MVW sind rechtwinklig.

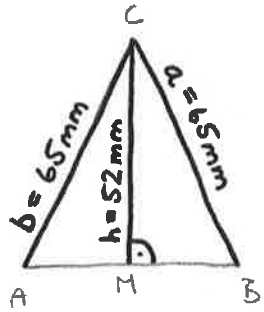


$\triangle$UMW Katheten: UM = 6 cm, MW = ?
Hypotenuse: UW = 12 cm
$\triangle$MVW Katheten: MV = 6 cm, MW = ?
Hypotenuse: VW = 12 cm

1. Kathetenquadrat + 2. Kathetenquadrat = Hypotenusenquadrat

$$(6\,cm)^2 + MW^2 = (12\,cm)^2$$
$$MW^2 = 144\,cm^2 - 36\,cm^2$$
$$MW^2 = 108\,cm^2$$
$$\mathbf{MW} = \sqrt{108}\,cm \approx \mathbf{10.39\,cm}$$

F113 a = b = 65 mm, h = 52 mm, AB = c = ?, $A_\triangle$ = ?



AM ist Kathete im Dreieck AMC.
2. Kathete: MC = h, Hypotenuse: AC = b

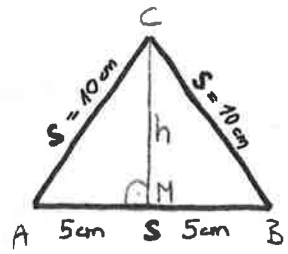
Breite: $AM^2 + h^2 = b^2$

$$AM^2 = b^2 - h^2$$
$$AM^2 = (65\,mm)^2 - (52\,mm)^2 = 1521\,mm^2$$
$$AM = \sqrt{1521}\,mm = 39\,mm$$

$$\mathbf{AB} = 2 \cdot AM = \mathbf{78\,mm}$$

Fläche: $\mathbf{A_\triangle} = AB \cdot h : 2 = \mathbf{2028\,mm^2}$

F114 s = 10 cm h = ?, $A_\triangle$ = ?



Die Höhe h ist Kathete im halben gleichseitigen Dreieck AMC.
2. Kathete: AM = $s/2$, Hypotenuse: AC = s

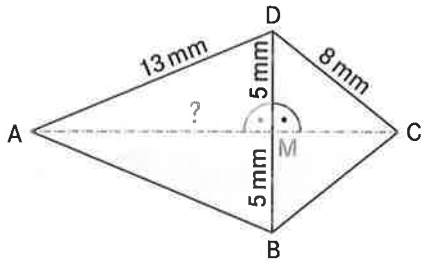
Höhe: $h^2 + (s/2)^2 = s^2$

$$h^2 = s^2 - (s/2)^2$$
$$h^2 = (10\,cm)^2 - (5\,cm)^2 = 75\,cm^2$$
$$\mathbf{h} = \sqrt{75}\,cm \approx \mathbf{8.66\,cm}$$

Fläche: $\mathbf{A_\triangle} = s \cdot h : 2 \approx \mathbf{43.30\,cm^2}$

F115 **a** Wir teilen AC in 2 Teile AM und MC. Die Teildreiecke AMD und MCD sind rechtwinklig.

AM ist Kathete im Dreieck AMD.
2. Kathete: MD = 5 mm, Hypotenuse: AD = 13 mm



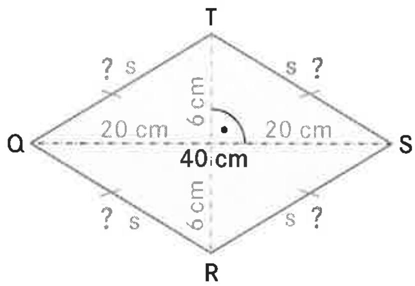
$$\begin{aligned} AM^2 + MD^2 &= AD^2 \\ AM^2 &= AD^2 - MD^2 \\ AM^2 &= (13\,\text{mm})^2 - (5\,\text{mm})^2 \\ AM^2 &= 144\,\text{mm}^2 \\ \mathbf{AM} &= \sqrt{144}\,\text{mm} = \mathbf{12\,mm} \end{aligned}$$

MC ist Kathete im Dreieck MCD.
2. Kathete: MD = 5 mm, Hypotenuse: CD = 8 mm

$$\begin{aligned} MC^2 + MD^2 &= CD^2 \\ MC^2 &= CD^2 - MD^2 \\ MC^2 &= (8\,\text{mm})^2 - (5\,\text{mm})^2 \\ MC^2 &= 39\,\text{mm}^2 \\ \mathbf{MC} &= \sqrt{39}\,\text{mm} \approx \mathbf{6.24\,mm} \end{aligned}$$

$$\mathbf{AC} = AM + MC \approx \mathbf{18.24\,mm}$$

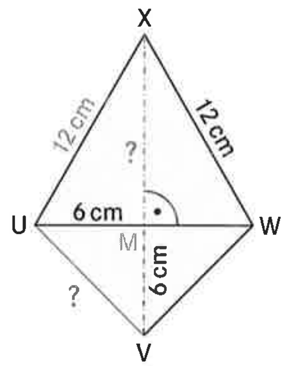
b QRST ist ein Rhombus. Alle Seiten sind gleich lang.
Jede Seite s ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 20 cm und 6 cm.



$$\begin{aligned} s^2 &= (20\,\text{cm})^2 + (6\,\text{cm})^2 \\ s^2 &= 436\,\text{cm}^2 \\ \mathbf{s} &= \sqrt{436}\,\text{cm} \approx \mathbf{20.88\,cm} \end{aligned}$$

c UV ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck UVM.
Katheten: UM = VM = 6 cm

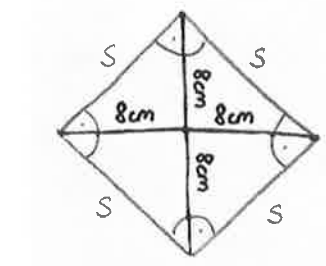
$$\begin{aligned} UV^2 &= (6\,\text{cm})^2 + (6\,\text{cm})^2 \\ UV^2 &= 72\,\text{cm}^2 \\ \mathbf{UV} &= \sqrt{72}\,\text{cm} \approx \mathbf{8.49\,cm} \end{aligned}$$



MX ist Kathete im rechtwinkligen Dreieck UMX.
2. Kathete: UM = 6 cm, Hypotenuse: UX = 12 cm

$$\begin{aligned} MX^2 + (6\,\text{cm})^2 &= (12\,\text{cm})^2 \\ MX^2 &= 144\,\text{cm}^2 - 36\,\text{cm}^2 \\ MX^2 &= 108\,\text{cm}^2 \\ \mathbf{MX} &= \sqrt{108}\,\text{cm} \approx \mathbf{10.39\,cm} \end{aligned}$$

F116 d = 16 cm s = ?, A□ = ?

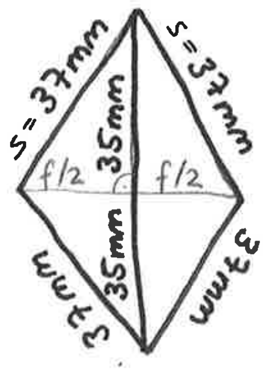


Eine Quadratseite s ist Hypotenuse eines Quadratviertels (= rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck).
Katheten: MB = MC = $^d/_2$ = 8 cm

Seite: $s^2 = (^d/_2)^2 + (^d/_2)^2$
$s^2 = (8\,\text{cm})^2 + (8\,\text{cm})^2 = 128\,\text{cm}^2$
$\mathbf{s} = \sqrt{128}\,\text{cm} \approx \mathbf{11.31\,cm}$

Fläche: $\mathbf{A_\square} = s^2 = \mathbf{128\,cm^2}$ Kontrolle: $A_\square = d \cdot d : 2 = 16\,\text{cm} \cdot 16\,\text{cm} : 2 = 128\,\text{cm}^2$ ✓

F117 $s = 37\,\text{mm}$, $e = 70\,\text{mm}$ $f = ?$, $A_{\diamond} = ?$



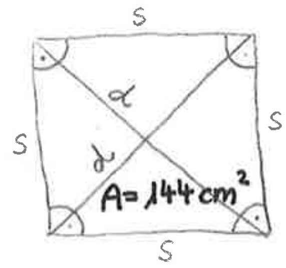
Die beiden Diagonalen zerschneiden den Rhombus in vier kongruente rechtwinklige Dreiecke mit der Hypotenuse s und den beiden Katheten: $e/2 = 35\,\text{mm}$ und $f/2 = ?$

Diagonale f:

$$
\begin{aligned}
(f/2)^2 + (e/2)^2 &= s^2 \\
(f/2)^2 &= s^2 - (e/2)^2 \\
(f/2)^2 &= (37\,\text{mm})^2 - (35\,\text{mm})^2 \\
(f/2)^2 &= 144\,\text{mm}^2 \\
\mathbf{f/2} &= \sqrt{144}\,\text{mm} = \mathbf{12\,mm} \\
\mathbf{f} &= \mathbf{24\,mm}
\end{aligned}
$$

Fläche: $A_{\diamond} = e \cdot f : 2 = 70\,\text{mm} \cdot 24\,\text{mm} : 2 = \mathbf{840\,mm^2}$

F118 $A_{\square} = 144\,\text{cm}^2$ $d = ?$



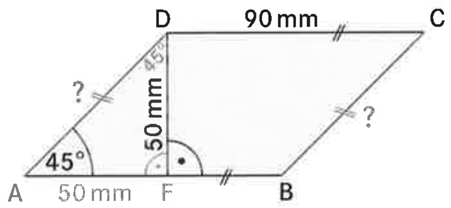
Ein Quadrat mit der Fläche $144\,\text{cm}^2$ hat die Seiten $s = 12\,\text{cm}$.

Eine Diagonale d ist Hypotenuse im halben Quadrat.
Katheten: $s = 12\,\text{cm}$, $s = 12\,\text{cm}$

Seite:

$$
\begin{aligned}
d^2 &= s^2 + s^2 \\
d^2 &= (12\,\text{cm})^2 + (12\,\text{cm})^2 \\
d^2 &= 288\,\text{cm}^2 \\
\mathbf{d} &= \sqrt{288}\,\text{cm} \approx \mathbf{16.97\,cm}
\end{aligned}
$$

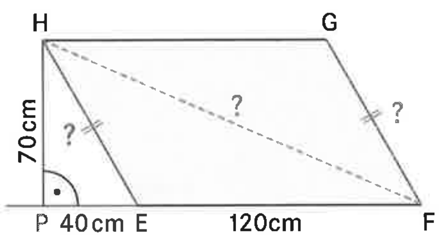
F119 **a** AD ist Hypotenuse im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck AFD.
Katheten: $AF = AD = 50\,\text{mm}$



$$
\begin{aligned}
AD^2 &= AF^2 + FD^2 \\
AD^2 &= (50\,\text{mm})^2 + (50\,\text{mm})^2 \\
AD^2 &= 5\,000\,\text{mm}^2 \\
\mathbf{AD} &= \sqrt{5\,000}\,\text{mm} \approx \mathbf{70.17\,mm}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{BC} = AD \approx \mathbf{70.17\,mm}$

b EH ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck PEH.
Katheten: $PE = 40\,\text{cm}$ $PH = 70\,\text{cm}$



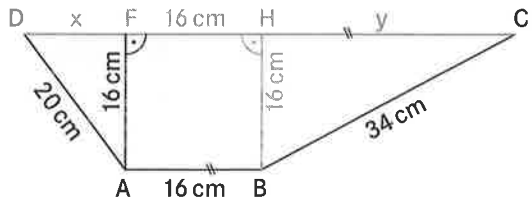
$$
\begin{aligned}
EH^2 &= PE^2 + PH^2 \\
EH^2 &= (40\,\text{cm})^2 + (70\,\text{cm})^2 \\
EH^2 &= 6\,500\,\text{cm}^2 \\
\mathbf{EH} &= \sqrt{6\,500}\,\text{cm} \approx \mathbf{80.62\,cm}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{FG} = EH \approx \mathbf{80.62\,cm}$

Die Diagonale FH ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck PFH.
Katheten: $PF = 160\,\text{cm}$ $PH = 70\,\text{cm}$

$$
\begin{aligned}
FH^2 &= PF^2 + PH^2 \\
FH^2 &= (160\,\text{cm})^2 + (70\,\text{cm})^2 \\
FH^2 &= 30\,500\,\text{cm}^2 \\
\mathbf{FH} &= \sqrt{30\,500}\,\text{cm} \approx \mathbf{174.64\,cm}
\end{aligned}
$$

F120 **a** x ist Kathete im rechtwinkligen Dreieck AFD.
2. Kathete: AF = 16 cm
Hypotenuse: AD = 20 cm



$AF^2 + x^2 = AD^2$
$x^2 = AD^2 - AF^2$
$x^2 = (20\,cm)^2 - (16\,cm)^2 = 144\,cm^2$
$\mathbf{x} = \sqrt{144}\,cm = \mathbf{12\,cm}$

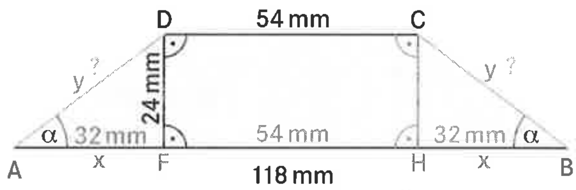
y ist Kathete im rechtwinkligen Dreieck BCH.
2. Kathete: HB = 16 cm Hypotenuse: BC = 34 cm

$HB^2 + y^2 = BC^2$
$y^2 = BC^2 - HB^2$
$y^2 = (34\,cm)^2 - (16\,cm)^2 = 900\,cm^2$
$\mathbf{y} = \sqrt{900}\,cm = \mathbf{30\,cm}$

DC = x + 16 cm + y = 12 cm + 16 cm + 30 cm = **58 cm**

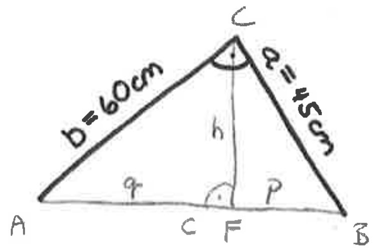
b Das Trapez ABCD ist gleichschenklig.
x = (118 mm – 54 mm) : 2 = 32 mm

y ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck AFD.
Katheten: AF = x = 32 mm
FD = 24 mm



$y^2 = x^2 + FD^2$
$y^2 = (32\,mm)^2 + (24\,mm)^2 = 1\,600\,mm^2$
$\mathbf{y} = \sqrt{1\,600}\,mm = \mathbf{40\,mm}$

F121 **a** a = 45 cm b = 60 cm zu berechnen: c, p, q, h, A



c △ABC: $c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = (45\,cm)^2 + (60\,cm)^2 = 5\,625\,cm^2$
$\mathbf{c} = \sqrt{5\,625}\,cm = \mathbf{75\,cm}$

A △ABC: $A = a \cdot b : 2$
$\mathbf{A} = 45\,cm \cdot 60\,cm : 2 = \mathbf{1\,350\,cm^2}$

h △ABC: $A = c \cdot h : 2$
$h = 2 \cdot A : c$
$\mathbf{h} = 2 \cdot 1\,350\,cm^2 : 75\,cm = \mathbf{36\,cm}$

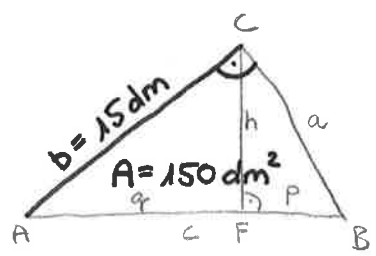
p △FBC: $p^2 + h^2 = a^2$
$p^2 = a^2 - h^2$
$p^2 = (45\,cm)^2 - (36\,cm)^2$
$p^2 = 729\,cm^2$
$\mathbf{p} = \sqrt{729}\,cm = \mathbf{27\,cm}$

q △ABC: $q = c - p$
$\mathbf{q} = 75\,cm - 27\,cm = \mathbf{48\,cm}$

q △AFC: $q^2 + h^2 = b^2$
$q^2 = b^2 - h^2$
$q^2 = (60\,cm)^2 - (36\,cm)^2$
$q^2 = 2\,304\,cm^2$
$\mathbf{q} = \sqrt{2\,304}\,cm = \mathbf{48\,cm}$

p △ABC: $p = c - q$
$\mathbf{p} = 75\,cm - 48\,cm = \mathbf{27\,cm}$

b $b = 15\,\text{dm}$ $A = 150\,\text{dm}^2$ zu berechnen: a, c, p, q, h



a $\triangle ABC$: $A = a \cdot b : 2$
$a = 2 \cdot A : b$
$\mathbf{a} = 2 \cdot 150\,\text{dm}^2 : 15\,\text{dm} = \mathbf{20\,dm}$

c $\triangle ABC$: $c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = (20\,\text{dm})^2 + (15\,\text{dm})^2 = 625\,\text{dm}^2$
$\mathbf{c} = \sqrt{625}\,\text{dm} = \mathbf{25\,dm}$

h $\triangle ABC$: $A = c \cdot h : 2$
$h = 2 \cdot A : c$
$\mathbf{h} = 2 \cdot 150\,\text{dm}^2 : 25\,\text{dm} = \mathbf{12\,dm}$

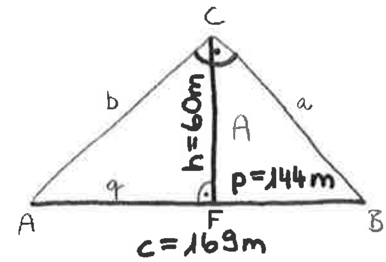
p $\triangle FBC$: $p^2 + h^2 = a^2$
$p^2 = a^2 - h^2$
$p^2 = (20\,\text{dm})^2 - (12\,\text{dm})^2$
$p^2 = 256\,\text{dm}^2$
$\mathbf{p} = \sqrt{256}\,\text{dm} = \mathbf{16\,dm}$

q $\triangle ABC$: $q = c - p$
$\mathbf{q} = 25\,\text{dm} - 16\,\text{dm} = \mathbf{9\,dm}$

q $\triangle AFC$: $q^2 + h^2 = b^2$
$q^2 = b^2 - h^2$
$q^2 = (15\,\text{dm})^2 - (12\,\text{dm})^2$
$q^2 = 81\,\text{dm}^2$
$\mathbf{q} = \sqrt{81}\,\text{dm}^2 = \mathbf{9\,dm}$

p $\triangle ABC$: $p = c - q$
$\mathbf{p} = 25\,\text{dm} - 9\,\text{dm} = \mathbf{16\,dm}$

c $c = 169\,\text{m}$ $p = 144\,\text{m}$ $h = 60\,\text{m}$ zu berechnen: a, b, q, A



a $\triangle FBC$: $a^2 = p^2 + h^2$
$a^2 = (144\,\text{m})^2 + (60\,\text{m})^2 = 24\,336\,\text{m}^2$
$\mathbf{a} = \sqrt{24\,336}\,\text{m} = \mathbf{156\,m}$

b $\triangle ABC$: $a^2 + b^2 = c^2$
$b^2 = c^2 - a^2$
$b^2 = (169\,\text{m})^2 - (156\text{m})^2 = 4\,225\,\text{m}^2$
$\mathbf{b} = \sqrt{4\,225}\,\text{m} = \mathbf{65\,m}$

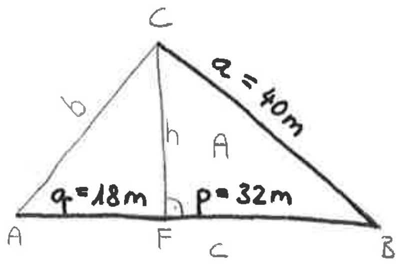
q $\triangle ABC$: $q = c - p$
$\mathbf{q} = 169\,\text{m} - 144\,\text{m} = \mathbf{25\,m}$

Wenn q vor b gerechnet wird, kann b auch im $\triangle AFC$ mit $b^2 = q^2 + h^2$ berechnet werden.

A $\triangle ABC$: $A = c \cdot h : 2$
$\mathbf{A} = 169\,\text{m} \cdot 60\,\text{m} : 2 = \mathbf{5\,070\,m^2}$

Kontrolle: $\mathbf{A} = a \cdot b : 2 = 156\,\text{m} \cdot 65\,\text{m} : 2 = \mathbf{5\,070\,m^2}$

d $a = 40\,\text{m}$ $p = 32\,\text{m}$ $q = 18\,\text{m}$ zu berechnen: b, c, h, A



c $\triangle ABC$: $c = p + q$
$\mathbf{c} = 32\,\text{m} + 18\,\text{m} = \mathbf{50\,m}$

b $\triangle ABC$: $a^2 + b^2 = c^2$
$b^2 = c^2 - a^2$
$b^2 = (50\,\text{m})^2 - (40\,\text{m})^2 = 900\,\text{m}^2$
$\mathbf{b} = \sqrt{900}\,\text{m} = \mathbf{30\,m}$

h $\triangle FBC$: $h^2 + p^2 = a^2$
$h^2 = a^2 - p^2$
$h^2 = (40\,\text{m})^2 - (32\,\text{m})^2 = 576\,\text{m}^2$
$\mathbf{h} = \sqrt{576}\,\text{m} = \mathbf{24\,m}$

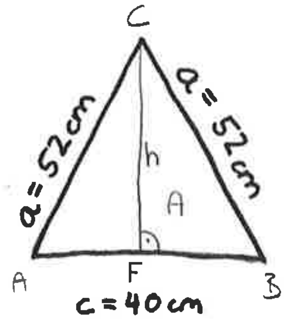
h im $\triangle FBC$ zu berechnen ist zuverlässiger als eine Berechnung im $\triangle AFC$, weil p und a gegeben sind und nicht selbst berechnet wurden.

A △ABC: A = c · h : 2

A = 50 m · 24 m : 2 = **600 m²**

Kontrolle: **A** = a · b : 2 = 40 m · 30 m : 2 = **600 m²**

F122 **a** a = 52 cm c = 40 cm zu berechnen: u, h, A



u △ABC: u = 2a + c

u = 2 · 52 cm + 40 cm = **144 cm**

h △AFC: $(c/2)^2 + h^2 = a^2$

$h^2 = a^2 - (c/2)^2$

$h^2 = (52\,cm)^2 - (20\,cm)^2$

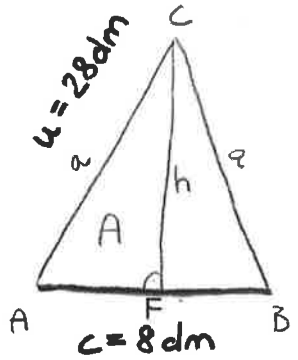
$h^2 = 2\,304\,cm^2$

$\mathbf{h} = \sqrt{2\,304}\,cm = \mathbf{48\,cm}$

A △ABC: A = c · h : 2

A = 40 cm · 48 cm : 2 = **960 cm²**

b c = 8 dm u = 28 dm zu berechnen: a, h, A



a △ABC: a = (u − c) : 2

a = (28 dm − 8 dm) : 2 = **10 dm**

h △AFC: $(c/2)^2 + h^2 = a^2$

$h^2 = a^2 - (c/2)^2$

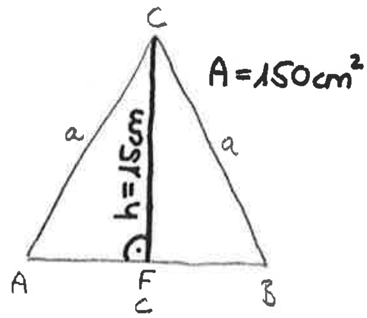
$h^2 = (10\,dm)^2 - (4\,dm)^2 = 84\,dm^2$

$\mathbf{h} = \sqrt{84}\,dm \approx \mathbf{9.17\,dm}$

A △ABC: A = c · h : 2

$\mathbf{A} = 8\,dm \cdot \sqrt{84}\,dm : 2 \approx \mathbf{36.66\,dm^2}$

c h = 15 cm A = 150 cm² zu berechnen: a, c, u



c △ABC: A = c · h : 2

c = 2 · A : h

c = 300 cm² : 15 cm = **20 cm**

a △AFC: $a^2 = (c/2)^2 + h^2$

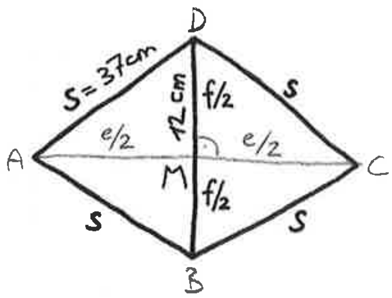
$a^2 = (10\,cm)^2 + (15\,cm)^2 = 325\,cm^2$

$\mathbf{a} = \sqrt{325}\,cm \approx \mathbf{18.03\,cm}$

u △ABC: u = 2a + c

$\mathbf{u} = 2 \cdot \sqrt{325}\,cm + 20\,cm \approx \mathbf{56.06\,cm}$

F123 **a** s = 37 cm f = 24 cm zu berechnen: e, u, A



e △AMD: $(e/2)^2 + (12\,cm)^2 = (37\,cm)^2$

$(e/2)^2 = (37\,cm)^2 - (12\,cm)^2$

$(e/2)^2 = 1225\,cm^2$

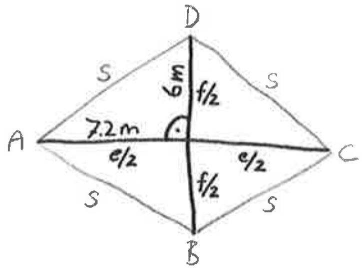
$e/2 = \sqrt{1225}\,cm = 35\,cm$

e = **70 cm**

u = 4 · s = 4 · 37 cm = **148 cm**

A = e · f : 2 = 70 cm · 24 cm : 2 = **840 cm²**

b e = 14.4 m f = 12 m zu berechnen: s, u, A



s △AMD: $s^2 = (7.2\,\text{m})^2 + (6\,\text{m})^2$

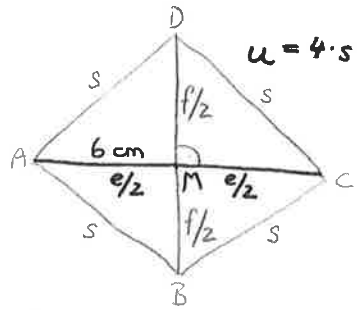
$s^2 = 87.8\,\text{m}^2$

$\mathbf{s} = \sqrt{87.8}\,\text{m} \approx \mathbf{9.37\,m}$

$\mathbf{u} = 4 \cdot s = 4 \cdot \sqrt{87.8}\,\text{m} \approx \mathbf{37.49\,m}$

$\mathbf{A} = e \cdot f : 2 = 14.4\,\text{m} \cdot 12\,\text{m} : 2 = \mathbf{86.4\,m^2}$

c e = 12 cm u = 64 cm zu berechnen: s, f, A



$\mathbf{s} = u : 4 = 64\,\text{cm} : 4 = \mathbf{16\,cm}$

f △AMD: $(^f/_2)^2 + (6\,\text{cm})^2 = (16\,\text{cm})^2$

$(^f/_2)^2 = (16\,\text{cm})^2 - (6\,\text{cm})^2$

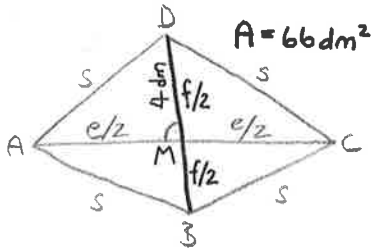
$(^f/_2)^2 = 220\,\text{cm}^2$

$^f/_2 = \sqrt{220}\,\text{cm} \approx 14.83\,\text{cm}$

$\mathbf{f \approx 29.66\,cm}$

$\mathbf{A} = e \cdot f : 2 = 12\,\text{cm} \cdot \sqrt{220}\,\text{cm} : 2 = \mathbf{177.99\,cm^2}$

d f = 8 dm A = 66 dm² zu berechnen: s, e, u



e $A = e \cdot f : 2$

$e = 2 \cdot A : f$

$\mathbf{e} = 132\,\text{dm}^2 : 8\,\text{dm} = \mathbf{16.5\,dm}$

s △AMD: $s^2 = (^e/_2)^2 + (^f/_2)^2$

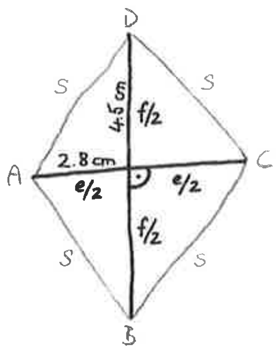
$s^2 = (8.25\,\text{dm})^2 + (4\,\text{dm})^2$

$s^2 = 84.0625\,\text{dm}^2$

$\mathbf{s} = \sqrt{84.0625}\,\text{dm} \approx \mathbf{9.17\,dm}$

$\mathbf{u} = 4 \cdot s \approx \mathbf{36.67\,dm}$

F124 **a** e = AC = 5.6 cm f = BD = 9 cm zu berechnen: s, u, A



s: $s^2 = (^e/_2)^2 + (^f/_2)^2$

$s^2 = (2.8\,\text{cm})^2 + (4.5\,\text{cm})^2$

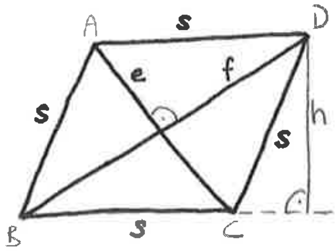
$s^2 = 28.09\,\text{cm}^2$

$\mathbf{s} = \sqrt{28.09}\,\text{cm} = \mathbf{5.3\,cm}$

$\mathbf{u} = 4 \cdot s = \mathbf{21.2\,cm}$

$\mathbf{A} = e \cdot f : 2 = 5.6\,\text{cm} \cdot 9\,\text{cm} : 2 = \mathbf{25.2\,cm^2}$

b Ein Rhombus ist ein spezielle Rhomboid.
Es gilt daher auch die Flächenformel für Rhomboide.



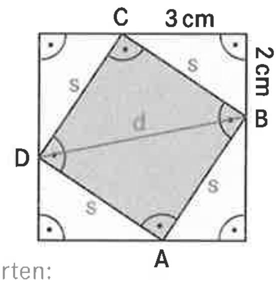
$A = s \cdot h$

$h = A : s$

$\mathbf{h} = 25.2\,\text{cm}^2 : 5.3\,\text{cm} \approx \mathbf{4.75\,cm}$

F125 **a** **Umfang u**

Die Seite s ist Hypotenuse im Eckdreieck
Katheten: 3 cm und 2 cm



$s^2 = (3\,\text{cm})^2 + (2\,\text{cm})^2$
$s^2 = 13\,\text{cm}^2$
$\mathbf{s} = \sqrt{13}\,\text{cm} \approx \mathbf{3.61\,cm}$

$u = 4 \cdot s$
$\mathbf{u} = 4 \cdot \sqrt{13}\,\text{cm} \approx \mathbf{14.42\,cm}$

mit gerundeten Werten:
$u \approx 4 \cdot 3.61\,\text{cm} = 14.44\,\text{cm}$

Fläche

$A = \text{Seite} \cdot \text{Seite}$
$\mathbf{A} = \sqrt{13}\,\text{cm} \cdot \sqrt{13}\,\text{cm} = \mathbf{13\,cm^2}$

mit gerundeten Werten:
$A \approx 3.61\,\text{cm} \cdot 3.61\,\text{cm} = 13.03\,\text{cm}^2$

Kontrolle: ganzes Quadrat – 4 Dreiecke = $25\,\text{cm}^2 - 4 \cdot 3\,\text{cm}^2 = 13\,\text{cm}^2$ ✓

Diagonale

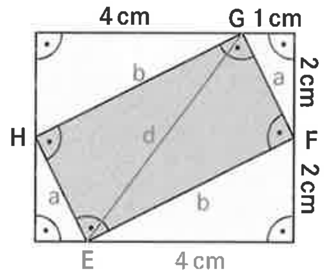
Die Diagonale d ist Hypotenuse im halben Quadrat ABCD

$d^2 = s^2 + s^2$
$d^2 = (\sqrt{13}\,\text{cm})^2 + (\sqrt{13}\,\text{cm})^2$
$d^2 = 13\,\text{cm}^2 + 13\,\text{cm}^2 = 26\,\text{cm}^2$
$\mathbf{d} = \sqrt{26}\,\text{cm} \approx \mathbf{5.10\,cm}$

mit gerundeten Werten:
$d^2 \approx (3.61\,\text{cm})^2 + (3.61\,\text{cm})^2 = 26.06\,\text{cm}^2$
$d \approx \sqrt{26.06}\,\text{cm} \approx 5.11\,\text{cm}$

b **Umfang u**

a ist Hypotenuse im kleinen Eckdreieck, Katheten: 1 cm, 2 cm
b ist Hypotenuse im grossen Eckdreieck, Katheten: 2 cm, 4 cm



$a^2 = (1\,\text{cm})^2 + (2\,\text{cm})^2$
$a^2 = 5\,\text{cm}^2$
$\mathbf{a} = \sqrt{5}\,\text{cm} \approx \mathbf{2.24\,cm}$

$b^2 = (2\,\text{cm})^2 + (4\,\text{cm})^2$
$b^2 = 20\,\text{cm}^2$
$\mathbf{b} = \sqrt{20}\,\text{cm} \approx \mathbf{4.47\,cm}$

$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$
$\mathbf{u} = 2 \cdot \sqrt{5}\,\text{cm} + 2 \cdot \sqrt{20}\,\text{cm} \approx \mathbf{13.42\,cm}$

mit gerundeten Werten:
$u \approx 2 \cdot 2.24\,\text{cm} + 2 \cdot 4.47\,\text{cm} = 13.42\,\text{cm}$

Fläche

$A = a \cdot b$
$\mathbf{A} = \sqrt{5}\,\text{cm} \cdot \sqrt{20}\,\text{cm} = \mathbf{10\,cm^2}$

mit gerundeten Werten:
$A \approx 2.24\,\text{cm} \cdot 4.47\,\text{cm} \approx 10.01\,\text{cm}^2$

Kontrolle: ganzes Rechteck – 2mal 2 Dreiecke = $20\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 1\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 4\,\text{cm}^2 = 10\,\text{cm}^2$ ✓

Diagonale

Die Diagonale d ist Hypotenuse im halben Rechteck EFGH.

$d^2 = a^2 + b^2$
$d^2 = (\sqrt{5}\,\text{cm})^2 + (\sqrt{20}\,\text{cm})^2$
$d^2 = 5\,\text{cm}^2 + 20\,\text{cm}^2 = 25\,\text{cm}^2$
$\mathbf{d} = \sqrt{25}\,\text{cm} = \mathbf{5\,cm}$

mit gerundeten Werten:
$d^2 \approx (2.24\,\text{cm})^2 + (4.47\,\text{cm})^2 \approx 25.00\,\text{cm}^2$
$d \approx \sqrt{25.00}\,\text{cm} = 5\,\text{cm}$

Die Diagonale HF geht von Seitenmitte zu Seitenmitte. Man könnte ihre Länge also auch ohne Rechnung bestimmen.

c Abweichungen kann es geben, wenn du mit gerundeten Zwischenresultaten rechnest. Wurzeln solltest du deshalb **immer erst am Schluss runden** – «unterwegs» also die exakten Werte benutzen. Diese kannst du dazu **im Taschenrechner abspeichern**. Welche Abweichungen tolerierbar sind, hängt vom Umfeld ab.

Ein Feinmechaniker arbeitet auf Hundertstel Millimeter genau.

F126 $\sqrt{7}\,cm + \sqrt{7}\,cm + \sqrt{7}\,cm = \mathbf{3 \cdot \sqrt{7}\,cm \approx 7.94\,cm}$

$\sqrt{2}\,dm + \sqrt{3}\,dm + \sqrt{2}\,dm + \sqrt{3}\,dm = \mathbf{2 \cdot \sqrt{2}\,dm + 2 \cdot \sqrt{3}\,dm \approx 6.29\,dm}$

$\sqrt{5}\,m + \sqrt{9}\,m + \sqrt{5}\,m + \sqrt{5}\,m + \sqrt{16}\,m = \mathbf{7\,m + 3 \cdot \sqrt{5}\,m \approx 13.71\,m}$

Summen von Wurzeln

Summen von gleichen Wurzeltermen lassen sich zusammenfassen:

$\sqrt{a} + \sqrt{a} = \mathbf{2 \cdot \sqrt{a}} = \mathbf{2\sqrt{a}}$

$\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} = \mathbf{3 \cdot \sqrt{x}} = \mathbf{3\sqrt{x}}$

$\sqrt{a} + \sqrt{x} + \sqrt{a} + \sqrt{x} + \sqrt{a} = \mathbf{3 \cdot \sqrt{a} + 2 \cdot \sqrt{x}} = \mathbf{3\sqrt{a} + 2\sqrt{x}}$

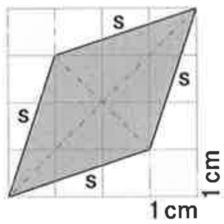
F127 $s^2 = (3\,cm)^2 + (1\,cm)^2 = 10\,cm^2$

$s = \sqrt{10}\,cm$

$\mathbf{u} = 4 \cdot s = 4 \cdot \sqrt{10}\,cm \approx \mathbf{12.65\,cm}$

Z'werte Taschenrechner → speichern
= 3.162277...

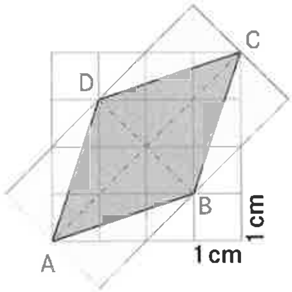
1. Weg:
Fläche Rhombus = ganzes Quadrat - 4 Dreiecke - 2 Eckquadrätchen



$A_\triangle = 3\,cm \cdot 1\,cm : 2 = 1.5\,cm^2$

$\mathbf{A_\diamond} = 16\,cm^2 - 4 \cdot 1.5\,cm^2 - 2 \cdot 1\,cm^2 = \mathbf{8\,cm^2}$

2. Weg:
Fläche Rhombus = 1. Diagonale · 2. Diagonale : 2



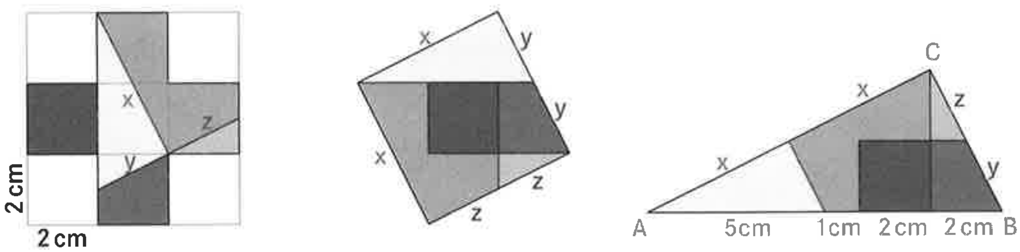
$AC^2 = (4\,cm)^2 + (4\,cm)^2 = 32\,cm^2$
$AC = \sqrt{32}\,cm$ = 5.65685...

$BD^2 = (2\,cm)^2 + (2\,cm)^2 = 8\,cm^2$
$BD = \sqrt{8}\,cm$ = 2.82842...

$\mathbf{A_\diamond} = AC \cdot BD : 2$
$= \sqrt{32}\,cm \cdot \sqrt{8}\,cm : 2 = \mathbf{8\,cm^2}$

F128 Arbeitsblatt

F129



$x^2 = (4\,cm)^2 + (2\,cm)^2 = 20\,cm^2$
$x = \sqrt{20}\,cm$

Z'werte TR → speichern
= 4.472135...

$y^2 = (1\,cm)^2 + (2\,cm)^2 = 5\,cm^2$
$y = \sqrt{5}\,cm$ = 2.236067...

$z = y = \sqrt{5}\,cm$ = 2.236067...

Katheten des Dreiecks:
AC = $2 \cdot x = 2 \cdot \sqrt{20}$ cm ≈ **8.94 cm**
BC = $y + z = 2 \cdot \sqrt{5}$ cm ≈ **4.47 cm**

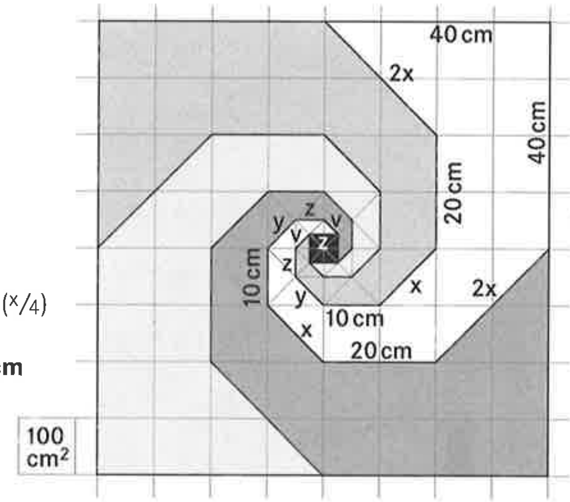
Umfang des Quadrates:
u = $2 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z$
= $2 \cdot \sqrt{20}$ cm + $2 \cdot \sqrt{5}$ cm + $2 \cdot \sqrt{5}$ cm ≈ **17.89 cm**

Die Wurzelterme erst hier ausrechnen oder stattdessen die gespeicherten Werte übernehmen.

F130 $x^2 = (10\,\text{cm})^2 + (10\,\text{cm})^2$
$x^2 = 200\,\text{cm}^2$
$x = \sqrt{200}\,\text{cm} = 14.1421356...$

$y = {}^{x}/_{2}$
$z = 5\,\text{cm}$
$v = {}^{y}/_{2} = {}^{x}/_{4}$

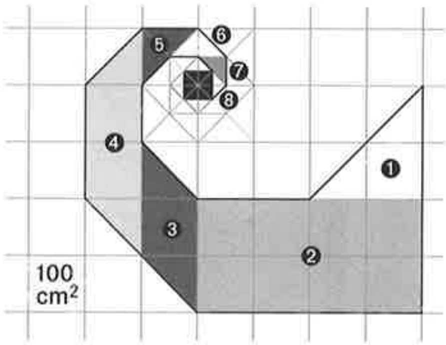
$u = 140\,\text{cm} + 6x + 2y + 3z + 2v$
$u = 140\,\text{cm} + 6x + 2 \cdot ({}^{x}/_{2}) + 15\,\text{cm} + 2 \cdot ({}^{x}/_{4})$
$u = 155\,\text{cm} + 7.5x$
u = $155\,\text{cm} + 7.5 \cdot \sqrt{200}\,\text{cm}$ ≈ **261.07 cm**



Die Fläche einer spiralförmigen Teilfigur lässt sich auf ganz verschiedene Arten berechnen – je nachdem, wie man die Fläche unterteilt.

Beispielsweise:

A❶	=	200 cm²	
A❷	=	800 cm²	
A❸	=	200 cm²	
A❹	=	300 cm²	
A❺	=	50 cm²	ein halbes Quadrat
A❻	=	25 cm²	ein viertel Quadrat
A❼	=	12.5 cm²	ein achtel Quadrat
A❽	=	6.25 cm²	ein sechzehntel Quadrat



A_{total} = **1593.75 cm²**

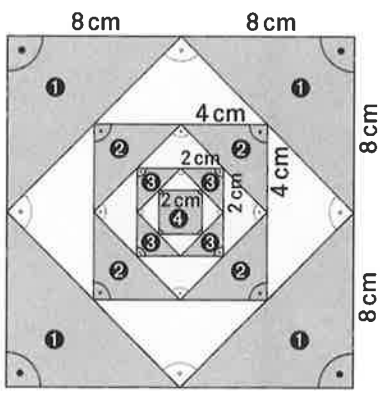
A■ = 25 cm² ein viertel Quadrat

A_{total} = ($A_{grosses□}$ – A■) : 4 = (80 cm · 80 cm – 25 cm²) : 4 = **1593.75 cm²** ✓

Sinn dieser Aufgabe an dieser Stelle:
Gesunden Verstand walten lassen.
Nicht einfach blindlings den Satz von Pythagoras anwenden, nur weil diese Aufgabe in diesem Kapitel steht.
Wir zeigen deshalb absichtlich keine Lösung, bei der die Dreiecksseiten mit Pythagoras berechnet werden.

F131 Hier führen viele verschiedene Wege zum Ziel.
Die einfachsten kommen **ohne Pythagoras** aus!

Möglicher Lösungsweg 1:
Graue Flächen berechen und dann vom ganzen Quadrat wegzählen.

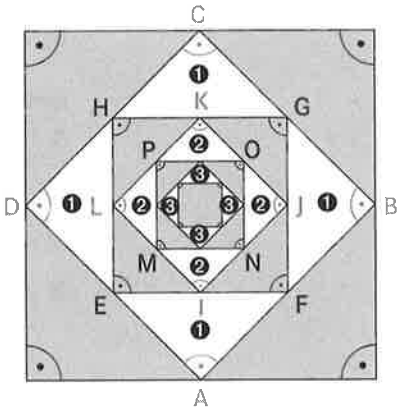


Die Katheten halbieren sich bei jedem Schritt nach innen.

$A_{grosses□}$	= (16 cm)²	=	256 cm²
A❶	= 8 cm · 8 cm : 2	=	32 cm²
A❷	= 4 cm · 4 cm : 2	=	8 cm²
A❸	= 2 cm · 2 cm : 2	=	2 cm²
A❹	= 2 cm · 2 cm	=	4 cm²

A_{gelb} = $A_{grosses□}$ – 4 · A❶ – 4 · A❷ – 4 · A❸ – A❹ = **84 cm²** →

→ **Möglicher Lösungsweg 2:**



Das Quadrat ABCD beansprucht die Hälfte der grossen Quadratfläche.
Das Quadrat EFGH beansprucht die Hälfte der Fläche von ABCD.

Somit gilt
$4 \cdot A$❶ = ein Viertel von $A_{\text{grosses}\square}$
$A_{\text{grosses}\square} = (16\,\text{cm})^2 = 256\,\text{cm}^2$
und damit
$4 \cdot A$❶ $= 256\,\text{cm}^2 : 4 = 64\,\text{cm}^2$

Analog:
$4 \cdot A$❷ = ein Viertel von A_{EFGH}
$A_{\text{EFGH}} = (8\,\text{cm})^2 = 64\,\text{cm}^2$
$4 \cdot A$❷ $= 64\,\text{cm}^2 : 4 = 16\,\text{cm}^2$

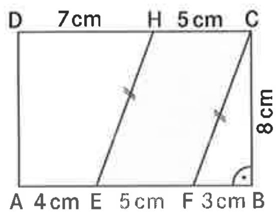
$4 \cdot A$❸ = ein Viertel von A_{MNOP}
$A_{\text{MNOP}} = (4\,\text{cm})^2 = 16\,\text{cm}^2$
$4 \cdot A$❸ $= 16\,\text{cm}^2 : 4 = 4\,\text{cm}^2$

$\mathbf{A_{gelb}} = 4 \cdot A$❶ $+ 4 \cdot A$❷ $+ 4 \cdot A$❸ $= \mathbf{84\,cm^2}$

F132 a $FC^2 = (3\,\text{cm})^2 + (8\,\text{cm})^2 = 73\,\text{cm}^2$ Z'wert TR → speichern
$FC = \sqrt{73}\,\text{cm}$ = 8.544...

$EH = FC, \quad EF = HC = 5\,\text{cm}$

$\mathbf{u} = 2 \cdot FC + 2 \cdot EF$
$2 \cdot \sqrt{73}\,\text{cm} + 2 \cdot 5\,\text{cm} \approx \mathbf{27.09\,cm}$

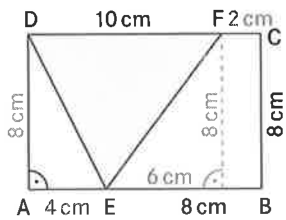


b $DE^2 = (4\,\text{cm})^2 + (8\,\text{cm})^2 = 80\,\text{cm}^2$
$DE = \sqrt{80}\,\text{cm}$ = 8.944...

$EF^2 = (6\,\text{cm})^2 + (8\,\text{cm})^2 = 100\,\text{cm}^2$
$EF = \sqrt{100}\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$

$DF = 10\,\text{cm}$

$\mathbf{u} = DE + EF + FD$
$= \sqrt{80}\,\text{cm} + 10\,\text{cm} + 10\,\text{cm} \approx \mathbf{28.94\,cm}$

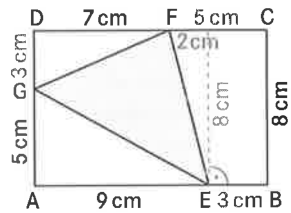


c $GE^2 = (5\,\text{cm})^2 + (9\,\text{cm})^2 = 106\,\text{cm}^2$
$GE = \sqrt{106}\,\text{cm}$ = 10.295...

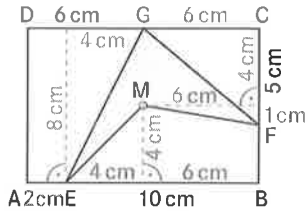
$EF^2 = (8\,\text{cm})^2 + (2\,\text{cm})^2 = 68\,\text{cm}^2$
$EF = \sqrt{68}\,\text{cm}$ = 8.246...

$FG^2 = (7\,\text{cm})^2 + (3\,\text{cm})^2 = 58\,\text{cm}^2$
$FG = \sqrt{58}\,\text{cm}$ = 7.615...

$\mathbf{u} = GE + EF + FG$
$= \sqrt{106}\,\text{cm} + \sqrt{68}\,\text{cm} + \sqrt{58}\,\text{cm} \approx \mathbf{26.16\,cm}$



d $GE^2 = (4\,cm)^2 + (8\,cm)^2 = 80\,cm^2$ — Z'werte TR → speichern
$GE = \sqrt{80}\,cm$ — $= 8.944...$



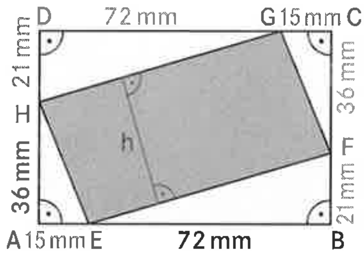
$EM^2 = (4\,cm)^2 + (4\,cm)^2 = 32\,cm^2$
$EM = \sqrt{32}\,cm$ — $= 5.656...$

$MF^2 = (1\,cm)^2 + (6\,cm)^2 = 37\,cm^2$
$MF = \sqrt{37}\,cm$ — $= 6.082...$

$FG^2 = (5\,cm)^2 + (6\,cm)^2 = 61\,cm^2$
$FG = \sqrt{61}\,cm$ — $= 7.810...$

u $= GE + EM + MF + FG$
$= \sqrt{80}\,cm + \sqrt{32}\,cm + \sqrt{37}\,cm + \sqrt{61}\,cm \approx$ **28.49 cm**

F133 **a** $EF^2 = (72\,mm)^2 + (21\,mm)^2 = 5625\,mm^2$
EF $= \sqrt{5625}\,mm =$ **75 mm**



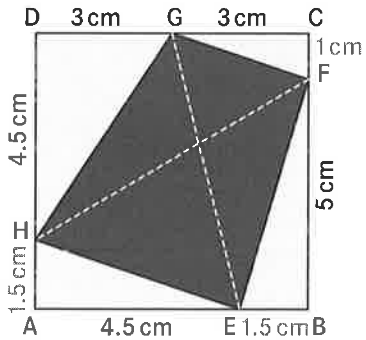
$FG^2 = (36\,mm)^2 + (15\,mm)^2 = 1521\,mm^2$
FG $= \sqrt{1521}\,mm =$ **39 mm**

u $= 2 \cdot EF + 2 \cdot FG = 150\,mm + 78\,mm =$ **228 mm**

b $A_{Rhomboid} = A_{Rechteck} - 2 \cdot A_{grosses\triangle} - 2 \cdot A_{kleines\triangle}$
$= 87\,mm \cdot 57\,mm - 72\,mm \cdot 21\,mm - 36\,mm \cdot 15\,mm =$ **2 907 mm²**

Es gilt aber auch: $A_{Rhomboid} = EF \cdot h$
Also: $h = A_{Rhomboid} : EF = 2\,907\,mm^2 : 75\,mm =$ **38.76 mm**

F134 **a** $EF^2 = (1.5\,cm)^2 + (5\,cm)^2 = 27.25\,cm^2$
EF $= \sqrt{\mathbf{27.25}}$ **cm** $= 5.220...\,cm$ → speichern



$FG^2 = (1\,cm)^2 + (3\,cm)^2 = 10\,cm^2$
FG $= \sqrt{\mathbf{10}}$ **cm** $= 3.162...\,cm$

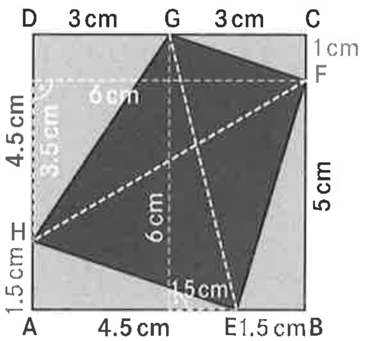
$GH^2 = (3\,cm)^2 + (4.5\,cm)^2 = 29.25\,cm^2$
GH $= \sqrt{\mathbf{29.25}}$ **cm** $= 5.408...\,cm$ → speichern

$HE^2 = (1.5\,cm)^2 + (4.5\,cm)^2 = 22.5\,cm^2$
HE $= \sqrt{\mathbf{22.5}}$ **cm** $= 4.743...\,cm$ → speichern

u $= EF + FG + GH + HE \approx$ **18.53 cm**

b $A_{EFGH} = A_{Quadrat} - A_{\triangle EBF} - A_{\triangle FCG} - A_{\triangle HGD} - A_{\triangle AEH}$
$= 36\,cm^2 - 1.5\,cm \cdot 5\,cm : 2 - 1\,cm \cdot 3\,cm : 2 - 3\,cm \cdot 4.5\,cm : 2 - 1.5\,cm \cdot 4.5\,cm : 2$
$= 20.625\,cm^2 \approx$ **20.63 cm²**

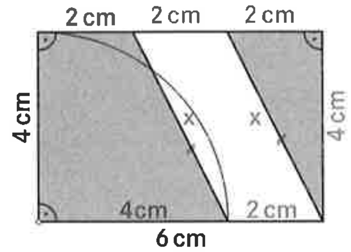
c Diagonale EG
Mit einer Parallelen zu AD durch G oder E erhält man ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten von 6 cm und 1.5 cm Länge.
$EG^2 = (1.5\,cm)^2 + (6\,cm)^2 = 38.25\,cm^2$
EG $= \sqrt{38.25}\,cm \approx$ **6.18 cm**



Diagonale HF
Parallele zu AB durch H oder F → rechtwinkliges Dreieck mit Katheten von 3.5 cm und 6 cm Länge.
$HF^2 = (3.5\,cm)^2 + (6\,cm)^2 = 48.25\,cm^2$
HF $= \sqrt{48.25}\,cm \approx$ **6.95 cm**

F135 ■ $x^2 = (4\,\text{cm})^2 + (2\,\text{cm})^2 = 20\,\text{cm}^2$
$x = \sqrt{20}\,\text{cm} = 4.472...\,\text{cm}$ → speichern

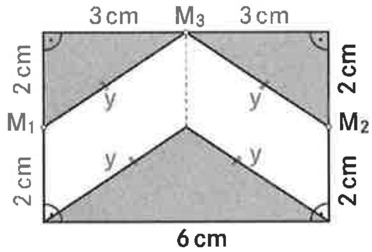
$\mathbf{u} = 2 \cdot 2\,\text{cm} + 2 \cdot x \approx \mathbf{12.94\,cm}$



■ Die Figur ist symmetrisch. Die schräg verlaufenden Strecken sind alle gleich lang.

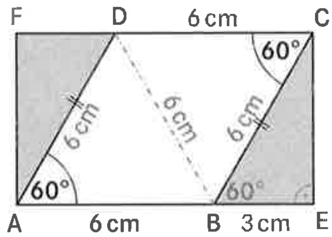
$y = M_2M_3{}^2 = (2\,\text{cm})^2 + (3\,\text{cm})^2 = 13\,\text{cm}^2$
$y = \sqrt{13}\,\text{cm} = 3.605...\,\text{cm}$ → speichern

$\mathbf{u} = 2 \cdot 2\,\text{cm} + 4 \cdot y \approx \mathbf{18.42\,cm}$



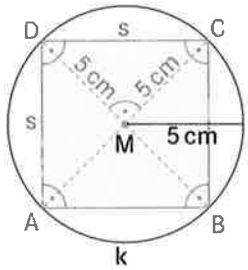
F136 Der Rhombus ist aus zwei gleichseitigen Dreiecken mit 6 cm langen Seiten zusammengesetzt.
Die beiden Eckdreiecke sind **halbe gleichseitige Dreiecke**.

$\mathbf{BE} = \mathbf{3\,cm}$
$EC^2 + (3\,\text{cm})^2 = (6\,\text{cm})^2$
$EC^2 = (6\,\text{cm})^2 - (3\,\text{cm})^2 = 27\,\text{cm}^2$
$\mathbf{EC} = \sqrt{27}\,\text{cm} \approx \mathbf{5.20\,cm}$



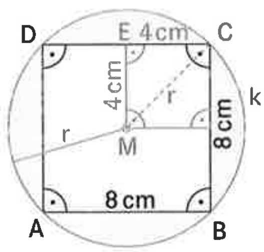
F137 ■ Quadratseite s = CD
CD ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck DMC.
Katheten: MC = MD = 5 cm (Umkreisradius)

$CD^2 = (5\,\text{cm})^2 + (5\,\text{cm})^2 = 50\,\text{cm}^2$
$\mathbf{CD} = \sqrt{50}\,\text{cm} \approx \mathbf{7.07\,cm}$



■ Umkreisradius r = MC

$MC^2 = (4\,\text{cm})^2 + (4\,\text{cm})^2 = 32\,\text{cm}^2$
$\mathbf{MC} = \sqrt{32}\,\text{cm} \approx \mathbf{5.66\,cm}$



F138 ■ $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$
$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 10$
$\sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = 4.582575...$
$\sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{21} = 4.582575...$

$(\sqrt{5})^2 = 5$
$\sqrt{5^2} = 5$

$\sqrt{9} : \sqrt{4} = 3 : 2 = 1.5$
$\sqrt{9 : 4} = \sqrt{2.25} = 1.5$

$\sqrt{20} : \sqrt{5} = 2$
$\sqrt{20 : 5} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{9} : \sqrt{5} = 3 : \sqrt{5} = 1.341640...$
$\sqrt{9 : 5} = 1.341640...$

$\sqrt{3} : \sqrt{7} = 0.654653...$
$\sqrt{3 : 7} = 0.654653...$

Produkte/Quotienten von Wurzeln – Wurzeln aus Produkten/Quotienten

Produkte/Quotienten von Wurzeltermen lassen sich zusammenfassen.
Wurzeln aus Produkten/Quotienten lassen sich einzeln ziehen.

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{ab}$ Speziell gilt: $\sqrt{a^2} = a$

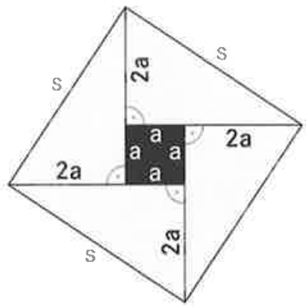
$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a:b}$ auch $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

$\sqrt{a^2} = a$ $\sqrt{4a^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2} = \mathbf{2a}$ $\sqrt{7a^2} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{\mathbf{7}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}\sqrt{\mathbf{7}}$

$\sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}$ $\sqrt{\frac{7a^2}{4}} = \frac{\sqrt{7a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}} \cdot \sqrt{\mathbf{7}}$

oder: $\sqrt{\frac{7a^2}{4}} = \sqrt{7 \cdot \frac{a^2}{4}} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}} \cdot \sqrt{\mathbf{7}}$

F139 **Umfang**:
s ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten: 2a und 3a



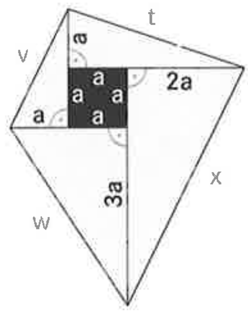
s: $s^2 = (2a)^2 + (3a)^2$
$s^2 = 4a^2 + 9a^2$
$s^2 = 13a^2$
$\mathbf{s} = \sqrt{\mathbf{13}} \cdot \mathbf{a}$

u: $\mathbf{u} = 4 \cdot s = \mathbf{4} \cdot \sqrt{\mathbf{13}} \cdot \mathbf{a} \approx \mathbf{14.42\,a}$

Fläche: A = schwarzes Quadrat + 4 gelbe Dreiecke

$\mathbf{A} = a^2 + 4 \cdot \frac{2a \cdot 3a}{2} = a^2 + 4 \cdot 3a^2 = \mathbf{13a^2}$

Umfang:



t: $t^2 = (3a)^2 + a^2$
$t^2 = 10a^2$
$\mathbf{t} = \sqrt{\mathbf{10}} \cdot \mathbf{a}$

v: $v^2 = (2a)^2 + a^2$
$v^2 = 5a^2$
$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{5}} \cdot \mathbf{a}$

w: $w^2 = (2a)^2 + (3a)^2$
$w^2 = 13a^2$
$\mathbf{w} = \sqrt{\mathbf{13}} \cdot \mathbf{a}$

x: $x^2 = (2a)^2 + (4a)^2$
$x^2 = 20a^2$
$\mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{20}} \cdot \mathbf{a}$

u: $\mathbf{u} = t + v + w + x = a \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{13} + \sqrt{20}) \approx \mathbf{13.48\,a}$

Fläche: A = schwarzes Quadrat + 4 gelbe Dreiecke

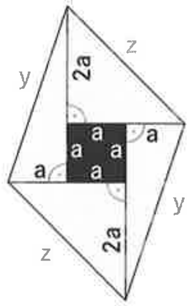
$\mathbf{A} = a^2 + \frac{3a \cdot a}{2} + \frac{2a \cdot a}{2} + \frac{2a \cdot 3a}{2} + \frac{4a \cdot 2a}{2}$

$= a^2 + 1.5a^2 + 1a^2 + 3a^2 + 4a^2 = \mathbf{10.5\,a^2}$

Umfang:

y:

$$y^2 = a^2 + (3a)^2$$
$$y^2 = 10a^2$$
$$\mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{10}}\cdot\mathbf{a}$$



z:

$$z^2 = (2a)^2 + (2a)^2$$
$$z^2 = 8a^2$$
$$\mathbf{z} = \sqrt{\mathbf{8}}\cdot\mathbf{a}$$

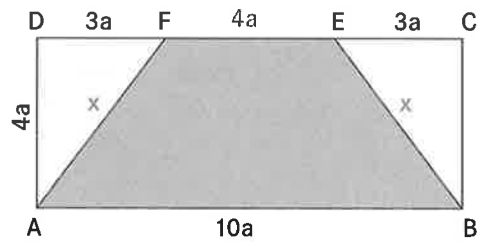
u: $\mathbf{u} = 2\cdot y + 2\cdot z = 2\cdot\sqrt{10}\cdot a + 2\cdot\sqrt{8}\cdot a \approx \mathbf{11.98\,a}$

Fläche: A = schwarzes Quadrat + 2 · 2 gelbe Dreiecke

$$\mathbf{A} = a^2 + 2\cdot\frac{2a\cdot 2a}{2} + 2\cdot\frac{3a\cdot a}{2} = a^2 + 4a^2 + 3a^2 = \mathbf{8a^2}$$

F140 **Umfang:**

x ist Hypotenuse im Eckdreieck mit den Katheten: 3a und 4a



x:

$$x^2 = (3a)^2 + (4a)^2$$
$$x^2 = 9a^2 + 16a^2$$
$$x^2 = 25a^2$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{5a}$$

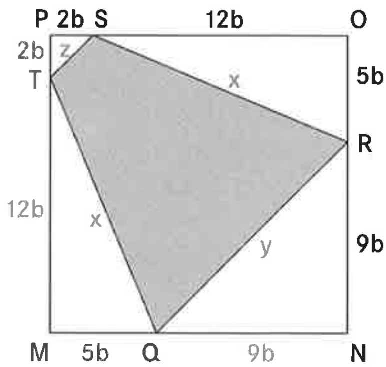
$\mathbf{u} = 10a + 5a + 4a + 5a = \mathbf{24a}$

Fläche: $\mathbf{A}$ = Mittellinie · Höhe = $7a\cdot 4a = \mathbf{28a^2}$

oder: A = Rechteck – 2· Dreieck = $4a\cdot 10a - 4a\cdot 3a = 40a^2 - 12a^2 = \mathbf{28a^2}$

Umfang:

x ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten: 12b und 5b



x:

$$x^2 = (12b)^2 + (5b)^2$$
$$x^2 = 169b^2$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{13b}$$

y ist Hypotenuse im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck mit den Katheten: 9b und 9b

y:

$$y^2 = (9b)^2 + (9b)^2$$
$$y^2 = 162\,b^2$$
$$\mathbf{y} = \sqrt{162\,b^2} = \sqrt{\mathbf{162}}\cdot\mathbf{b} \approx \mathbf{12.73\,b}$$

z ist Hypotenuse im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck mit den Katheten: 2b und 2b

z:

$$z^2 = (2b)^2 + (2b)^2$$
$$z^2 = 8\,b^2$$
$$\mathbf{z} = \sqrt{8\,b^2} = \sqrt{\mathbf{8}}\cdot\mathbf{b} \approx \mathbf{2.83\,b}$$

$\mathbf{u} = 2x + y + z = 26\,b + \sqrt{162}\cdot b + \sqrt{8}\cdot b = (26 + \sqrt{162} + \sqrt{8})b \approx \mathbf{41.56\,b}$

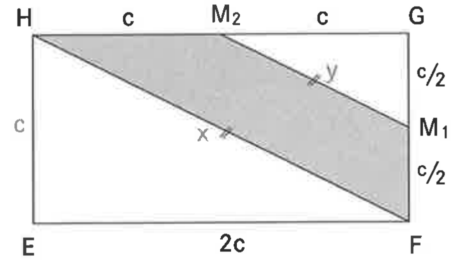
oder

$\mathbf{u} = 2x + y + z \approx 26\,b + 12.73\,b + 2.83\,b = \mathbf{41.56\,b}$

Fläche: A = Quadrat – 4· Dreiecke = $(14b)^2 - 30\,b^2 - 40.5\,b^2 - 30\,b^2 - 2\,b^2 = \mathbf{93.5\,b^2}$

Umfang:

x ist Hypotenuse im Eckdreieck mit den Katheten: c und 2c



x: $x^2 = c^2 + (2c)^2$

$x^2 = c^2 + 4c^2$

$x^2 = 5c^2$

$\mathbf{x = \sqrt{5}c \approx 2.24c}$

y ist Hypotenuse im Eckdreieck mit den Katheten: c und $\frac{c}{2}$

y: $y^2 = c^2 + (\frac{c}{2})^2$

$y^2 = c^2 + \frac{c^2}{4}$

$y^2 = 1.25c^2$

$\mathbf{y = \sqrt{1.25}c \approx 1.12c}$

$\mathbf{u} = x + y + c + \frac{c}{2} = \sqrt{5}\,c + \sqrt{1.25}\,c + c + \frac{c}{2} = (\sqrt{5} + \sqrt{1.25} + 1.5)c \approx \mathbf{4.85c}$

oder

$\mathbf{u} = x + y + c + \frac{c}{2} \approx 2.24c + 1.12c + 1.5c = \mathbf{4.86c}$

Fläche: $\mathbf{A} = A_{\text{halbes}\,\square FGM_2} - A_{\text{kleines}\,\triangle}$

$= 2c \cdot c : 2 - c \cdot \frac{c}{2} : 2$

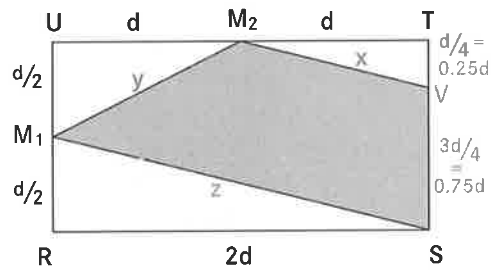
$= c^2 - \frac{c^2}{4}$

$= \frac{3}{4}c^2 = \mathbf{0.75c^2}$

Alternativer Lösungsweg mit Dezimalzahlen
Natürlich lässt sich diese Aufgabe mit Brüchen lösen.
Wir haben hier aber absichtlich einen alternativen Lösungsweg mit Dezimalzahlen gewählt, um zu zeigen, dass es auch so geht.
Für all jene, die im Rechnen mit Bruchtermen nicht allzu sattelfest sind, kann dies eine erlösende Alternative sein, die einfach handzuhaben ist.

Umfang:

x ist Hypotenuse im Eckdreieck mit den Katheten: d und 0.25d



x: $x^2 = d^2 + (0.25d)^2$

$x^2 = d^2 + 0.0625d^2$

$x^2 = 1.0625d^2$

$\mathbf{x = \sqrt{1.0625}d \approx 1.03d}$

y ist Hypotenuse im Eckdreieck mit den Katheten: d und 0.5d

y: $y^2 = d^2 + (0.5d)^2$

$y^2 = d^2 + 0.25d^2$

$y^2 = 1.25d^2$

$\mathbf{y = \sqrt{1.25}d \approx 1.12d}$

z ist Hypotenuse im Eckdreieck mit den Katheten: 2d und 0.5d

z: $z^2 = (2d)^2 + (0.5d)^2$

$z^2 = 4d^2 + 0.25d^2$

$z^2 = 4.25d^2$

$\mathbf{z = \sqrt{4.25}d \approx 2.06d}$

$\mathbf{u} = 0.75d + x + y + z = 0.75d + \sqrt{1.0625}\,d + \sqrt{1.25}\,d + \sqrt{4.25}\,d \approx \mathbf{4.96d}$

Fläche: $\mathbf{A} = A_{\square} - A_{\triangle VTM_2} - A_{\triangle M_1M_2U} - A_{\triangle RSM_1}$

$= 2d \cdot d - 0.25d \cdot d : 2 - 0.5d \cdot d : 2 - 0.5d \cdot 2d : 2$

$= 2d^2 - 0.125d^2 - 0.25d^2 - 0.5d^2 = \mathbf{1.125d^2}$

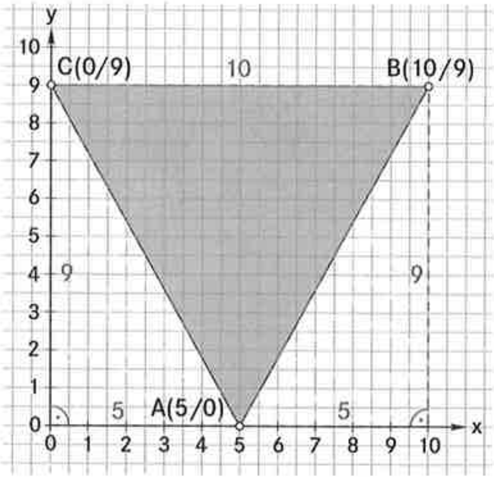
F141 Alle Grössen werden in **Koordinaten-Einheiten** gemessen. Wir lassen die Einheiten weg.

a **BC** = **10**

$AB^2 = 5^2 + 9^2 = 106$
AB = $\sqrt{106} \approx$ **10.30**

$AC^2 = 5^2 + 9^2 = 106$
AC = $\sqrt{106} \approx$ **10.30**

Das Dreieck ABC ist **nicht gleichseitig**, aber gleichschenklig.



Genauigkeit und Gleichheit von Wurzeln
Eine Diskussion über die Genauigkeit drängt sich an dieser Stelle auf.
Würde man die Dreiecke messen, so würde man die Dreiecke DEF und FDG als gleichschenklig taxieren.

Geht man von Idealmodellen aus, deren Eckpunkte die angegebenen Koordinaten haben, dann sind die Dreiecke weder gleichseitig noch gleichschenklig.

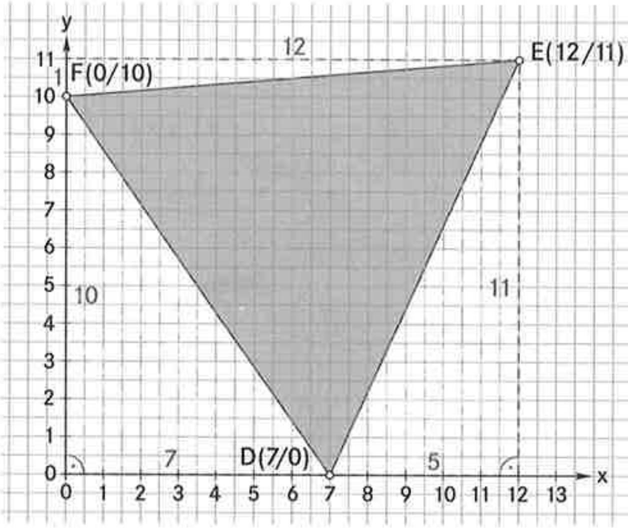
$DE^2 = 5^2 + 11^2 = 146$
DE = $\sqrt{146} \approx$ **12.08**

$EF^2 = 12^2 + 1^2 = 145$
EF = $\sqrt{145} \approx$ **12.04**

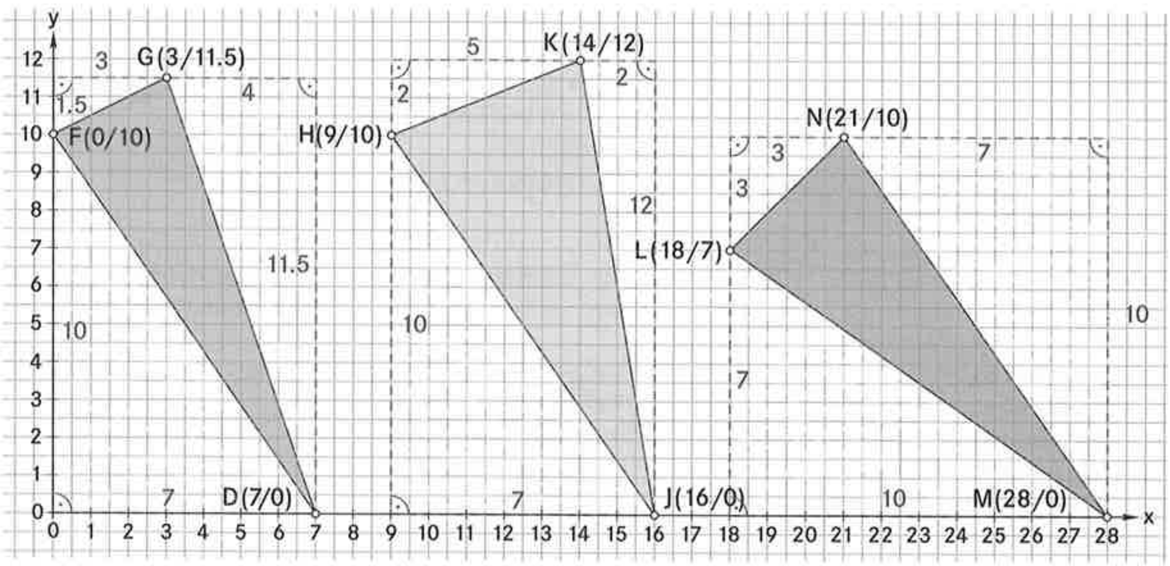
$DF^2 = 7^2 + 10^2 = 149$
DF = $\sqrt{149} \approx$ **12.21**

DE ≠ EF ≠ DF

Das Dreieck DEF ist **nicht gleichseitig**.



b



$FD^2 = 10^2 + 7^2 = 149$
FD = $\sqrt{149} \approx$ **12.21**

$DG^2 = 11.5^2 + 4^2 = 148.25$
DG = $\sqrt{148.25} \approx$ **12.17**

$HJ^2 = 10^2 + 7^2 = 149$
HJ = $\sqrt{149} \approx$ **12.21**

$JK^2 = 12^2 + 2^2 = 148$
JK = $\sqrt{148} \approx$ **12.17**

$LM^2 = 7^2 + 10^2 = 149$
LM = $\sqrt{149} \approx$ **12.21**

$NM^2 = 10^2 + 7^2 = 149$
NM = $\sqrt{149} \approx$ **12.21**

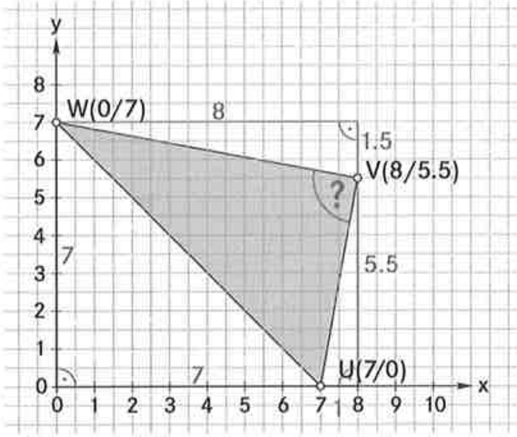
Nur das Dreieck **LMN** ist **gleichschenklig**. Die beiden Dreiecke **FDG** und **HJK** sind es **nicht**.

F142 Wenn das Dreieck UVW rechtwinklig ist, dann muss der Satz von Pythagoras $WU^2 = UV^2 + VW^2$ gelten.

Wir prüfen:
(Längenangaben in Koordinaten-Einheiten)

$\mathbf{WU^2} = 7^2 + 7^2 = \mathbf{98}$
$UV^2 = 1^2 + 5.5^2 = 31.25$
$VW^2 = 1.5^2 + 8^2 = 66.25$
$\mathbf{UV^2 + VW^2} = 31.25 + 66.25 = \mathbf{97.5 \neq WU^2}$

Der Satz von Pythagoras gilt nicht.
Das Dreieck kann nicht rechtwinklig sein.



F143 Alle Längenangaben in **Koordinaten-Einheiten**, alle Flächenangaben in **Flächen-Einheiten**.

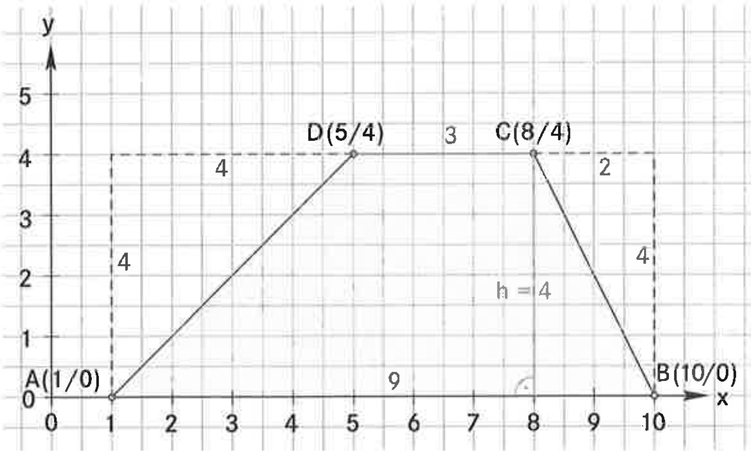
a Umfang:

$\mathbf{AB} = 10 - 1 = \mathbf{9}$

$BC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$
$\mathbf{BC} = \sqrt{\mathbf{20}}$
$= 4.472...$
→ speichern

$\mathbf{CD} = 8 - 5 = \mathbf{3}$

$AD^2 = 4^2 + 4^2 = 32$
$\mathbf{AD} = \sqrt{\mathbf{32}} = 5.656...$



$\mathbf{u} = AB + BC + CD + AD \approx \mathbf{22.13}$

Fläche: A_{Trapez} = Mittellinie · Höhe

$m = (AB + CD) : 2 = (9 + 3) : 2 = 6$
$h = 4$

$\mathbf{A_{ABCD}} = m \cdot h = 6 \cdot 4 = \mathbf{24}$

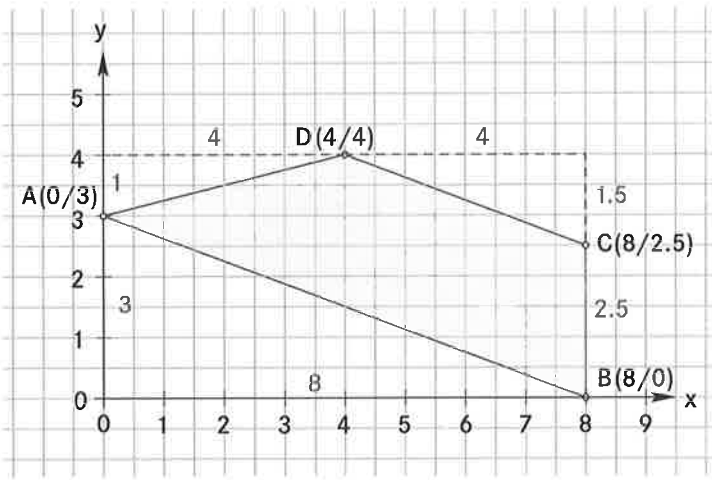
b Umfang:

$AB^2 = 3^2 + 8^2 = 73$
$\mathbf{AB} = \sqrt{\mathbf{73}}$
$= 8.544...$

$\mathbf{BC} = \mathbf{2.5}$

$CD^2 = 4^2 + 1.5^2 = 18.25$
$\mathbf{CD} = \sqrt{\mathbf{18.25}}$
$= 4.272...$

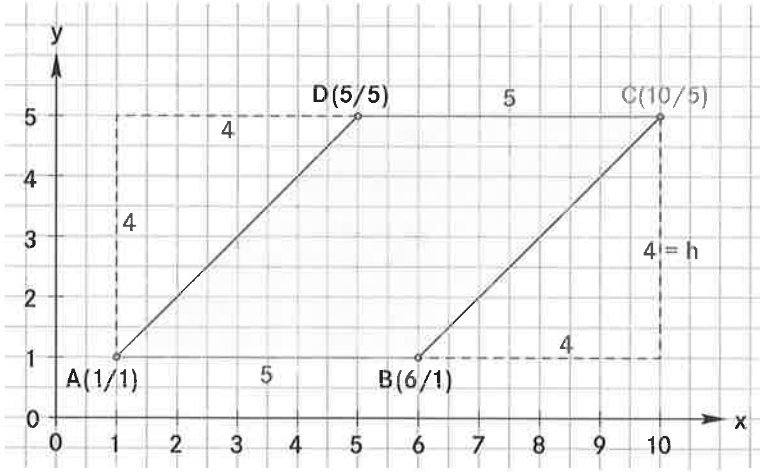
$AD^2 = 4^2 + 1^2 = 17$
$\mathbf{AD} = \sqrt{\mathbf{17}}$
$= 4.123...$



$\mathbf{u} = AB + BC + CD + AD \approx \mathbf{19.44}$

Fläche: ABCD = Rechteck – 3 Eckdreiecke
$\mathbf{A_{ABCD}} = 32 - 12 - 3 - 2 = \mathbf{15}$

F144 ■ C(10/5)



Umfang:

AB = 6 – 1 = **5**

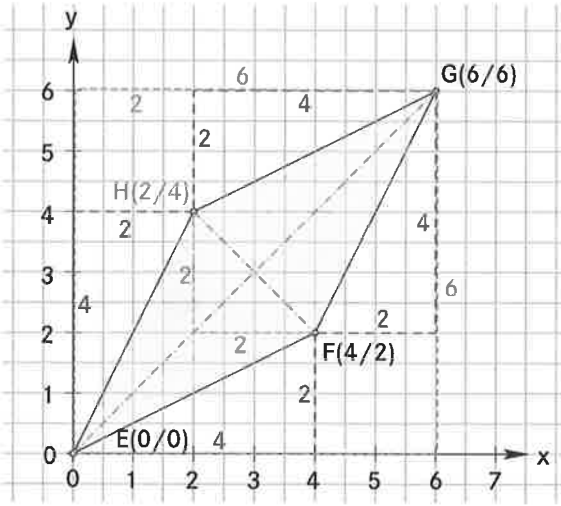
$BC^2 = 4^2 + 4^2 = 32$
BC = $\sqrt{\mathbf{32}}$
= 5.656...

CD = AB
AD = BC

u = 2·AB + 2·BC
≈ **21.31**

Fläche: $A_{Rhomboid}$ = Seite · Höhe
$\mathbf{A_{ABCD}}$ = AB · h = 5 · 4 = **20**

■ H(2/4)



Umfang:
Alle vier Seiten sind gleich lang:
EF = FG = GH = HE

$EF^2 = 4^2 + 2^2 = 20$
EF = $\sqrt{\mathbf{20}}$
= 4.472...

u = 4·EF ≈ **17.89**

Fläche: 1. Weg
EFGH = Quadrat – 2 kleine □ – 4△
$\mathbf{A_{EFGH}}$ = 36 – 2 · 4 – 4 · 4 = **12**

Fläche: 2. Weg
$A_{Rhombus}$ = e · f : 2
A_{EFGH} = EG · FH : 2

$EG^2 = 6^2 + 6^2 = 72$
EG = $\sqrt{\mathbf{72}}$ = 8.485...

$FH^2 = 2^2 + 2^2 = 8$
FH = $\sqrt{\mathbf{8}}$ = 2.828...

$\mathbf{A_{EFGH}}$ = $\sqrt{72}$ · $\sqrt{8}$: 2 = **12**

F145 ■ Die Abbildung ist auf der nächsten Seite oben.

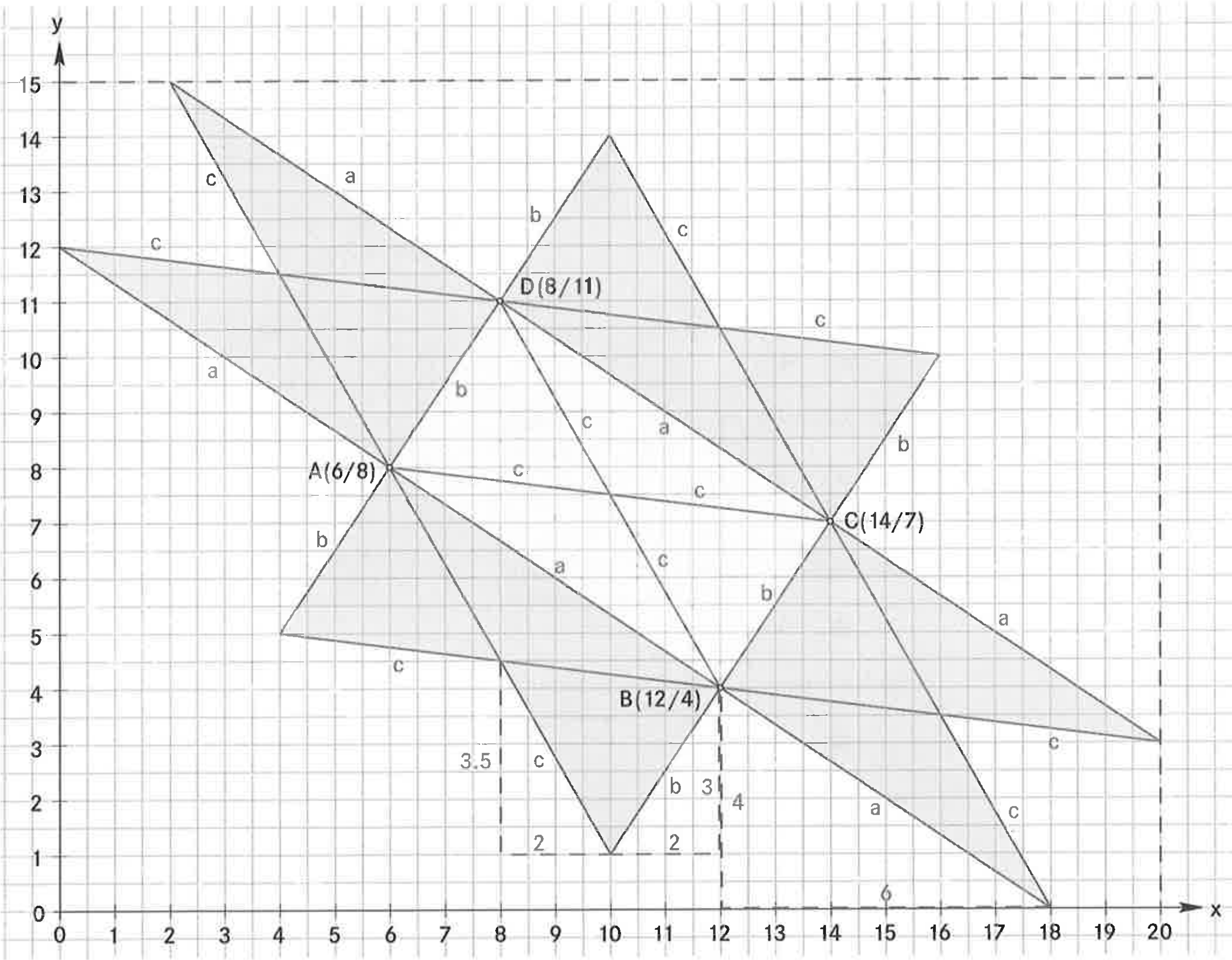
■ **Umfang:**
Die Seiten der Zacken sind gleich lang wie die **kurze** oder die **lange Rechtecksseite** oder die **halbe Diagonale** des Rechtecks.
Es genügt daher, diese drei Längen zu bestimmen.

Lange Rechtecksseite a: $a^2 = 6^2 + 4^2 = 52$
$a = \sqrt{52} = 7.211...$

Kurze Rechtecksseite b: $b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$
$b = \sqrt{13} = 3.605...$

Halbe Rechtecksdiagonale c: $c^2 = 2^2 + 3.5^2 = 16.25$
$c = \sqrt{16.25} = 4.031...$

Umfang u: **u** = 4a + 4b + 8c ≈ **75.52**



Fläche:
Der Stern ist durch die Konstruktionslinien in 16 Dreiecke unterteilt, deren Fläche je einem Viertel der Rechtecksfläche entspricht. Zusammen ergibt das 4 mal die Rechtecksfläche.

$\mathbf{A_{Stern}} = 4 \cdot A_{Rechteck} = 4 \cdot a \cdot b = 4 \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{13} = \mathbf{104}$

F146 **a** $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$
AB $= \mathbf{5}$

$CD^2 = 3^2 + 4^2 = 25$
CD $= \mathbf{5}$

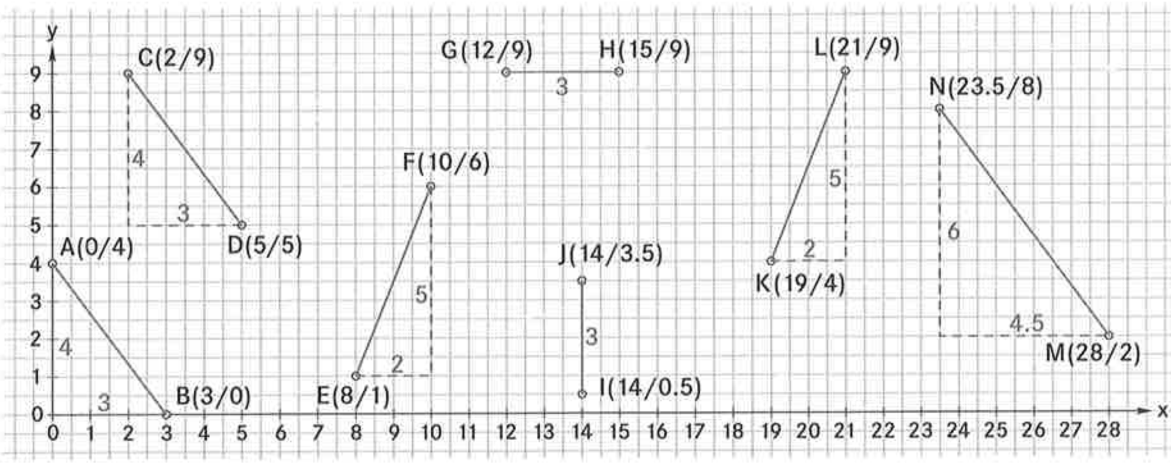
$EF^2 = 2^2 + 5^2 = 29$
EF $= \sqrt{29} \approx \mathbf{5.39}$

GH = 3

IJ = 3

$KL^2 = 2^2 + 5^2 = 29$
KL $= \sqrt{29} \approx \mathbf{5.39}$

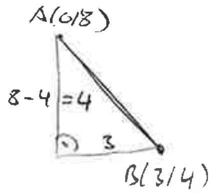
$MN^2 = 6^2 + 4.5^2 = 56.25$
KL $= \sqrt{56.25} = \mathbf{7.5}$

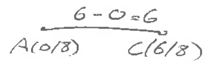


b Die senkrechte Kathete des Berechnungsdreiecks entspricht jeweils der Differenz der beiden y-Koordinaten, die waagrechte Kathete der Differenz der x-Koordinaten.

A(0/8), B(3/4), C(6/8), D(6/4), E(9/0)

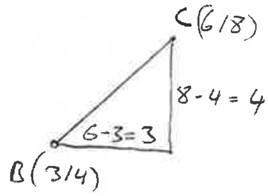
AB: Katheten: 3 - 0 = 3 x-Differenz
8 - 4 = 4 y-Differenz
$AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$
AB = 5

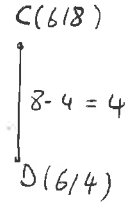




AC: Katheten: 6 - 0 = 6 x-Differenz
8 - 8 = 0 y-Differenz
AC = 6

BC: Katheten: 6 - 3 = 3 x-Differenz
8 - 4 = 4 y-Differenz
$BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$
BC = 5

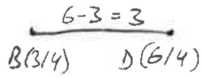


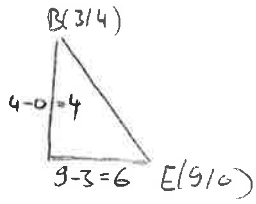


CD: Katheten: 6 - 6 = 0 x-Differenz
8 - 4 = 4 y-Differenz
CD = 4

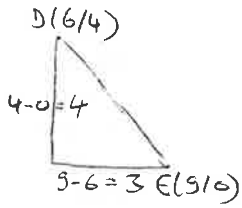
BD: Katheten: 6 - 3 = 3 x-Differenz
4 - 4 = 0 y-Differenz
BD = 3

BE: Katheten: 9 - 3 = 6 x-Differenz
4 - 0 = 4 y-Differenz
$BC^2 = 6^2 + 4^2 = 52$
BC = $\sqrt{52}$ ≈ **7.21**

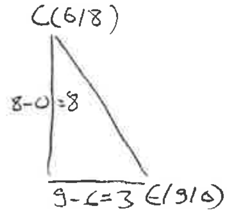




DE: Katheten: 9 - 6 = 3 x-Differenz
4 - 0 = 4 y-Differenz
$DE^2 = 3^2 + 4^2 = 25$
DE = 5



CE: Katheten: 9 - 6 = 3 x-Differenz
8 - 0 = 8 y-Differenz
$CE^2 = 3^2 + 8^2 = 73$
CE = $\sqrt{73}$ ≈ **8.54**



d $P(x_P/y_P)$ und $Q(x_Q/y_Q)$
PQ: Katheten: x-Differenz $x_Q - x_P$ oder $x_P - x_Q$
y-Differenz $y_Q - y_P$ oder $y_P - y_Q$

$PQ^2 = (\text{x-Differenz})^2 + (\text{y-Differenz})^2$ oder $PQ^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2$

PQ = $\sqrt{(\text{x-Differenz})^2 + (\text{y-Differenz})^2}$ **PQ** = $\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$

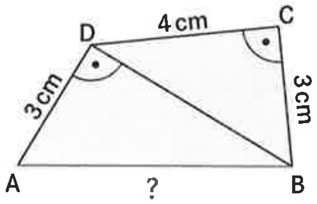
> Falls negative Zahlen schon bekannt sind: Das Quadrat einer negativen Zahl ist positiv. Es spielt daher keine Rolle, ob $x_Q - x_P$ oder $x_P - x_Q$ und $y_Q - y_P$ oder $y_P - y_Q$ verwendet wird.

F147 Die angegebenen Koordinaten ergeben eine Distanz von **40.5 km**.

Routenplaner berechnen für diese Strecke tatsächlich eine abweichende Distanz. Dies rührt daher, dass wir eine sehr grobe Annäherung mit relativ langen Streckenstücken verwenden.

F148 ■ $BD^2 = (3\,cm)^2 + (4\,cm)^2 = 25\,cm^2$
$BD = 5\,cm$

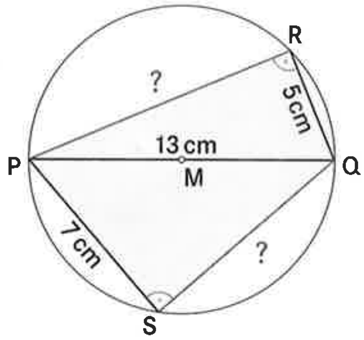
$AB^2 = (3\,cm)^2 + (5\,cm)^2 = 34\,cm^2$
$\mathbf{AB} = \sqrt{34}\,cm \approx \mathbf{5.83\,cm}$



■ Der Kreis ist ein Thaleskreis.
Die beiden Dreiecke PQR und PSQ sind rechtwinklig.

$PR^2 + (5\,cm)^2 = (13\,cm)^2$
$PR^2 = (13\,cm)^2 - (5\,cm)^2 = 144\,cm^2$
$\mathbf{PR} = \mathbf{12\,cm}$

$SQ^2 + (7\,cm)^2 = (13\,cm)^2$
$SQ^2 = (13\,cm)^2 - (7\,cm)^2 = 120\,cm^2$
$\mathbf{SQ} = \sqrt{120}\,cm \approx \mathbf{10.95\,cm}$

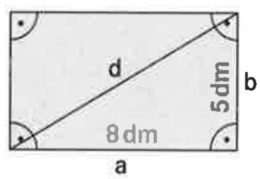


F149 ■ a = ? d = ? A = ? b = 5 dm u = 26 dm

$\mathbf{a} = \frac{u}{2} - b = 13\,dm - 5\,dm = \mathbf{8\,dm}$

$d^2 = a^2 + b^2 = (8\,dm)^2 + (5\,dm)^2 = 89\,dm^2$
$\mathbf{d} = \sqrt{89}\,dm \approx \mathbf{9.43\,dm}$

$\mathbf{A} = a \cdot b = 8\,dm \cdot 5\,dm = \mathbf{40\,dm^2}$

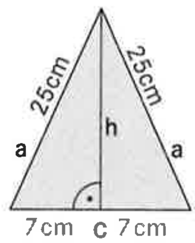


■ c = ? h = ? A = ? a = 25 cm u = 64 cm

$\mathbf{c} = u - 2a = 64\,cm - 50\,cm = \mathbf{14\,cm}$

h: $h^2 + (c/2)^2 = (25\,cm)^2$
$h^2 + (7\,cm)^2 = (25\,cm)^2$
$h^2 = (25\,cm)^2 - (7\,cm)^2 = 576\,cm^2$
$\mathbf{h} = \sqrt{576}\,cm = \mathbf{24\,cm}$

$\mathbf{A} = c \cdot h : 2 = 14\,cm \cdot 24\,cm : 2 = \mathbf{168\,cm^2}$

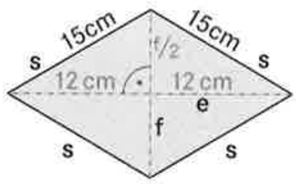


■ f = ? u = ? A = ? s = 15 cm e = 24 cm

$\mathbf{u} = 4s = \mathbf{60\,cm}$

f: $(f/2)^2 + (12\,cm)^2 = (15\,cm)^2$
$(f/2)^2 = (15\,cm)^2 - (12\,cm)^2 = 81\,cm^2$
$f/2 = 9\,cm$
$\mathbf{f} = \mathbf{18\,cm}$

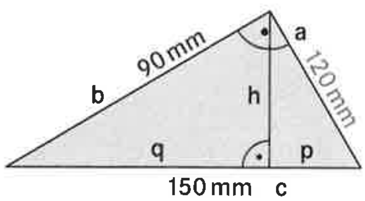
$\mathbf{A} = e \cdot f : 2 = 24\,cm \cdot 18\,cm : 2 = \mathbf{216\,cm^2}$



■ a = ? p = ? q = ? h = ? A = ? b = 90 mm c = 150 mm

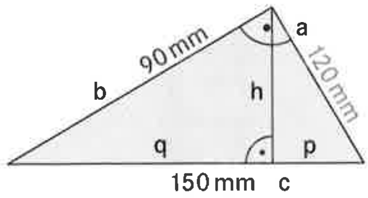
a: $a^2 + b^2 = c^2$
$a^2 = c^2 - b^2$
$a^2 = (150\,mm)^2 - (90\,mm)^2 = 14\,400\,mm^2$
$\mathbf{a} = \sqrt{14\,400}\,mm = \mathbf{120\,mm}$

$\mathbf{A} = a \cdot b : 2 = 120\,mm \cdot 90\,mm : 2 = \mathbf{5\,400\,mm^2}$



→

h: $A = c \cdot h : 2$
$h = 2 \cdot A : c$
$= 10\,800\,\text{mm}^2 : 150\,\text{mm} = \mathbf{72\,mm}$



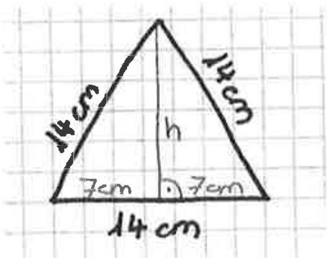
q: $q^2 + h^2 = b^2$
$q^2 = b^2 - h^2$
$q^2 = (90\,\text{mm})^2 - (72\,\text{mm})^2 = 2\,916\,\text{mm}^2$
$\mathbf{q} = \sqrt{2\,916}\,\text{mm} = \mathbf{54\,mm}$

p: $\mathbf{p} = c - q = 150\,\text{mm} - 54\,\text{mm} = \mathbf{96\,mm}$

Variante:
zuerst $p^2 = a^2 - h^2$
dann $q = c - p$

F150 ■ Der Umfang des Dreiecks ist $u = 42\,\text{cm}$,
daraus folgt sofort: $s = 42\,\text{cm} : 3 = 14\,\text{cm}$

$h^2 + (7\,\text{cm})^2 = (14\,\text{cm})^2$
$h^2 = (14\,\text{cm})^2 - (7\,\text{cm})^2 = 147\,\text{cm}^2$
$\mathbf{h} = \sqrt{147}\,\text{cm} = 12.124... \approx \mathbf{12.12\,cm}$

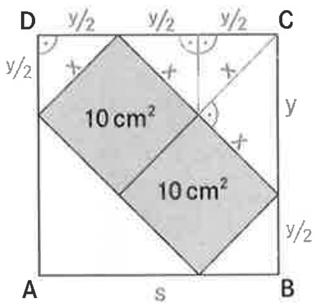


■ $\mathbf{A} = s \cdot h : 2 = 14\,\text{cm} \cdot \sqrt{147}\,\text{cm} : 2 \approx \mathbf{84.87\,cm^2}$

F151 **Einfachster Lösungsweg:**
$x^2 = 10\,\text{cm}^2$
$x = \sqrt{10}\,\text{cm}$

$y^2 = x^2 + x^2 = 20\,\text{cm}^2$
$y = \sqrt{20}\,\text{cm} = 4.472...$

$\mathbf{s} = 1.5y \approx \mathbf{6.71\,cm}$

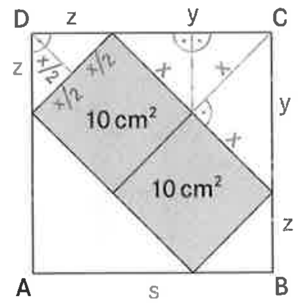


Es geht aber auch anders, beispielsweise so:
(die Figur ist symmetrisch)
$x^2 = 10\,\text{cm}^2$
$x = \sqrt{10}\,\text{cm} = 3.162...$

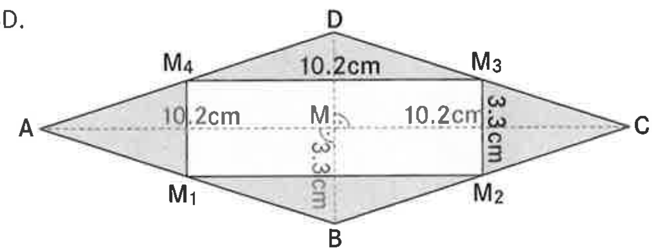
$y^2 = x^2 + x^2 = 20\,\text{cm}^2$
$y = \sqrt{20}\,\text{cm} = 4.472...$

$z^2 = (\frac{x}{2})^2 + (\frac{x}{2})^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 2.5\,\text{cm}^2 + 2.5\,\text{cm}^2 = 5\,\text{cm}^2$
$z = \sqrt{5}\,\text{cm} = 2.236...$

$\mathbf{s} = y + z \approx \mathbf{6.71\,cm}$



F152 M_3M_4 ist Mittellinie im Dreieck ACD.
$AC = 2 \cdot M_3M_4 = 20.4\,\text{cm}$
$AM = MC = 10.2\,\text{cm}$



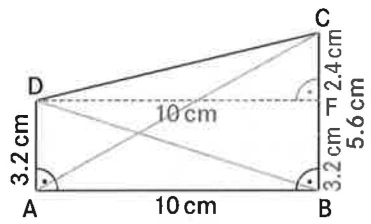
M_2M_3 ist Mittellinie im Dreieck BCD.
$BD = 2 \cdot M_2M_3 = 6.6\,\text{cm}$
$BM = MD = 3.3\,\text{cm}$

Rhombusseite, beispielsweise AB im $\triangle ABM$:
$AB^2 = (3.3\,\text{cm})^2 + (10.2\,\text{cm})^2 = 114.93\,\text{cm}^2$
$\mathbf{AB} = \sqrt{114.93}\,\text{cm} \approx \mathbf{10.72\,cm}$

F153 DC im △DFC:

$DC^2 = (10\,cm)^2 + (2.4\,cm)^2 = 105.76\,cm^2$

$DC = \sqrt{105.76}\,cm = 10.283... \approx 10.28\,cm$



$u = 10\,cm + 5.6\,cm + DC + 3.2\,cm \approx$ **29.08 cm**

$A_{ABCD} = A_{ABFD} + A_{DFC}$

$= 10\,cm \cdot 3.2\,cm + 2.4\,cm \cdot 10\,cm : 2 =$ **44 cm²**

Oder:

A_{Trapez} = Mittellinie · Höhe

Mittellinie = 4.4 cm

Höhe = 10 cm

$A_{ABCD} = 4.4\,cm \cdot 10\,cm =$ **44 cm²**

Diagonale AC im △ABC:

$AC^2 = (10\,cm)^2 + (5.6\,cm)^2 = 131.36\,cm^2$

AC $= \sqrt{131.36}\,cm \approx$ **11.46 cm**

Diagonale BD im △ABD:

$BD^2 = (3.2\,cm)^2 + (10\,cm)^2 = 110.24\,cm^2$

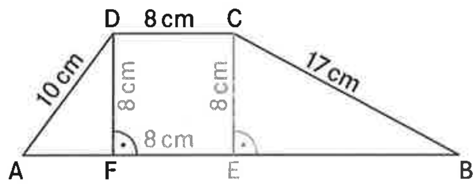
BD $= \sqrt{110.24}\,cm \approx$ **10.50 cm**

F154 AF im △AFD:

$AF^2 + (8\,cm)^2 = (10\,cm)^2$

$AF^2 = (10\,cm)^2 - (8\,cm)^2 = 36\,cm^2$

$AF = 6\,cm$



EB im △EBC:

$EB^2 + (8\,cm)^2 = (17\,cm)^2$

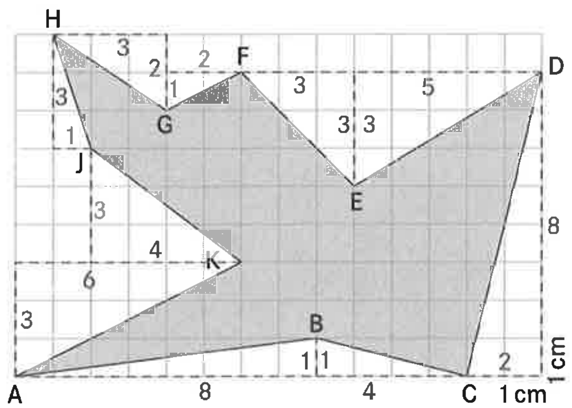
$EB^2 = (17\,cm)^2 - (8\,cm)^2 = 225\,cm^2$

$EB = 15\,cm$

u = AF + FE + EB + BC + CD + DA = 6 cm + 8 cm + 15 cm + 17 cm + 8 cm + 10 cm = **64 cm**

F155 $AB^2 = (8\,cm)^2 + (1\,cm)^2 = 65\,cm^2$

$AB = \sqrt{65}\,cm = 8.062...\,cm$



$BC^2 = (1\,cm)^2 + (4\,cm)^2 = 17\,cm^2$

$BC = \sqrt{17}\,cm = 4.123...\,cm$

$CD^2 = (2\,cm)^2 + (8\,cm)^2 = 68\,cm^2$

$CD = \sqrt{68}\,cm = 8.246...\,cm$

$DE^2 = (5\,cm)^2 + (3\,cm)^2 = 34\,cm^2$

$DE = \sqrt{34}\,cm = 5.830...\,cm$

$EF^2 = (3\,cm)^2 + (3\,cm)^2 = 18\,cm^2$

$EF = \sqrt{18}\,cm = 4.242...\,cm$

$FG^2 = (2\,cm)^2 + (1\,cm)^2 = 5\,cm^2$

$FG = \sqrt{5}\,cm = 2.236...\,cm$

$GH^2 = (3\,cm)^2 + (2\,cm)^2 = 13\,cm^2$

$GH = \sqrt{13}\,cm = 3.605...\,cm$

$HJ^2 = (1\,cm)^2 + (3\,cm)^2 = 10\,cm^2$

$HJ = \sqrt{10}\,cm = 3.162...\,cm$

$JK^2 = (4\,cm)^2 + (3\,cm)^2 = 25\,cm^2$

$JK = 5\,cm$

$KA^2 = (6\,cm)^2 + (3\,cm)^2 = 45\,cm^2$

$KA = \sqrt{45}\,cm = 6.708...\,cm$

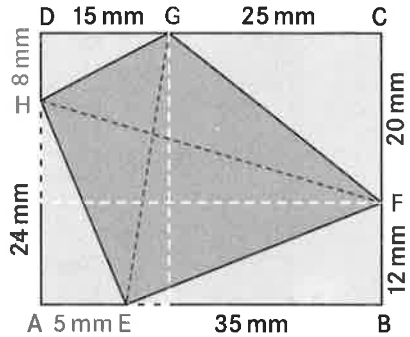
u = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HJ + JK + KA ≈ **51.22 cm**

F156 $EF^2 = (35\,mm)^2 + (12\,mm)^2 = 1369\,mm^2$
$EF = 37\,mm$

$FG^2 = (20\,mm)^2 + (25\,mm)^2 = 1025\,mm^2$
$FG = \sqrt{1025}\,mm = 32.015...\,mm$

$GH^2 = (15\,mm)^2 + (8\,mm)^2 = 289\,mm^2$
$GH = 17\,mm$

$HE^2 = (24\,mm)^2 + (5\,mm)^2 = 601\,mm^2$
$HE = \sqrt{601}\,mm = 24.515...\,mm$



$\mathbf{u} = EF + FG + GH + HE \approx \mathbf{110.53\,mm}$

$A_{EFGH} = A_{Rechteck} - A_{\triangle EBF} - A_{\triangle FCG} - A_{\triangle GDH} - A_{\triangle HAE}$
$\mathbf{A_{EFGH}} = 40\,mm \cdot 32\,mm - (35\,mm \cdot 12\,mm : 2 + 20\,mm \cdot 25\,mm : 2 + 15\,mm \cdot 8\,mm : 2 + 24\,mm \cdot 5\,mm : 2)$
$= \mathbf{700\,mm^2}$

$EG^2 = (10\,mm)^2 + (32\,mm)^2 = 1124\,mm^2$
$\mathbf{EG} = \sqrt{1124}\,mm \approx \mathbf{33.53\,mm}$

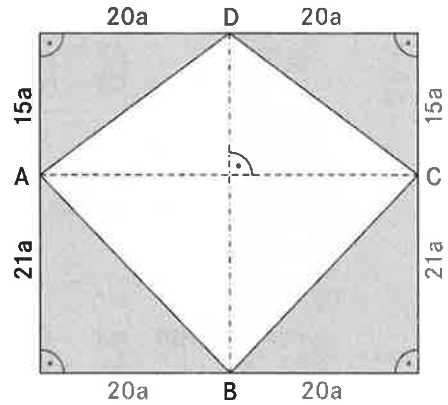
$FH^2 = (12\,mm)^2 + (40\,mm)^2 = 1744\,mm^2$
$\mathbf{FH} = \sqrt{1744}\,mm \approx \mathbf{41.76\,mm}$

F157 ■ $AB = BC$
$AB^2 = (21\,a)^2 + (20\,a)^2 = 841\,a^2$
$AB = 29\,a$

$CD = DA$
$CD^2 = (20\,a)^2 + (15\,a)^2 = 625\,a^2$
$CD = 25\,a$

$\mathbf{u} = 2 \cdot AB + 2 \cdot CD = \mathbf{108\,a}$

$A_{Drachenviereck} = e \cdot f : 2$
$\mathbf{A_{ABCD}} = AC \cdot BD : 2 = 40\,a \cdot 36\,a : 2 = \mathbf{720\,a^2}$

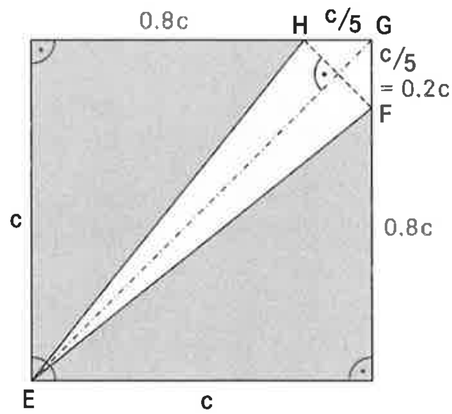


■ $EF = HE$
$EF^2 = c^2 + (0.8\,c)^2 = 1.64\,c^2$
$EF = \sqrt{1.64}\,c = 1.280...\,c$

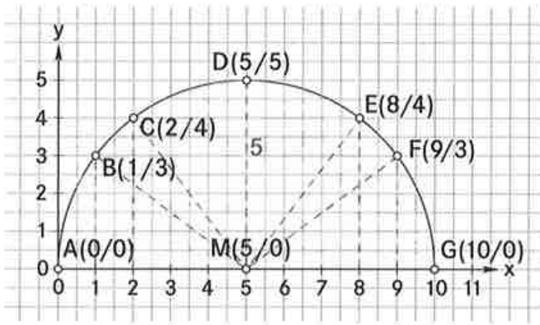
$FG = GH = 0.2\,c$

$\mathbf{u} = 2 \cdot EF + 2 \cdot FG \approx \mathbf{2.96\,c}$

$\mathbf{A_{EFGH}} = A_{\square} - 2 \cdot A_{\triangle}$
$= c^2 - 2 \cdot c \cdot 0.8\,c : 2 = c^2 - 0.8\,c^2 = \mathbf{0.2\,c^2}$



F158 Die Punkte A bis G liegen dann auf einem Halbkreis um M (5/0), wenn sie alle den gleichen Abstand von M haben.



$AM = 5$

$BM^2 = 4^2 + 3^2 = 25$
$BM = 5$

$CM^2 = 3^2 + 4^2 = 25$
$CM = 5$

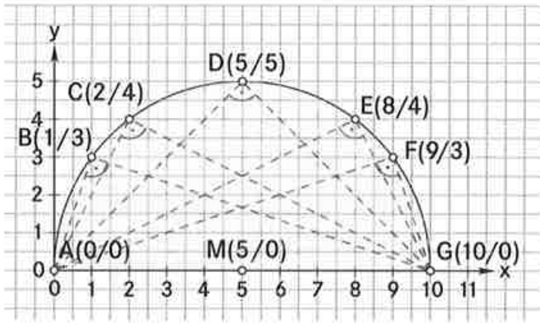
$DM = 5$

$EM^2 = 3^2 + 4^2 = 25$
$EM = 5$

$FM^2 = 4^2 + 3^2 = 25$
$FM = 5$

$GM = 5$

$AM = BM = CM = DM = EM = FM = GM = 5$



Dreieck AGB:
$\mathbf{A_{AGB}} = 10 \cdot 3 : 2 = 15$
$\mathbf{u_{AGB}} = AG + GB + BA$
$= 10 + \sqrt{90} + \sqrt{10} \approx \mathbf{22.65}$

Dreieck AGC:
$\mathbf{A_{AGC}} = 10 \cdot 4 : 2 = 20$
$\mathbf{u_{AGC}} = AG + GC + CA$
$= 10 + \sqrt{80} + \sqrt{20} \approx \mathbf{23.42}$

Dreieck AGD:
$\mathbf{A_{AGD}} = 10 \cdot 5 : 2 = 25$
$\mathbf{u_{AGD}} = AG + GD + DA = 10 + \sqrt{50} + \sqrt{50} \approx \mathbf{24.14}$

Dreieck AGE:
$\mathbf{A_{AGE}} = 10 \cdot 4 : 2 = 20$
$\mathbf{u_{AGE}} = AG + GE + EA = 10 + \sqrt{20} + \sqrt{80} \approx \mathbf{23.42}$

Dreieck AGF:
$\mathbf{A_{AGF}} = 10 \cdot 3 : 2 = 15$
$\mathbf{u_{AGF}} = AG + GF + FA = 10 + \sqrt{10} + \sqrt{90} \approx \mathbf{22.65}$

F2 Pythagoras in der Ebene

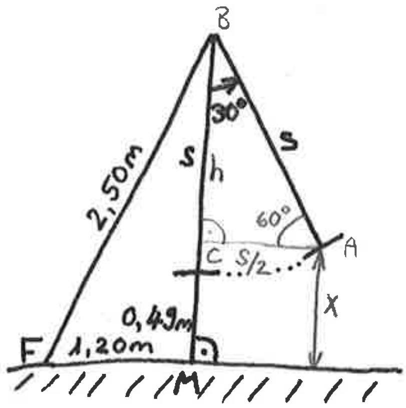
Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

F21 Für alle Berechnungen benötigt man die Länge s vom Schaukel-Drehpunkt bis zum Sitzbrett:

MB = s + 0.49 m ist Kathete im Dreieck FMB
2. Kathete: FM = 1.20 m
Hypotenuse: FB = 2.50 m

$MB^2 + FM^2 = FB^2$
$MB^2 = FB^2 - FM^2$
$MB^2 = (2.50\,m)^2 - (1.20\,m)^2 = 4.81\,m^2$
$\mathbf{MB} = \sqrt{4.81}\,m \approx \mathbf{2.19\,m}$

Damit ist $\mathbf{s} \approx 2.19\,m - 0.49\,m = \mathbf{1.70\,m}$



Genauigkeit
Bei dieser Aufgabe rechnen wir bewusst mit den gerundeten Werten weiter.
Eine genauere Rechnung macht hier keinen Sinn.

a Die Schaukel ist um 30° ausgelenkt.
Gesucht ist **x**, die Höhe des Brettmittelpunktes ab Boden.
x lässt sich nicht direkt berechnen. Berechnen lässt sich h, wobei x + h = MB.

h ist Kathete im Dreieck ABC. ABC ist ein **halbes gleichseitiges Dreieck** mit der Seite s.
Es gilt somit:

$h^2 + (s/2)^2 = s^2$
$h^2 = s^2 - (s/2)^2 = 2.1756\,m^2$
$\mathbf{h} = \sqrt{2.1756}\,m \approx \mathbf{1.47\,m}$

und damit: $\mathbf{x} = MB - h \approx 2.19\,m - 1.47\,m = \mathbf{0.72\,m}$

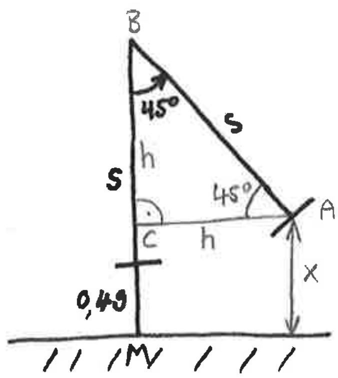
Der Mittelpunkt des Sitzbrettes ist bei einer 30°-Auslenkung **72 cm** über dem Boden.

b Die Schaukel ist um 45° ausgelenkt.
Gesucht ist wiederum x, die Berechnung erfolgt analog wie oben.

Das Dreieck ABC ist jetzt rechtwinklig-gleichschenklig.
Es gilt somit:

$h^2 + h^2 = s^2$
$2h^2 = s^2$
$h^2 = s^2 : 2 = 1.445\,m^2$
$h = \sqrt{1.445}\,m \approx 1.20\,m$

und damit: $\mathbf{x} = MB - h$
$\approx 2.19\,m - 1.20\,m = \mathbf{0.99\,m}$



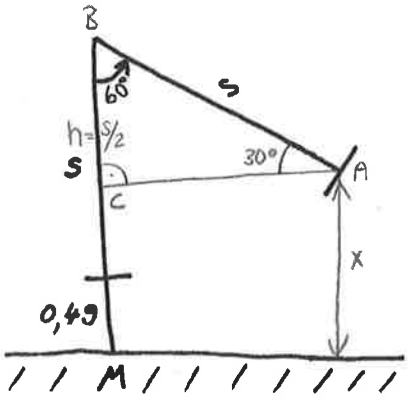
Bei einer 45°-Auslenkung ist der Brettmittelpunkt ungefähr **99 cm** über dem Boden.

d Die Schaukel ist um 60° ausgelenkt.
Gesucht ist x.

Das Dreieck ABC ist bei einer 60°-Auslenkung wiederum ein halbes gleichseitiges Dreieck. Diesmal in anderer Lage.
h ist gerade die halbe Seitenlänge s:
h = $(s/2) \approx 0.85\,\text{m}$

x = MB − h ≈ 2.19 m − 0.85 m = **1.34 m**

Bei einer 60°-Auslenkung ist der Brettmittelpunkt ungefähr **1.34 m** über dem Boden.



$c = \sqrt{a^2+b^2}$

$b = \sqrt{c^2-a^2}$

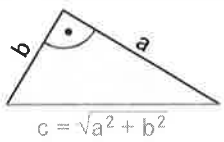
$a = \sqrt{c^2-b^2}$

F22 **Kurzformeln für pythagoräische Längen**

Löst man die Pythagoras-Formel $a^2 + b^2 = c^2$ nach einer der Variablen auf, so erhält man Wurzelformeln, welche direkt die Länge der einen Seite ausdrücken.

a Länge der Hypotenuse:
(längste Seite!)

$\mathbf{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$

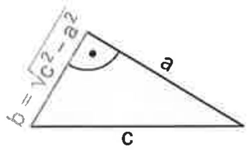


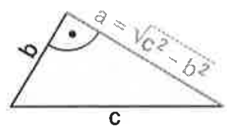
Merke dir!
Hypotenuse: Formel mit +
Kathete: Formel mit −

b Längen der Katheten:

$\mathbf{a = \sqrt{c^2 - b^2}}$

$\mathbf{b = \sqrt{c^2 - a^2}}$





c Bei der **Formel für die Hypotenuse** muss man **unter der Wurzel addieren** (Summe von 2 Quadraten), da die längste Seite gesucht ist.
Bei den **Formeln für die Katheten** muss man **unter der Wurzel subtrahieren** (Differenz von 2 Quadraten).

F23 **a** $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

$\sqrt{5+11} = \sqrt{16} = 4$
$\sqrt{5} + \sqrt{11} = 5.552692...$

$\sqrt{9-4} = \sqrt{5} = 2.236067...$
$\sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$

$\sqrt{8-5} = \sqrt{3} = 1.732050...$
$\sqrt{8} - \sqrt{5} = 0.592359...$

b **Wurzeln aus Summen ≠ Summen von Wurzeln**

Wurzeln aus Summen dürfen **nicht** einzeln gezogen werden: $\mathbf{\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}}$

c Die Summe bzw. die Differenz unter der Wurzel muss berechnet werden. Erst dann kann die Wurzel gezogen werden:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$$

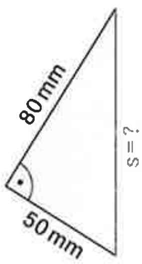
$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \neq c - a$$

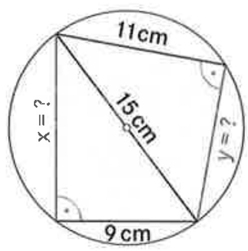
$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \neq c - b$$

F24 **a** s ist Hypotenuse:
$\mathbf{s} = \sqrt{(80\,\text{mm})^2 + (50\,\text{mm})^2}$
$= \sqrt{8900}\,\text{mm} \approx \mathbf{94.34\,mm}$

Kurzscheibweise:
Wir vereinfachen die Schreibweise und setzen die Einheit von Anfang an hinter die Wurzel:

$\mathbf{s} = \sqrt{80^2+50^2}\,\text{mm} \approx \mathbf{94.34\,mm}$



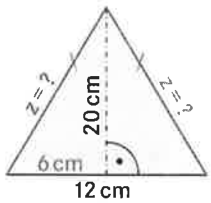


b Der Kreis ist ein Thaleskreis. Die beiden Dreiecke sind rechtwinklig.

x ist Kathete:
$\mathbf{x} = \sqrt{(15\,\text{cm})^2 - (9\,\text{cm})^2} = \sqrt{144}\,\text{cm} = \mathbf{12\,cm}$ kurz: $\mathbf{x} = \sqrt{15^2-9^2}\,\text{cm} = \mathbf{12\,cm}$

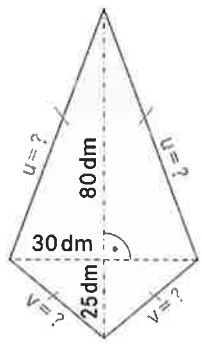
y ist Kathete:
$\mathbf{y} = \sqrt{(15\,\text{cm})^2 - (11\,\text{cm})^2} = \sqrt{104}\,\text{cm} \approx \mathbf{10.20\,cm}$ kurz: $\mathbf{y} = \sqrt{15^2-11^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{10.20\,cm}$

c z ist Hypotenuse:
$\mathbf{z} = \sqrt{20^2+6^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{20.88\,cm}$



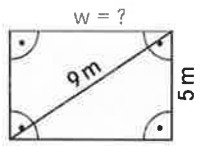
d u ist Hypotenuse:
$\mathbf{u} = \sqrt{80^2+30^2}\,\text{dm} \approx \mathbf{85.44\,dm}$

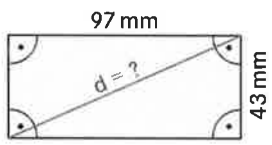
v ist Hypotenuse:
$\mathbf{v} = \sqrt{25^2+30^2}\,\text{dm} \approx \mathbf{39.05\,dm}$



e w ist Kathete:
$\mathbf{w} = \sqrt{9^2-5^2}\,\text{m} \approx \mathbf{7.48\,m}$

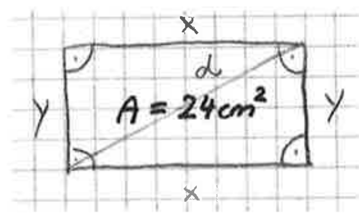
f d ist Hypotenuse:
$\mathbf{d} = \sqrt{97^2+43^2}\,\text{mm} \approx \mathbf{106.10\,mm}$





F25 Für die Seiten x und y ist die Rechtecksfläche
$A = x \cdot y = 24\ \text{cm}^2$

Folgende ganzzahlige Werte in cm sind für x und y möglich:



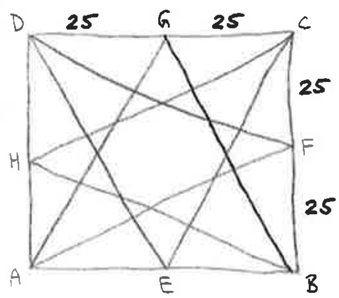
x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1
$d = \sqrt{x^2+y^2} \approx$	24.02	12.17	8.54	7.21	7.21	8.54	12.17	24.02
$u = 2x + 2y =$	50	28	22	20	20	22	28	50

F26 Alle 8 schräg verlaufenden Strecken sind gleich lang. Es genügt, eine zu berechnen.

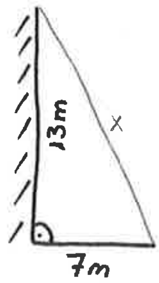
BG ist Hypotenuse im Dreieck BCG:
$\text{BG} = \sqrt{50^2+25^2}\,\text{cm} = 55.901\ldots\text{cm} \rightarrow$ speichern

Gesamtlänge $\mathbf{s} = 8 \cdot \text{BG} \approx \mathbf{447.21\,cm}$

Die Lichterkette muss für einen Stern 447.21 cm lang sein.



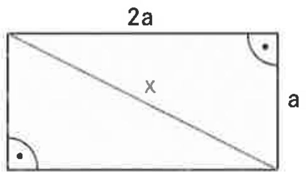
F27 Die Auszugslänge x ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck das aus «Fensterhöhe» und «Hausabstand» gebildet wird.



$\mathbf{x} = \sqrt{7^2 + 13^2}\,\text{m} \approx \mathbf{14.76\,m}$

Die Plattform sollte bis zu einer Länge von ungefähr 14.76 m ausfahrbar sein.

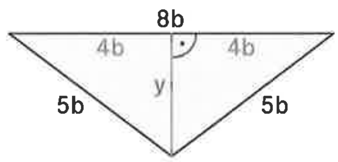
F28 **a** $\mathbf{x} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{5a^2} = \mathbf{\sqrt{5}\,a}$



Kontrolle für a = 3 cm: 2a = 6 cm

$x = \sqrt{3^2 + 6^2}\,\text{cm} = 6.7082039\ldots\,\text{cm}$
$x = \sqrt{5} \cdot 3\,\text{cm} = 6.7082039\ldots\,\text{cm}$ ✓

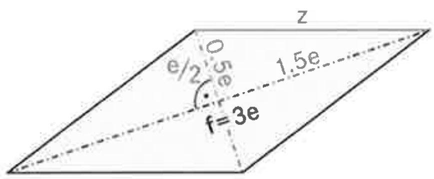
b $y = \sqrt{(5b)^2 - (4b)^2} = \sqrt{25b^2 - 16b^2} = \sqrt{9b^2} = 3b$



Kontrolle für b = 5 cm: 4b = 20 cm, 5b = 25 cm

$y = \sqrt{25^2 - 20^2}\,\text{cm} = 15\,\text{cm}$
$y = 3 \cdot 5\,\text{cm} = 15\,\text{cm}$ ✓

c $z = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{3e}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{e^2}{4} + \frac{9e^2}{4}} = \sqrt{\frac{10e^2}{4}} = \sqrt{10} \cdot \frac{e}{2}$



oder dezimal:

$z = \sqrt{(0.5e)^2 + (1.5e)^2} = \sqrt{0.25e^2 + 2.25e^2} = \sqrt{2.5}\,e$

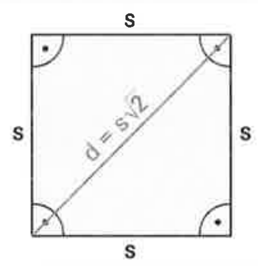
Kontrolle für e = 10 mm: $\frac{e}{2} = 5\,\text{mm}$, $\frac{3e}{2} = 15\,\text{mm}$

$z = \sqrt{5^2 + 15^2}\,\text{mm} = 15.8113883\ldots\,\text{mm}$
$z = \sqrt{10} \cdot 5\,\text{mm} = 15.8113883\ldots\,\text{mm}$ ✓
$z = \sqrt{2.5} \cdot 10\,\text{mm} = = 15.8113883\ldots\,\text{mm}$ ✓

d in □

F29 **a** **Wurzelformel für die Quadratdiagonale**

Die Diagonale eines Quadrates ist die Hypotenuse eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks mit der halben Quadratfläche:

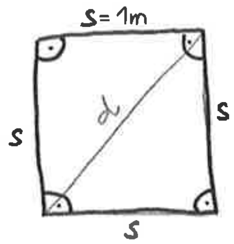


$d = \sqrt{s^2 + s^2}$
$d = \sqrt{2s^2}$

kurz: $\mathbf{d = s\sqrt{2}}$

b Individuelle Lösungen

F210 a) $s = 1\,dm$ $\quad d = ? \quad u = ? \quad A = ?$

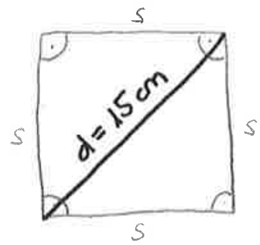


$\mathbf{d} = s\sqrt{2} = 1\,dm \cdot \sqrt{2} \approx \mathbf{1.41\,dm}$

$\mathbf{u} = 4s = 4 \cdot 1\,dm = \mathbf{4\,dm}$

$\mathbf{A} = s \cdot s = s^2 = (1\,dm)^2 = \mathbf{1\,dm^2}$

b) $d = 15\,cm$ $\quad s = ? \quad u = ? \quad A = ?$

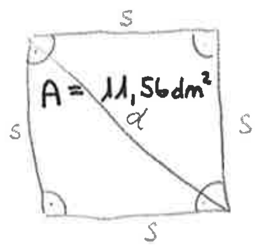


$s\sqrt{2} = d \qquad | : \sqrt{2}$
$s = d : \sqrt{2}$
$\mathbf{s} = 15\,cm : \sqrt{2} = 10.606...\,cm \approx \mathbf{10.61\,cm}$

$\mathbf{u} = 4 \cdot s \approx \mathbf{42.43\,cm}$

$\mathbf{A} = s \cdot s = s^2 = \mathbf{112.5\,cm^2}$

c) $A = 11.56\,dm^2$ $\quad s = ? \quad d = ? \quad u = ?$

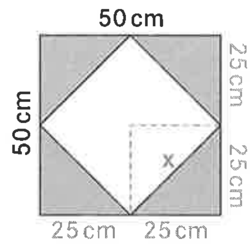


$s^2 = A$
$\mathbf{s} = \sqrt{A} = \sqrt{11.56}\,dm = \mathbf{3.4\,dm}$

$\mathbf{d} = s\sqrt{2} \approx \mathbf{4.81\,dm}$

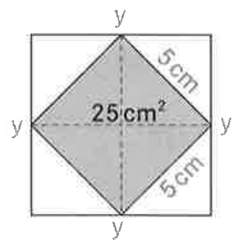
$\mathbf{u} = 4s = 4 \cdot 3.4\,dm = \mathbf{13.6\,dm}$

F211 a) x ist Hypotenuse im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck mit 25 cm langen Katheten.
Ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck ist ein halbes Quadrat: x ist Diagonale im Quadrat mit der Seitenlänge 25cm.



$\mathbf{x} = 25\,cm \cdot \sqrt{2} \approx \mathbf{35.36\,cm}$

b) **Lösungsweg 1:**
Das kleine Quadrat hat 5 cm lange Seiten s.
Die Länge der Seite y des umgebenden Quadrates entspricht der Länge der Diagonale des kleinen Quadrates.



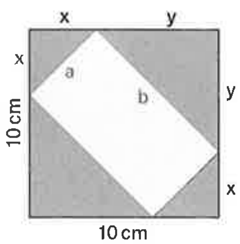
$\mathbf{y} = s\sqrt{2} = 5\,cm \cdot \sqrt{2} \approx \mathbf{7.07\,cm}$

Lösungsweg 2:
Das umgebende Quadrat hat eine Fläche von $50\,cm^2$.

Somit ist $\quad y = \sqrt{50}\,cm \approx \mathbf{7.07\,cm}$

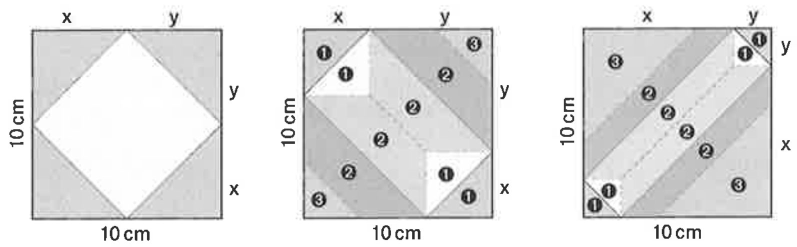
F212 a) Die Fläche wird dann am grössten, wenn das Rechteck ein **Quadrat** ist: $\mathbf{x = y = 5\,cm}$.
Dieses beansprucht dann genau die halbe Fläche des umgebenden Quadrates.

Ein mögliches algebraisches Vorgehen
Situation für verschiedene x und y untersuchen.
Es gilt $\quad a = x\sqrt{2} \quad b = y\sqrt{2}$
und daraus $\quad A_{Rechteck} = a \cdot b = x\sqrt{2} \cdot y\sqrt{2} = 2xy$



x	1	2	3	3.5	4	4.5	**5**
y	9	8	7	6.5	6	5.5	**5**
A = 2xy	18	32	42	45.5	48	49.5	**50**

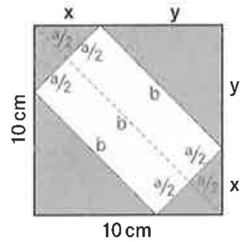
Eine mögliche geometrisch-anschauliche Begründung



Mit Parallelen zu den Seiten und einer Diagonale des Quadrates lässt sich das Rechteck in zwei Dreiecke ❶ und zwei Trapeze ❷ zerlegen.
Spiegelt man diese Fächen ❶ & ❷ an den Rechteckseiten, so bleiben zwei Dreiecke ❸ übrig. Diese Dreiecke ❸ verschwinden nur dann, wenn x = y ist.

d Der Umfang u ist bei allen Rechtecken gleich gross, nämlich doppelt so lang wie die Diagonale:

$u/2 \quad = a/2 + b + a/2 = d$
$u \quad = 2 \cdot d = 2 \cdot 10\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} \approx$ **28.28 cm**

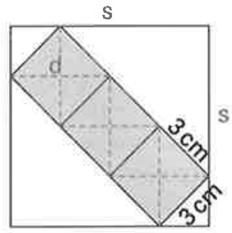


F213 Die **kleinen Quadrate** haben in allen Teilaufgaben **3 cm lange Seiten**.
Ihre Diagonale d misst $d = 3\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} = 4.242\ldots\,\text{cm}$

a Es gibt ganz verschiedene Lösungswege. **3 Beispiele:**

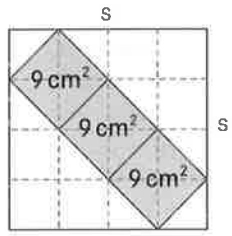
Lösungsweg 1:
Die Seite s des umgebenden Quadrates ist zweimal so lang wie die Diagonale d eines kleinen Quadrates.

s $= 2 \cdot d = 2 \cdot 3\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} \approx$ **8.49 cm**



Lösungsweg 2:
Die Fläche A des umgebenden Quadrates ist 8-mal so gross wie die des kleinen Quadrdates.

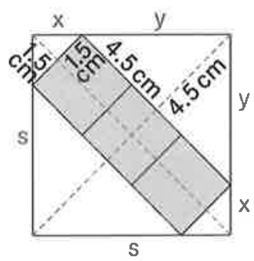
$A = 8 \cdot 9\,\text{cm}^2 = 72\,\text{cm}^2$
s $= \sqrt{72}\,\text{cm} \approx$ **8.49 cm**



Lösungsweg 3:

$x = 1.5\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} = 2.121\ldots\,\text{cm}$
$y = 4.5\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} = 6.363\ldots\,\text{cm}$

s $= x + y \approx$ **8.49 cm**

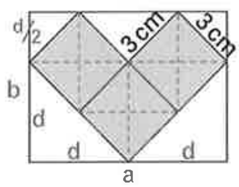


b Es gibt ganz verschiedene Lösungswege. **2 Beispiele:**

Lösungsweg 1:
Die Seite a des umgebenden Rechtecks ist zweimal so lang wie die Diagonale d eines kleinen Quadrates, die Seite b anderthalb mal.

a $= 2 \cdot d = 2 \cdot 3\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} \approx$ **8.49 cm**

b $= 1.5 \cdot d = 1.5 \cdot 3\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} \approx$ **6.36 cm**

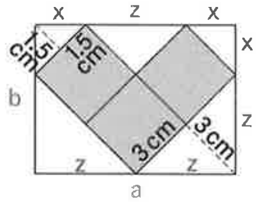


→

Lösungsweg 2:

$x = 1.5\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} = 2.121...\,\text{cm}$
$z = 3\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} = 4.242...\,\text{cm}$

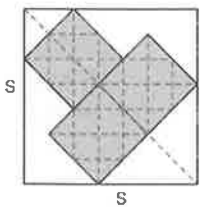
$\mathbf{a} = 2z \approx \mathbf{8.49\,cm}$
$\mathbf{b} = x + z \approx \mathbf{6.36\,cm}$

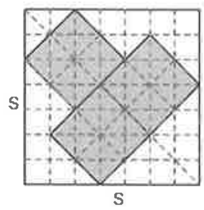


c **Lösungsweg (Beispiel):**

Das umgebende Rechteck ist ein Quadrat, dessen Seiten so lang sind wie eine plus drei Viertel einer Diagonalen d bzw. $\frac{7}{4}$ der Diagonalen d des kleinen Quadrate.

$s = \frac{7}{4}\,d = \frac{7}{4} \cdot 3\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} \approx \mathbf{7.42\,cm}$



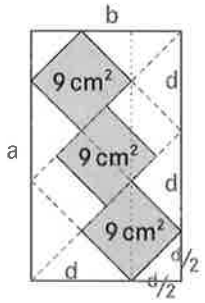


d **Lösungsweg (Beispiel):**

Die lange Seite a des umgebenden Rechtecks ist zweieinhalb mal so lang wie die Diagonale d, die kurze Seite b anderthalb mal.

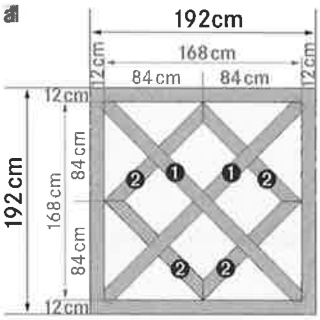
$\mathbf{a} = 2.5 \cdot d = 2.5 \cdot 3\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} \approx \mathbf{10.61\,cm}$

$\mathbf{b} = 1.5 \cdot d = 1.5 \cdot 3\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} \approx \mathbf{6.36\,cm}$



Fehlerhinweis:
In der 1. Auflage des Aufgabenbuches hat sich leider bei dieser Aufgabe ein Fehler eingeschlichen.
Alle **in den Zeichnungen im Buch angeschriebenen Masse** müssen **doppelt so gross** sein.

F214 **a**



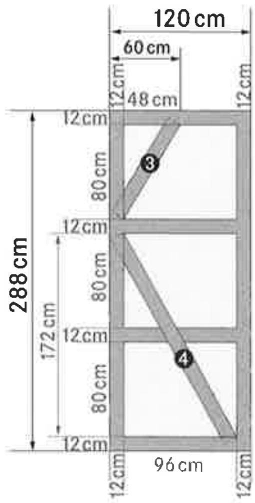
Band ❶ $= 168\,\text{cm} \cdot \sqrt{2}$
$\approx \mathbf{237.59\,cm}$

Band ❷ $= 84\,\text{cm} \cdot \sqrt{2}$
$\approx \mathbf{118.79\,cm}$

b Band ❸ $= \sqrt{80^2 + 48^2}\,\text{cm}$
$\approx \mathbf{93.30\,cm}$

Band ❹ $= \sqrt{172^2 + 96^2}\,\text{cm}$
$\approx \mathbf{196.98\,cm}$

Fachwerkfiguren hatten früher oft religiöse Bedeutung und lehnten sich an keltische Runen an. Diese Bedeutungen sind jedoch im Laufe der Zeit verschwunden. Geblieben sind einzelne Namen für bestimmte Figuren: Die Figur unter **a** ist bekannt als «Raute mit Andreaskreuz» oder auch als «Fünferkreuz». Die Figur bei **b** zeigt einen «halben Mann».

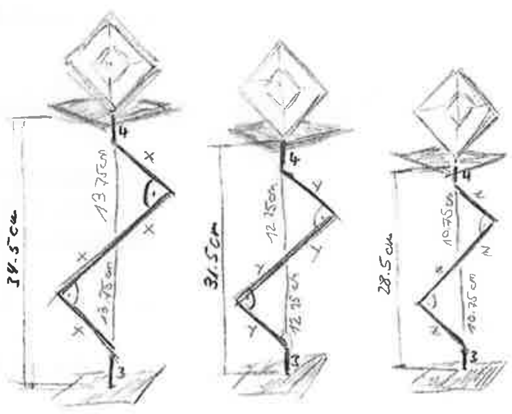


F215 Annahme:
Alle rechtwinkligen Dreiecke sollen aus ästhetischen Gründen rechtwinklig sein.

Grösster Ständer links
$2d = 34.5\,\text{cm} - 3\,\text{cm} - 4\,\text{cm} = 27.5\,\text{cm}$
$d \;= 13.75\,\text{cm}$

$x \cdot \sqrt{2} = d \qquad |:\sqrt{2}$
$x = d : \sqrt{2} = 13.75\,\text{cm} : \sqrt{2} \approx 9.72\,\text{cm}$

Länge s des grössten Eisenstängelchens:
$s = 4 \cdot x + 7\,\text{cm} \approx 45.9\,\text{cm} \approx \mathbf{46\,cm}$



Mittlerer Ständer
2d = 31.5 cm - 3 cm - 4 cm = 24.5 cm
d = 12.25 cm

$y \cdot \sqrt{2} = d \qquad |:\sqrt{2}$
$y = d : \sqrt{2} = 12.25\,\text{cm} : \sqrt{2} \approx 8.66\,\text{cm}$

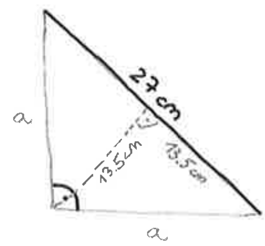
Länge s des mittleren Eisenstängelchen:
$s = 4 \cdot y + 7\,\text{cm} \approx 41.6\,\text{cm} \approx$ **42 cm**

Kleiner Ständer rechts
2d = 28.5 cm - 3 cm - 4 cm = 21.5 cm
d = 10.75 cm

$z \cdot \sqrt{2} = d \qquad |:\sqrt{2}$
$z = d : \sqrt{2} = 10.75\,\text{cm} : \sqrt{2} \approx 7.60\,\text{cm}$

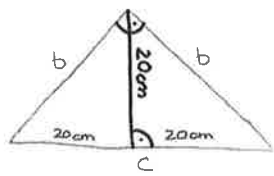
Länge s des mittleren Eisenstängelchen:
$s = 4 \cdot z + 7\,\text{cm} \approx 37.4\,\text{cm} \approx$ **37 cm**

F216 **a** **Lösungsweg 1:**
$a \cdot \sqrt{2} = 27\,\text{cm} \qquad |:\sqrt{2}$
$\mathbf{a} = 27\,\text{cm} : \sqrt{2} \approx \mathbf{19.09\,cm}$



Lösungsweg 2:
$\mathbf{a} = 13.5\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} \approx \mathbf{19.09\,cm}$

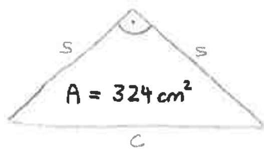
b **Einfachster Lösungsweg:**



$\mathbf{b} = 20\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} \approx \mathbf{28.28\,cm}$

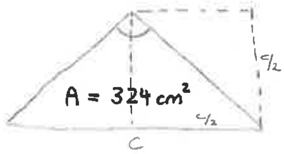
$\mathbf{c} = 2 \cdot 20\,\text{cm} = \mathbf{40\,cm}$

c **Lösungsweg 1:**
$s^2 : 2 = 324\,\text{cm}^2 \qquad | \cdot 2$
$s^2 = 648\,\text{cm}^2$
$s = \sqrt{648}\,\text{cm} = 25.455...\,\text{cm}$

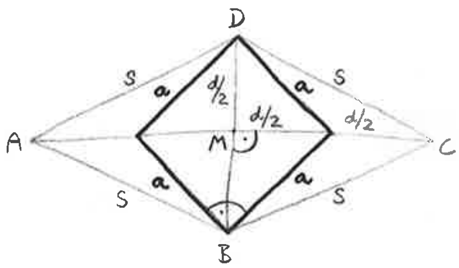


$\mathbf{c} = s \cdot \sqrt{2} = \mathbf{36\,cm}$

Lösungsweg 2:
$(c/2)^2 = 324\,\text{cm}^2$
$(c/2) = \sqrt{324}\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$
$\mathbf{c = 36\,cm}$



F217 **a** a = 5 cm
Diagonale $d = 5\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} = 7.071...\,\text{cm}$
$MD = d/2$
$AC = 2d$ und $MC = d$



Umfang u:
s im $\triangle MCD$: $s = \sqrt{(d/2)^2 + d^2} = 7.905...\,\text{cm}$
$\mathbf{u} = 4 \cdot s \approx \mathbf{31.62\,cm}$

Fläche A:
$A_{Rhombus} = e \cdot f : 2 \qquad e = AC = 2d \qquad f = BD = d$
$\mathbf{A_{ABCD}} = 2d \cdot d : 2 = d^2 = \mathbf{50\,cm^2}$

b $d = a \cdot \sqrt{2} \qquad MD = d/2 \qquad AC = 2d$ und $MC = d$

Umfang mit Bruchtermen:

s im $\triangle MCD$: $s = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + d^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} + d^2} = \sqrt{\frac{5d^2}{4}} = \sqrt{5 \cdot \frac{d^2}{4}} = \sqrt{5} \cdot \frac{d}{2}$

$\mathbf{u} = 4 \cdot s = 4 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{d}{2} = 2d \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \mathbf{2a \cdot \sqrt{10}}$ →

→ **Umfang mit Dezimalzahlen:**

s im $\triangle$MCD: $s = \sqrt{(0.5d)^2 + d^2} = \sqrt{1.25d^2} = \sqrt{1.25}\,d$

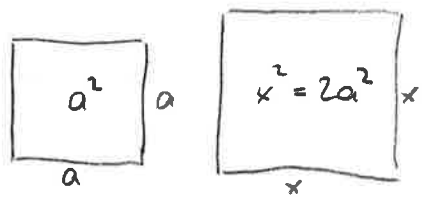
$\mathbf{u} = 4 \cdot s = 4 \cdot \sqrt{1.25}\,d = 4 \cdot \sqrt{1.25} \cdot a\sqrt{2} = \mathbf{4 \cdot \sqrt{2.5} \cdot a}$

Fläche:

$A_{Rhombus} = e \cdot f : 2$ $\qquad e = AC = 2d \qquad f = BD = d$

$\mathbf{A_{ABCD}} = 2d \cdot d : 2 = d^2 = \mathbf{2\,a^2}$

F218 a x = Seiten des neuen Quadrates

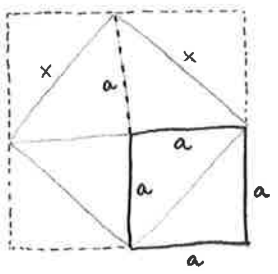


$A\square_{klein} = a^2$

$A\square_{gross}$: $\quad x^2 = 2a^2$

$\quad \mathbf{x} = \mathbf{a \cdot \sqrt{2}}$

b Diagonale: $\quad \mathbf{d} = x \cdot \sqrt{2} = a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \mathbf{2a}$



Fazit

Die Seitenlänge des doppelt so grossen Quadrates entspricht der Diagonalenlänge des ursprünglichen Quadrates.

Die Diagonalen des doppelt so grossen Quadrates sind doppelt so lang die die Seiten des ursprünglichen Quadrates.

F219 $a_1 \cdot \sqrt{2} = c_1 \qquad |: \sqrt{2}$

$a_1 = c_1 : \sqrt{2}$

$c_2 = a_1 = c_1 : \sqrt{2}$

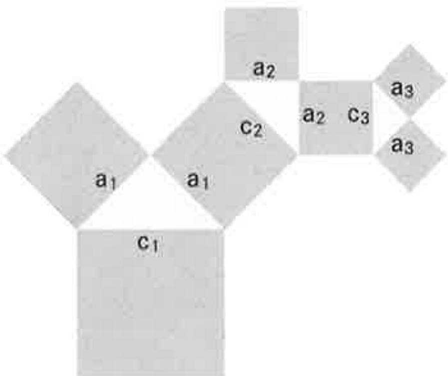
Faktor von c_1 zu c_2: $(1:\sqrt{2}) \approx$ **0.7071**

$a_2 \cdot \sqrt{2} = c_2 \qquad |: \sqrt{2}$

$a_2 = c_2 : \sqrt{2}$

$c_3 = a_2 = c_2 : \sqrt{2}$

Faktor von c_2 zu c_3: $(1:\sqrt{2}) \approx$ **0.7071**



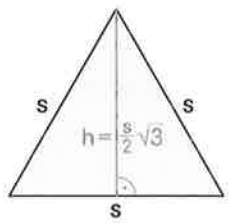
Der Verkleinerungsfaktor bleibt bei diesem Pythagorasbaum mit gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke immer gleich gross. Er beträgt **0.7071** oder **70.71%**.

h in $\triangle$

F220 **Die Höhe in einem gleichseitigen Dreieck**

Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks ist Kathete des halben Dreiecks:

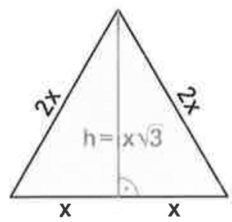
a



$h = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}}$

$h = \sqrt{\frac{3s^2}{4}}$ $\qquad$ kurz: $\quad \mathbf{h = \frac{s}{2}\sqrt{3}}$

b



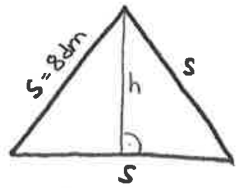
$h = \sqrt{(2x)^2 - x^2}$

$h = \sqrt{3x^2}$ $\qquad$ kurz: $\quad \mathbf{h = x\sqrt{3}}$

d –

d Individuelle Lösungen.
Beispielsweise: s = 8 dm $\Rightarrow$ h = $4\sqrt{3}$ dm ≈ 6.93 dm.

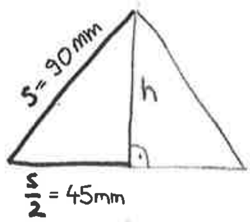
F221 **a** s = 8 dm h = ? A = ?



h = $\frac{s}{2}\cdot\sqrt{3}$ = 4 dm $\cdot\sqrt{3}$ = 6.928… dm ≈ **6.93 dm**

A = s · h : 2 ≈ **27.71 dm²**

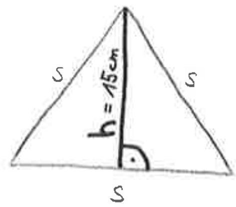
b s/2 = 45 mm h = ? A = ?



h = $\frac{s}{2}\cdot\sqrt{3}$ = 45 mm $\cdot\sqrt{3}$ = 77.942… mm ≈ **77.94 mm**

A = s · h : 2 ≈ **3507.40 mm²**

d h = 15 cm s = ? A = ?

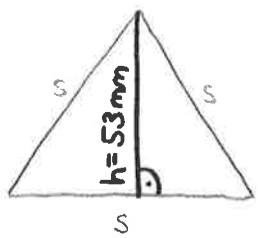


$\frac{s}{2}\cdot\sqrt{3}$ = h | · 2 : $\sqrt{3}$
s = h · 2 : $\sqrt{3}$
= 15 cm · 2 : $\sqrt{3}$ = 17.320… cm ≈ **17.32 cm**

oder mit s = 2x: x$\sqrt{3}$ = h | : $\sqrt{3}$
x = h : $\sqrt{3}$ = 15 cm : $\sqrt{3}$ = 8.660… cm
s = 2x = 17.320… cm ≈ **17.32 cm**

A = s · h : 2 ≈ **129.90 cm²**

F222 h = 53 mm. Die Breite ist die Seitenlänge s.

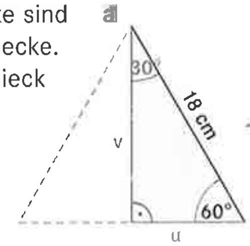


$\frac{s}{2}\cdot\sqrt{3}$ = h | · 2 : $\sqrt{3}$
s = h · 2 : $\sqrt{3}$
= 53 mm · 2 : $\sqrt{3}$ = 61.199… mm ≈ **61.20 mm**

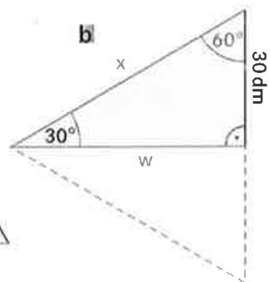
oder mit s = 2x: x$\sqrt{3}$ = h | : $\sqrt{3}$
x = h : $\sqrt{3}$ = 53 mm : $\sqrt{3}$ = 30.599… mm
s = 2x = 61.199… mm ≈ **61.20 mm**

F223 Alle Dreiecke 3 Dreiecke sind halbe gleichseitige Dreiecke.
Jedes 30°-60°-90°-Dreieck ist ein halbes gleichseitiges Dreieck:
Hypotenuse = Seite s
kurze Kathete = s/2
lange Kathete = h

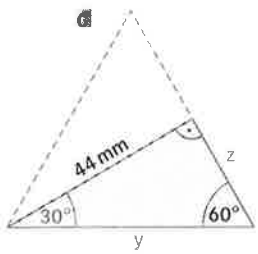
a



b



d

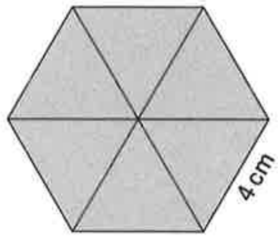


a s = 18 cm
u = s/2 = 9 cm
v = h = $\frac{s}{2}\cdot\sqrt{3}$ ≈ 15.59 cm

b s/2 = 30 dm
x = s = 60 dm
w = h = $\frac{s}{2}\cdot\sqrt{3}$ ≈ 51.96 dm

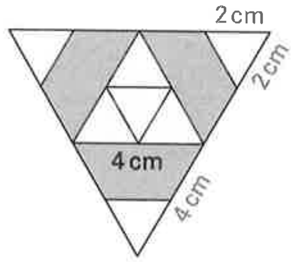
d h = 44 mm
y = s = h · 2 : $\sqrt{3}$
= 50.806… mm ≈ 50.81 mm
z = s/2 ≈ 25.4 mm

F224 Das Sechseck besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken:
Seite $s = 4$ cm
Höhe $h = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = 2\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} = 3.464\ldots\,\text{cm}$



$A_{\triangle} = s \cdot h : 2$
$\mathbf{A_{\bigcirc} = 6 \cdot s \cdot h : 2 \approx 41.57\,cm^2}$

Möglicher Lösungsweg 1:



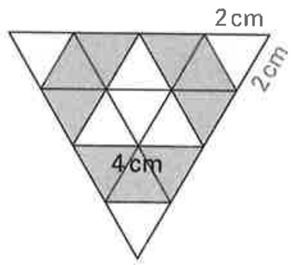
$A_{gesucht} = 3 \cdot A_{grosses\triangle} - 3 \cdot A_{kleines\triangle}$

Grosses $\triangle$:
$s = 4\,\text{cm}$
$h = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = 2\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} = 3.464\ldots\,\text{cm}$
$A_{grosses\triangle} = s \cdot h : 2 = 6.928\ldots\,\text{cm}^2$

Kleines $\triangle$:
$s = 2\,\text{cm}$
$h = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = 1\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} = 1.732\ldots\,\text{cm}$
$A_{kleines\triangle} = s \cdot h : 2 = 1.732\ldots\,\text{cm}^2$

$\mathbf{A_{gesucht}} = 3 \cdot A_{grosses\triangle} - 3 \cdot A_{kleines\triangle} \approx \mathbf{15.59\,cm^2}$

Möglicher Lösungsweg 2 (einfacher):

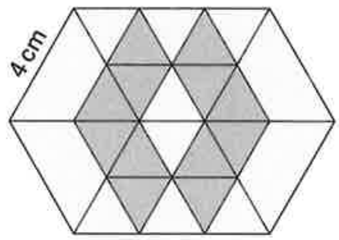


$A_{gesucht} = 9 \cdot A_{kleines\triangle}$

Kleines $\triangle$:
$s = 2\,\text{cm}$
$h = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = 1\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} = 1.732\ldots\,\text{cm}$
$A_{kleines\triangle} = s \cdot h : 2 = 1.732\ldots\,\text{cm}^2$

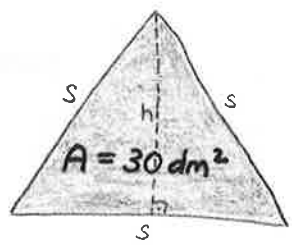
$\mathbf{A_{gesucht}} = 9 \cdot A_{kleines\triangle} \approx \mathbf{15.59\,cm^2}$

Möglicher, einfacher Lösungsweg:



$A_{gesucht} = 12 \cdot A_{kleines\triangle} \approx \mathbf{20.78\,cm^2}$

F225 $A = 30\,\text{dm}^2$ $\qquad s = ?$



$A = \frac{s \cdot h}{2} = \frac{s}{2} \cdot h$ und $h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$

daraus folgt:

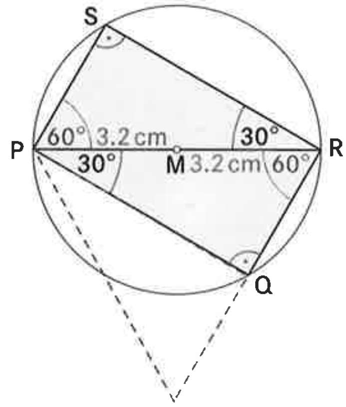
$A = \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2}\sqrt{3} = \frac{s^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

Also:

$\frac{s^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 30\,\text{dm}^2 \qquad | \cdot 4 : \sqrt{3}$

$s^2 = 30\,\text{dm}^2 \cdot 4 : \sqrt{3} = 69.282\ldots\,\text{dm}^2$
$\mathbf{s = \sqrt{s^2} \approx 8.32\,dm}$

F226 Der Kreis ist ein Thaleskreis. Die beiden Dreiecke PQR und PRS sind rechtwinklig. Sie ergänzen sich zu einen Rechteck.

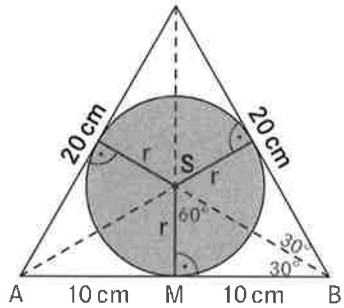


Beide Dreiecke sind zudem halbe gleichseitige Dreiecke (30°-60°-90°) mit der Seitenlänge
$s = PR = 2 \cdot 3.2\,cm = 6.4\,cm$

$RQ = s/2 = 3.2\,cm$
$PQ = h = = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = 3.2\,cm \cdot \sqrt{3} = 5.542...\,cm$

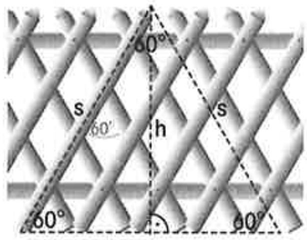
u $= 2 \cdot PQ + 2 \cdot QR \approx$ **17.49 cm**
A $= PQ \cdot QR \approx$ **17.74 cm²**

F227 Das Dreieck MBS ist ein halbes gleichseitiges Dreieck.



MS = halbe Seite	r	
SB = Seite	$2r$	
MB = Höhe	$r \cdot \sqrt{3} = 10\,cm$	$\mid : \sqrt{3}$
	$r = 10\,cm : \sqrt{3} \approx 5.77\,cm$	

F228 ▪ Die Palisaden können als Seiten s eines gleichseitigen Dreiecks aufgefasst werden. Die Höhe h des Dreiecks entspricht der Zaunhöhe.



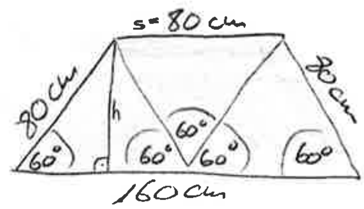
Es gilt: $\frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = h \quad \mid \cdot 2 : \sqrt{3}$
$\mathbf{s = h \cdot 2 : \sqrt{3}}$

Für die verschiedenen Zaunhöhen:

h = 50 cm	$s = 50\,cm \cdot 2 : \sqrt{3} \approx 57.74\,cm$	$l \approx 539\,m$
h = 60 cm	$s = 60\,cm \cdot 2 : \sqrt{3} \approx 69.28\,cm$	$l \approx 647\,m$
h = 70 cm	$s = 70\,cm \cdot 2 : \sqrt{3} \approx 80.83\,cm$	$l \approx 755\,m$
h = 80 cm	$s = 80\,cm \cdot 2 : \sqrt{3} \approx 92.38\,cm$	$l \approx 863\,m$
h = 90 cm	$s = 90\,cm \cdot 2 : \sqrt{3} \approx 103.92\,cm$	$l \approx 971\,m$

▪ $u = 2 \cdot 15\,m + 2 \cdot 20\,m = 70\,m$
Pro Richtung: Alle 15 cm = 0.15 m eine Palisade: $70\,m : 0.15\,m \approx 467$ Stück
Total 934 Stück
Gesamtlänge l der benötigten Palisaden: $l \approx 934 \cdot s$

F229 ▪ Der trapezförmige Tisch lässt sich in 3 gleichseitige Dreiecke mit 80 cm langen Seiten unterteilen.

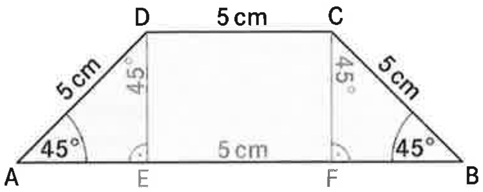


Höhe h eines Dreiecks: $h = 40\,cm \cdot \sqrt{3} = 69.282...\,cm$

Tischfläche A_{Tisch} und Gesamt-Tischfläche A_{gesamt}
$A_{Tisch} = 3 \cdot A_{\triangle klein} = 3 \cdot s \cdot h : 2 = 8\,313.843...\,cm^2$
$\mathbf{A_{gesamt}} = 6 \cdot A = 6 \cdot 8\,313.843...\,cm^2 \approx 49883.063...\,cm^2 \approx \mathbf{4.99\,m^2}$
oder
$A_{Tisch} = A_{\mathbf{Trapez}} = m \cdot h \qquad \boxed{m = (160\,cm + 80\,cm) : 2 = 120\,cm}$
$\mathbf{A_{gesamt}} = 6 \cdot A_{Tisch} = 6 \cdot m \cdot h = 6 \cdot 120\,cm \cdot 69.282...\,cm \approx 49\,883.063...\,cm^2 \approx \mathbf{4.99\,m^2}$

▪ Die Bodenfläche hat die Form eines regelmässigen Sechsecks mit der Seitenlänge 160 cm. Ein Sechseck setzt sich aus 6 kongruenten gleichseitigen Dreiecken mit zusammensetzen.
$s = 160\,cm$
$h = 80\,cm \cdot \sqrt{3} = 138.564...\,cm$
$A_{Boden} = 6 \cdot A_{\triangle gross} = 6 \cdot s \cdot h : 2 = 6 \cdot 160\,cm \cdot 138.564...\,cm : 2 \approx 66\,510.751...\,cm^2 \approx \mathbf{6.65\,m^2}$

F230 **a** Das Trapez ist symmetrisch: AE = FB



Das Dreieck AED ist rechtwinklig-gleichschenklig: AE = ED

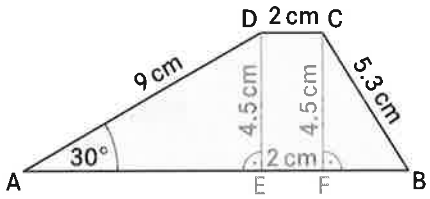
$AD = AE \cdot \sqrt{2} \quad |:\sqrt{2}$

$AE = AD : \sqrt{2} = 5\,cm : \sqrt{2} = 3.535...\,cm$

AB = DC + 2·AE = 5 cm + 2· 3.535... cm ≈ **12.07 cm**

Zur Erinnerung: Erst hier ausrechnen oder gespeicherten Wert einsetzen.

b Das Dreieck AED ist ein halbes gleichseitiges Dreieck:



ED = 4.5 cm — halbe Seite

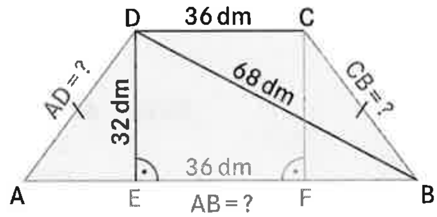
$AE = 4.5\,cm \cdot \sqrt{3} = 7.794...\,cm$ — Höhe

EF = 2 cm

FB im Dreieck FBC: $FB = \sqrt{5.3^2 - 4.5^2}\,cm = 2.8\,cm$

AB = AE + EF + FB ≈ **12.59 cm**

F231 **a** Das Trapez ABCD ist gleichschenklig: AD = BC



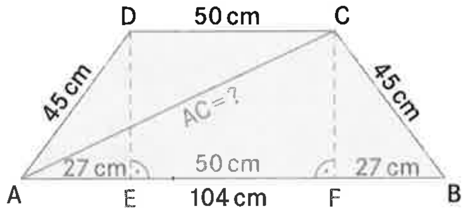
△EBD: $EB = \sqrt{BD^2 - ED^2}$
$= \sqrt{68^2 - 32^2}\,dm = 60\,dm$

AE = FB und FB = EB − 36 dm = 24 dm

AB = AE + EB = 24 dm + 60 dm = **84 dm**

△AED: **AD** = $\sqrt{AE^2 + ED^2}\,dm = \sqrt{24^2 + 32^2}\,dm$ = **40 dm** = BC

b Das Trapez ist gleichschenklig:



AE = FB = (104 cm − 50 cm) : 2 = 27 cm

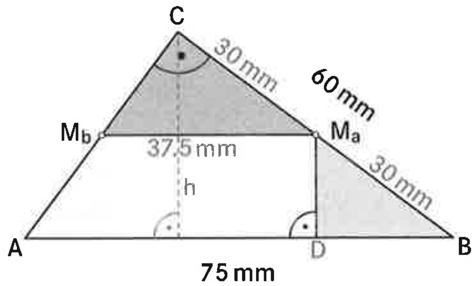
△CFB: $CF = \sqrt{BC^2 - FB^2}$
$= \sqrt{45^2 - 27^2}\,cm = 36\,cm$

AF = 27 cm + 50 cm = 77 cm

△AFC: **AC** = $\sqrt{AF^2 + FC^2}\,cm = \sqrt{77^2 + 36^2}\,cm$ = **85 cm**

Lösungswege:
Es gibt immer, bei allen Aufgaben **verschiedene mögliche Lösungswege**. In diesem Kapitel sind die Möglichkeiten noch vielfältiger als sonst.
Wir erheben keinerlei Anspruch, den besten, geschweige denn, den einzig richtigen Lösungsweg angegeben zu haben.
Es ist jeweils ein Beispiel für einen möglichen Weg, das helfen kann, die eigene Lösung zu überprüfen.

F232 AB = 75 mm BC = 60 mm



△ABC: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$
$= \sqrt{75^2 - 60^2}\,mm = 45\,mm$

$M_bC = M_bA = AC/2 = 22.5\,mm$
$M_aC = M_aB = BC/2 = 30\,mm$

$A_{\triangle CM_bM_a} = M_bC \cdot M_aC : 2 =$ **337.5 mm²**

Um die Fläche des Trapezes ADM_aM_b und des Dreiecks DBM_a zu berechnen, benötigt man deren Höhe DM_a. DM_a ist halb so lang wie die Höhe h des Dreiecks ABC. Und h lässt sich berechnen, indem man die Fläche des Dreiecks ABC auf 2 Arten beschreibt:

$$\left.\begin{array}{l} A_{\triangle ABC} = AC \cdot BC : 2 = 45\,mm \cdot 60\,mm : 2 = 1350\,mm^2 \\ A_{\triangle ABC} = AB \cdot h : 2 \quad = 75\,mm \cdot h : 2 \end{array}\right\} \begin{array}{rl} 75\,mm \cdot h : 2 = 1350\,mm^2 & | \cdot 2 : 75\,mm \\ h = 1350\,mm^2 \cdot 2 : 75\,mm & \\ = 36\,mm & \end{array}$$

Daraus folgt jetzt: $DM_a = 18\,mm$

$\triangle DBM_a$: $DB = \sqrt{M_aB^2 - M_aD^2} = \sqrt{30^2 - 18^2}\,mm = 24\,mm$

$\mathbf{A_{\triangle DBM_a}} = DB \cdot M_aD : 2 = \mathbf{216\,mm^2}$

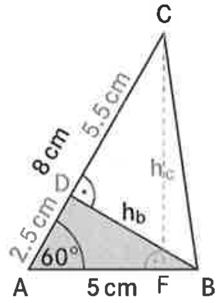
$⏢\ ADM_aM_b$: $M_aM_b = AB : 2 = 37.5\,mm$ Mittellinie im $\triangle ABC$
$AD = AB - DB = 75\,mm - 24\,mm = 51\,mm$
$m = (AD + M_aM_b) : 2 = (51\,mm + 37.5\,mm) : 2 = 44.25\,mm$

$\mathbf{A_{⏢ ADM_aM_b}} = m \cdot M_aD = \mathbf{796.5\,mm^2}$

Kontrolle:
$A_{⏢ ADM_aM_b} + A_{\triangle DBM_a} + A_{\triangle CM_bM_a} = 796.5\,mm^2 + 216\,mm^2 + 337.5\,mm^2 = 1350\,mm^2 = A_{\triangle ABC}$ ✓

F233 **a** $\triangle ABD$ ist ein halbes gleichseitiges Dreieck:
$AD = {}^{AB}/_2 = 2.5\,cm$
$DB = h_b = 2.5\,cm \cdot \sqrt{3} = 4.3301...\,cm$
$\mathbf{A_{\triangle ABD}} = AD \cdot h_b : 2 = 10.8253...\,cm^2 \approx \mathbf{5.41\,cm^2}$

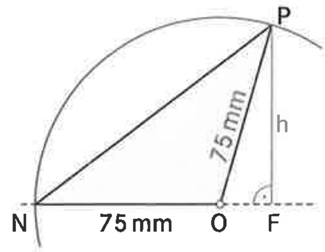
$\triangle DBC$ $DC = AC - AD = 5.5\,cm$
$\mathbf{A_{\triangle BCD}} = DC \cdot h_b : 2 = 5.5\,cm \cdot 4.3301...\,cm : 2$
$= 11.9078...\,cm^2 \approx \mathbf{11.91\,cm^2}$



b $\triangle ABC$ $\triangle AFC$ ist ein halbes gleichseitiges Dreieck:
$h_c = ({}^{AC}/_2) \cdot \sqrt{3} = 4\,cm \cdot \sqrt{3} = 6.9282...\,cm$
$\mathbf{A_{\triangle ABC}} = AB \cdot h_c : 2 = 5\,cm \cdot 6.9282...\,cm : 2 \approx \mathbf{17.32\,cm^2}$

Kontrolle: $A_{\triangle ABD} + A_{\triangle BCD} \approx \mathbf{17.32\,cm^2}$ ✓

F234 $A = 2700\,mm^2$ $NO = OP = 75\,mm$ $NP = ?$

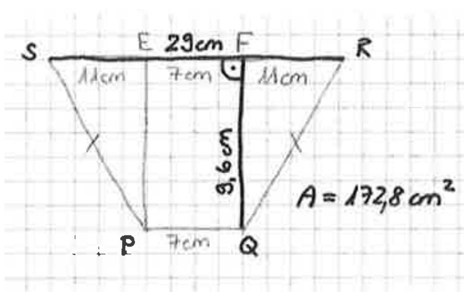


Mit Hilfe der Fläche A lässt sich h = FP berechnen:
$NO \cdot h : 2 = A$ $| \cdot 2 : NO$
$h = A \cdot 2 : NO$
$h = 2700\,mm^2 \cdot 2 : 75\,mm = 72\,mm$

$\triangle OFP$ $OF = \sqrt{OP^2 - FP^2} = \sqrt{75^2 - 72^2}\,mm = 21\,mm$

$\triangle NFP$ $NF = NO + OF = 96\,mm$
$\mathbf{NP} = \sqrt{NF^2 + FP^2} = \sqrt{96^2 + 72^2}\,mm = \mathbf{120\,mm}$

F235 $A = 172.8\,cm^2$ $SR = 29\,cm$ $h = QF = 9.6\,cm$
$SP = QR = ?$ $PQ = ?$

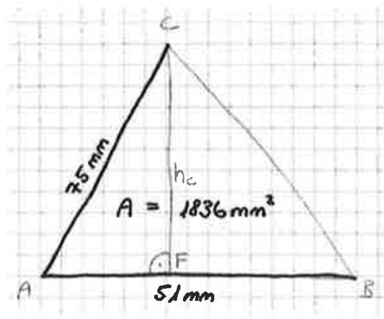


$A_{Trapez} = m \cdot h$ $| : h$
$m = A_{Trapez} : h$
$m = 172.8\,cm^2 : 9.6\,cm = 18\,cm$

$SR = 29\,cm$ $m = 18\,cm$ $\Rightarrow$ $\mathbf{PQ = 7\,cm}$
$EF = PQ = 7\,cm$
$SE = FR = (29\,cm - 7\,cm) : 2 = 11\,cm$

QR im $\triangle QRF$: $\mathbf{QR} = \sqrt{QF^2 + FR^2} = \sqrt{9.6^2 + 11^2}\,cm = \mathbf{14.60\,cm = PS}$

F236 $AB = 51\,mm$ $AC = 75\,mm$ $A = 1\,839\,mm^2$ $BC = ?$



$\triangle ABC$: Aus der Fläche A und der Seite AB kann man die Höhe h_c berechnen:

$AB \cdot h_c : 2 = A$ $\quad | \cdot 2 : AB$

$h_c = A \cdot 2 : AB$

$h_c = 72\,mm$

$\triangle AFC$: $AF = \sqrt{AC^2 - h_c^2}$

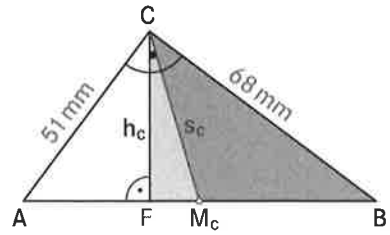
$= \sqrt{75^2 - 72^2}\,mm = 21\,mm$

$\triangle ABC$ $FB = AB - AF = 30\,mm$

$\triangle FBC$: $\mathbf{BC} = \sqrt{FB^2 + h_c^2} = \sqrt{30^2 + 72^2}\,mm = \mathbf{78\,mm}$

F237 $AC = 51\,mm$ $BC = 68\,mm$

$h_c = ?$ $s_c = ?$ $A_{AFC} = ?$ $A_{FM_cC} = ?$ $A_{M_cBC} = ?$



AB $\triangle ABC$: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 85\,mm$

h_c $\triangle ABC$: $A_{ABC} = AC \cdot BC : 2 = 1734\,mm^2$

$A_{ABC} = AB \cdot h_c : 2$

$= 85\,mm \cdot h_c : 2$

$= 42.5\,mm \cdot h_c$

Daraus ergibt sich:

$AB \cdot h_c : 2 = AC \cdot BC : 2$ $\quad | \cdot 2 : AB$

$h_c = AC \cdot BC : AB$

$\mathbf{h_c} = 51\,mm \cdot 68\,mm : 85\,mm$

$= \mathbf{40.8\,mm}$

Alternative:

$42.5\,mm \cdot h_c = 1734\,mm^2$

$\mathbf{h_c} = 1734\,mm^2 : 42.5\,mm$

$= \mathbf{40.8\,mm}$

AF $\triangle AFC$: $AF = \sqrt{AC^2 - h_c^2} = \sqrt{51^2 - 40.8^2}\,mm = 30.6\,mm$

FM_c $FM_c = {}^{PR}/_{2} - AF = 42.5\,mm - 30.6\,mm = 11.9\,mm$

s_c $\triangle FM_cC$: $\mathbf{s_c} = \sqrt{h_c^2 + FM_c^2} = \sqrt{40.8^2 + 11.9^2}\,mm = \mathbf{42.5\,mm}$

A_{AFC} $\mathbf{A_{AFC}} = AF \cdot h_c : 2 = 30.6\,mm \cdot 40.8\,mm : 2 = \mathbf{624.24\,mm^2}$

A_{FM_cC} $\mathbf{A_{FM_cC}} = FM_c \cdot h_c : 2 = 11.9\,mm \cdot 40.8\,mm : 2 = \mathbf{242.76\,mm^2}$

A_{M_cBC} $\mathbf{A_{M_cBC}} = M_cB \cdot h_c : 2 = 42.5\,mm \cdot 40.8\,mm : 2 = \mathbf{867\,mm^2}$

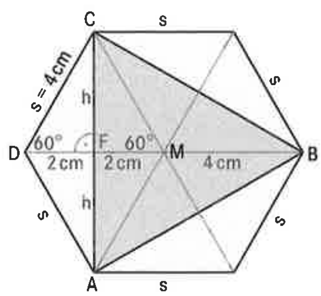
oder:

$\mathbf{A_{M_cBC}} = A_{ABC} : 2$

Kontrolle: $A_{ABC} = AB \cdot h_c : 2 = 85\,mm \cdot 40.8\,mm : 2 = 1734\,mm^2$

$A_{AFC} + A_{FM_cC} + A_{M_cBC} = 624.24\,mm^2 + 242.76\,mm^2 + 867\,mm^2 = 1734\,mm^2$ ✓

F238 **a** $s = 4\,cm$ $u_{ABC} = ?$ $A_{ABC} = ?$



Das Sechseck lässt sich in 6 gleichseitige Dreicke mit der Seitenlänge $s = 4\,cm$ und der Höhe h unterteilen.

$FC = h$ im $\triangle DMC$: $h = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = 2\,cm \cdot \sqrt{3} = 3.464...\,cm$

$\mathbf{u_{ABC}} = 6 \cdot h = 6 \cdot \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = 3s \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 4\,cm \cdot \sqrt{3} \approx \mathbf{20.78\,cm}$

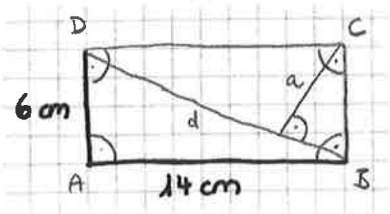
$FB = 2\,cm + 4\,cm = 6\,cm$

$AC = 2 \cdot h = 6.928...\,cm$

$\mathbf{A_{ABC}} = AC \cdot FB : 2 = 6.928...\,cm \cdot 6\,cm : 2 \approx \mathbf{20.78\,cm^2}$

b $A_{Sechseck} = 6 \cdot A_{DMC}$ Die Dreiecksfläche beansprucht **die Hälfte** der Sechsecksfläche.

F239 AB = 14 cm AD = 6 cm a = ?



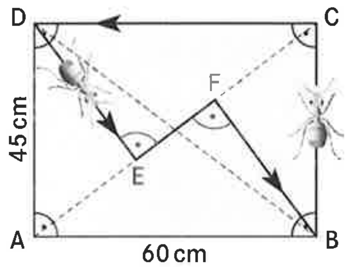
Lösungsidee:
Die Fläche des Dreiecks DBC lässt sich auf zwei Arten beschreiben: $A_{\triangle DBC} = DC \cdot BC : 2$
und $A_{\triangle DBC} = d \cdot a : 2$
Die halbe Rechtecksfläche kann berechnet werden, die Diagonale d ebenfalls. Damit lässt sich dann auch a bestimmen.

$A_{\triangle DBC} = AB \cdot BC : 2 = 14\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} : 2 = 42\,\text{cm}^2$

$d = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{14^2 + 6^2}\,\text{cm} = 15.231...\,\text{cm} \approx 15.23\,\text{cm}$

$d \cdot a : 2 = A_{\triangle DBC} \quad | \cdot 2$
$d \cdot a = 2 \cdot A_{\triangle DBC} \quad | : d$
$\mathbf{a} = 2 \cdot A_{\triangle DBC} : d \approx \mathbf{5.51\,cm}$

F240 $AC = \sqrt{60^2 + 45^2}\,\text{cm} = 75\,\text{cm}$



$A_{\triangle ACD} = AB \cdot AD : 2 = 60\,\text{cm} \cdot 45\,\text{cm} : 2 = 1\,350\,\text{cm}^2$

$AC \cdot DE : 2 = A_{\triangle ACD} \quad | \cdot 2$
$AC \cdot DE = 2 \cdot A_{\triangle ACD} \quad | : AC$
$DE = 2 \cdot A_{\triangle ACD} : AC$
$\mathbf{DE} = 2700\,\text{cm}^2 : 75\,\text{cm} = \mathbf{36\,cm}$

FB = DE = **36 cm**

EF = AC − AE − FC, wobei AE = FC
AE lässt sich im Dreieck AED berechnen: $AE = \sqrt{45^2 - 36^2}\,\text{cm} = 27\,\text{cm}$

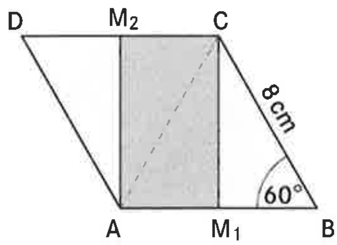
EF = AC − AE − FC = 75 cm − 2·27 cm = **21 cm**

Langer Weg: **DEFBCD** = DE + EF + FB + BC + CD
= 36 cm + 21 cm + 36 cm + 45 cm + 60 cm = **198 cm**

Kurzer Weg DEFBD: BD = AC = 75 cm
DEFBD = DE + EF + FB + BD
= 36 cm + 21 cm + 36 cm + 75 cm = **168 cm**

Ihr Weg wäre **30 cm kürzer** gewesen, wenn sie von B direkt nach D zurückgegangen wäre.

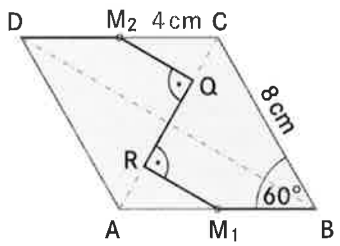
F241 **a** Ein Rhombus mit einem 60°-Winkel setzt sich aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammen.



Es gilt daher:
$AM_1 = 4\,\text{cm}$
$M_1C = 4\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} = 6.928...\,\text{cm}$

$\mathbf{A_{M_1CM_2}} = AM_1 \cdot M_1C = \mathbf{27.71\,cm^2}$

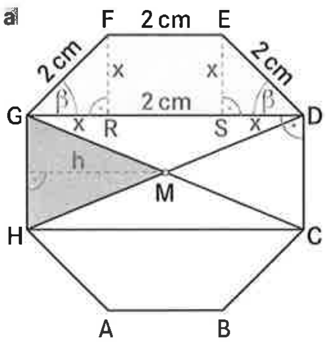
b Der Rhombus ist punktsymmetrisch: $\mathbf{RM_1 = QM_2}$
Das Dreieck QCM_2 ist ein halbes gleichseitige Dreieck.



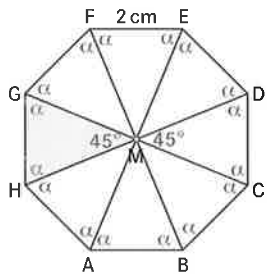
$CM_2 = 4\,\text{cm}$	Seite
$QC = 2\,\text{cm}$	halbe Seite
$\mathbf{QM_2 = 2\,cm \cdot \sqrt{3}} = 3.464...\,\text{cm}$	Höhe

AC = 8 cm Seite im gleichseitigen Dreieick ABC
RQ = AC − 2 · QC = **4 cm**
$\mathbf{M_1RQM_2D} = RQ + 2 \cdot QM_2 + DM_2 \approx \mathbf{14.93\,cm}$

F242 **a)**

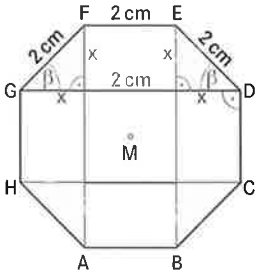


Lösungsidee:
Damit die Fläche berechnet werden kann, muss zuerst die Seite GD und die Höhe x berechnet werden.



Winkel:
Ein Bestimmungsdreieck hat einen Mittelpunktswinkel von 45° und die beiden Basiswinkel $\alpha = 67.5°$.
Daraus folgt: $\beta = 2\alpha - 90° = 135° - 90° = \mathbf{45°}$

Variante zu Winkel:



Aus der Symmetrie geht sofort hervor, dass die Dreiecke rechtwink-gleichschenklig sein müssen.

Höhe:
Das Dreieck SDE ist rechtwinklig-gleichschenklig: $x \cdot \sqrt{2} = 2\,\text{cm}$
$\mathbf{x} = 2\,\text{cm} : \sqrt{2} = 1.414...\,\text{cm}$

Mittellinie:
FE = 2 cm $\quad$ **GD** = 2 cm + 2x $\quad\Rightarrow\quad$ Mittellinie **m** = 2 cm + x ≈ 3.41 cm

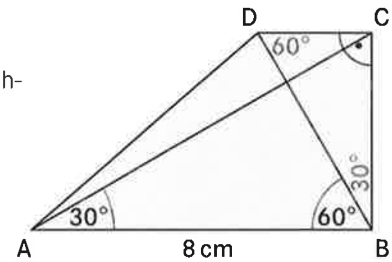
Fläche: $\quad A_{\triangle GDEF} = m \cdot x = (2\,\text{cm} + x) \cdot x \approx \mathbf{4.83\,cm^2}$

b) **Lösungsweg 1:**
Höhe h eines Bestimmungsdreiecks: $h = {}^{GD}/_{2} = 1\,\text{cm} + x = 2.414...\,\text{cm}$
$A_{\text{Bestimmungsdreieck}} = 2\,\text{cm} \cdot h : 2 \approx \mathbf{2.41\,cm^2}$

Lösungsweg 2:
Die Fläche eines Bestimmungsstückes ist ein Achtel der gesamten Achtecksfläche.
Gesamte Achtecksfläche:
$A_{\text{Rechteck}} = 2\,\text{cm} \cdot GD = 2\,\text{cm} \cdot (2\,\text{cm} + 2x) = 9.656...\,\text{cm}$
$A_{\text{Achteck}} = A_{\text{Rechteck}} + 2 \cdot A_{\triangle GDEF}$
$A_{\text{Bestimmungsdreieck}} = (A_{\text{Rechteck}} + 2 \cdot A_{\triangle GDEF}) : 8 \approx \mathbf{2.41\,cm^2}$

Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

F243 **a)** AC = ? $\quad$ BD = ?



AC $\quad\triangle ABC$: $\quad$ Das Dreieck ABC ist ein halbes gleichseitiges Dreieck mit AB als Höhe:

$\frac{AC}{2} \cdot \sqrt{3} = 8\,\text{cm} \quad | \cdot 2 : \sqrt{3}$

AC $= 8\,\text{cm} \cdot 2 : \sqrt{3} \approx \mathbf{9.24\,cm}$

BC $= {}^{AC}/_{2} \approx 4.62\,\text{cm}$

BD $\quad\triangle BCD$: $\quad$ Das Dreieck BCD ist ein halbes gleichseitiges Dreieck mit BC als Höhe:

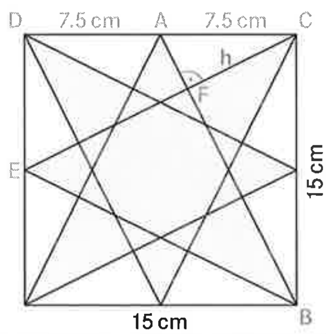
$\frac{BD}{2} \cdot \sqrt{3} = BC \quad | \cdot 2 : \sqrt{3}$

BD $= BC \cdot 2 : \sqrt{3} \approx \mathbf{5.33\,cm}$

CD $= {}^{BD}/_{2} \approx 2.67\,\text{cm}$

b) $A_{\text{Trapez}} = m \cdot h \qquad m = (AB + CD) : 2 \approx 5.33\,\text{cm} \qquad h = BC \approx 4.62\,\text{cm}$
$A_{ABCD} = m \cdot h \approx \mathbf{24.63\,cm^2}$

F244 **a)** Lösungsidee: $A_{\text{Stern}} = A_{\text{Quadrat}} - 8 \cdot A_{\text{weisses}\triangle}$



Die Figur ist symmetrisch, die weissen Dreiecke sind alle kongruent. Sie sind zudem rechtwinklig. Dies lässt sich mit der Kongruenz der Dreicke ABC und ECD zeigen.

Die Kathete FC ist zugleich Höhe h im Dreieck ABC. Sie lässt sich dort berechnen, indem man die Fläche auf zwei verschiedene Arten beschreibt. Dazu muss aber zuerst die Hypotenuse AB berechnet werden.

Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

AB $\triangle ABC$: $AB = \sqrt{15^2+7.5^2}\,cm = 16.770...\,cm \approx 16.77\,cm$

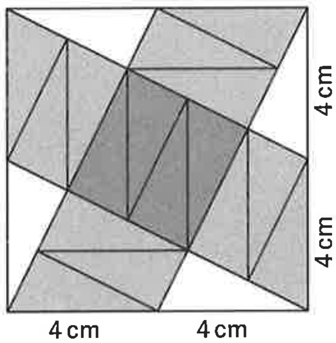
h $\triangle ABC$ $A_{\triangle ABC} = BC \cdot AC : 2$
$A_{\triangle ABC} = AB \cdot h : 2$ $AB \cdot h : 2 = BC \cdot AC : 2$ $| \cdot 2 : AB$
$h = BC \cdot AC : AB = 6.708...\,cm \approx 6.71\,cm$

AF $\triangle AFC$: $AF = \sqrt{AC^2 - h^2}\,cm = 3.354...\,cm \approx 3.35\,cm$

$A_{weisses\triangle} = A_{\triangle AFC} = AF \cdot h : 2 = 11.25\,cm^2$

$\mathbf{A_{Stern}} = A_{Quadrat} - 8 \cdot A_{weisses\triangle} = 225\,cm^2 - 8 \cdot 11.25\,cm^2 = \mathbf{135\,cm^2}$

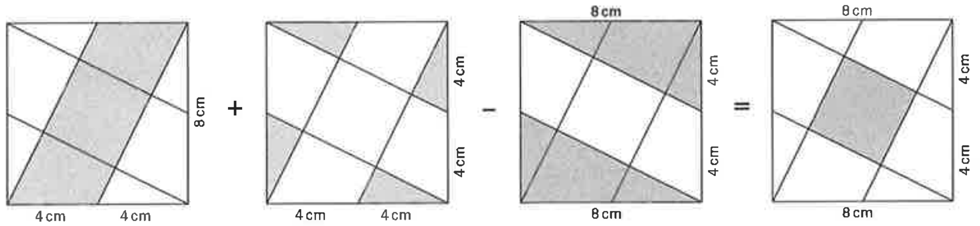
b **Lösungsvorschlag 1:**
Durch Parallelen zu den inneren und äusseren Quadratseiten lässt sich die ganze Quadratfläche in 20 kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegen.
Vier davon bilden das innere, im Buch rote Quadrat.



$\mathbf{A_{kleines\triangle}} = 8\,cm \cdot 8\,cm : 20 = \mathbf{3.2\,cm^2}$

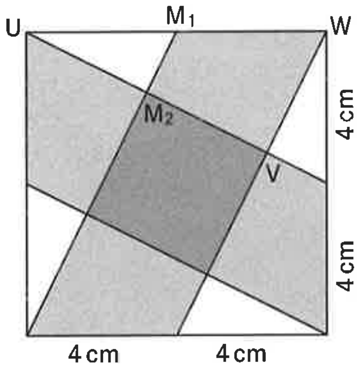
$\mathbf{A_{rotes\square}} = 4 \cdot A_{kleines\triangle} = \mathbf{12.8\,cm^2}$

Lösungsvorschlag 2:



Die vier kleinen Dreiecke lassen sich analog wie in **a** berechnen.

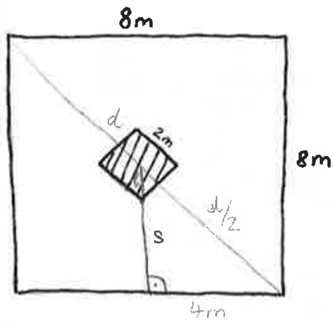
Lösungsvorschlag 3:



M1 ist Mitte von UW, $(M_1M_2) \parallel (VW)$.
M_1M_2 ist somit Mittellinie im Dreieck UVW, M_2 halbiert UV.

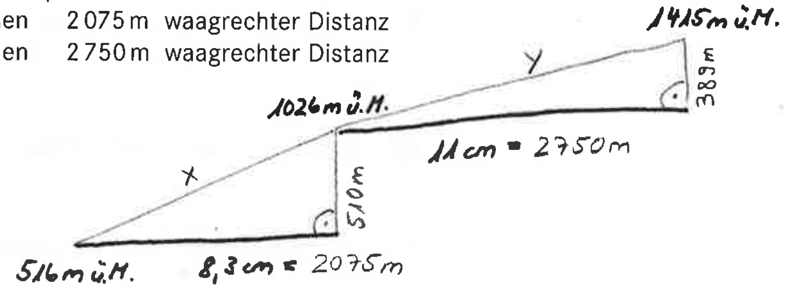
$M_2V = UM_2$ lässt sich analog wie in **a** berechnen.

F245 Beispielsweise einen Greifarm oder einen Steg organisieren.
Bevor sich Fritzli ein Hilfsmittel beschafft, sollte er überlegen, wo und wie lang der kürzeste Abstand vom Bassinrand zur Insel ist.



Der kürzeste Weg s verläuft offensichtlich senkrecht zum Bassinrand zu einer Inselecke.
Dabei gilt $s = 4\,m - l$, wobei l halbe Diagonale der Insel.
$l = 1\,m \cdot \sqrt{2} = 1.414...\,m$
$\mathbf{s} = 4\,m - l \approx \mathbf{2.59\,m}$
Ein Steg müsste natürlich länger sein, mit einer Greifzange könnte er auch näherliegende Flugzeugteile packen - und wer weiss, vielleicht hat Fritzli noch ganz andere Ideen.

F246 ■ Massstab 1 : 25 000 bedeutet:
1 cm auf der Karte entspricht 25 000 cm = 250 m in Wirklichkeit.
8.3 cm entsprechen 2 075 m waagrechter Distanz
11 cm entsprechen 2 750 m waagrechter Distanz



Höhenunterschied: Talstation - Krienseregg: 1 026 m ü.M. - 516 m ü.M. = 510 m
Krienseregg - Fräkmüntegg: 1 415 m ü.M. - 1 026 m ü.M. = 389 m

$x = \sqrt{2075^2 + 510^2}\,\text{m} \approx 2136.76\,\text{m}$ $\qquad$ $y = \sqrt{2750^2 + 389^2}\,\text{m} \approx 2\,777.38\,\text{m}$

$x + y = 4914.14\,\text{m} \approx 4.9\,\text{km}$
Die Gondelbahn hat eine Länge von ungefähr **4.9 km**.

■ Strecke s = 4900 m
Fahrzeit t = 18 min = 1 080 s
Durchschnittliche Geschwindigkeit **v** = s : t ≈ **4.5 m/s**

■ $\text{Steigung} = \frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Horizontaldistanz}}$

Steigung auf dem unteren Teilstück = $\frac{510\,\text{m}}{2\,075\,\text{m}} \approx 0.2458 = \mathbf{24.58\%}$

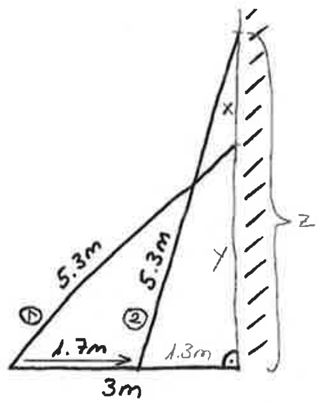
Steigung auf dem oberen Teilstück = $\frac{389\,\text{m}}{2\,750\,\text{m}} \approx 0.1415 = \mathbf{14.15\%}$

F247 Ursprüngliche Stellung ❶:
ursprüngliche Höhe y = $\sqrt{5.3^2 - 3^2} = 4.369...\,\text{m} \approx 4.37\,\text{m}$

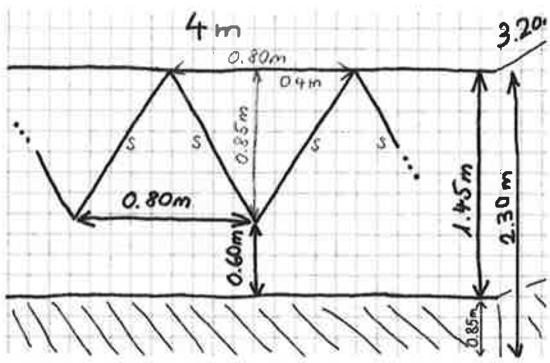
Neue Stellung ❷:
neue Höhe z = $\sqrt{5.3^2 - 1.3^2} = 5.138...\,\text{m} \approx 5.14\,\text{m}$

Veränderung der Höhe: $x = z - y \approx 0.77\,\text{m}$

Die Leiterende gleitet um **77 cm** nach oben.



F248 Alle gegebenen Grössen sind in der Skizze eingetragen.

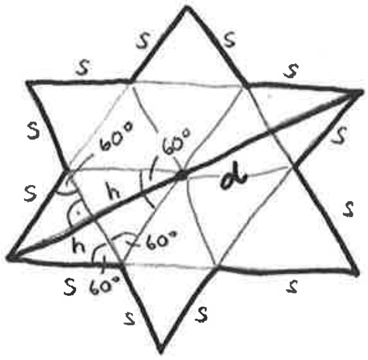


Anzahl Windlichter
Abstand der Windlichter zueinander: 80 cm
Länge des Balkons: 4 m ⇒ 5 Lichter
Breite des Balkons: 3.2 m ⇒ 4 Lichter x 2
Total: 5 + 2 · 4 = **13 Lichter**

Seil pro Windlicht
Das Seil bildet ein gleichschenkliges Dreieck mit der Schenkellänge s.
$s = \sqrt{0.4^2 + 0.85^2} \approx 0.94\,\text{m}$
Ein Windlicht benötigt demnach 2 · 0.94 m = 1.88 m Seil.

Für 13 Lichter muss das Seil mindestens 13 · 1.88 m ≈ 24.42 m, also **24.5 m** lang sein.

F249 Durchmesser des Sterns d = 17.2 cm
Seitenlänge einer Zacke = s
Umfang des Sterns = 12s
Lötstelle = 8 mm



Der Stern lässt sich in 12 kongruente, gleichseitige Dreiecke zerlegen, die gleich gross sind wie die Zacken.

Der Durchmesser d verläuft entlang der Höhen h von 4 solchen Dreiecken: d = 4h
Und damit: h = d : 4 = 17.2 cm : 4 = 4.3 cm

Aus Höhe im gleichseitigen Dreieck lässt sich die Seite s berechnen:

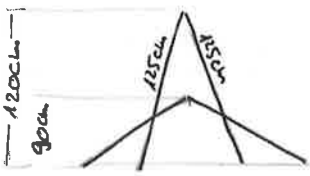
$$\frac{s}{2}\cdot\sqrt{3} = h \qquad | \cdot 2 : \sqrt{3}$$
$$\mathbf{s} = h \cdot 2 : \sqrt{3} = 4.965\ldots\,\text{cm}$$

Und daraus der Umfang: $u = 12s \approx 59.58\,\text{cm}$

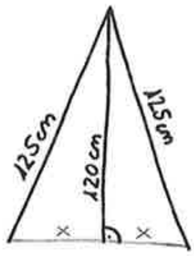
Für die Lötstelle kommen noch 8 mm dazu: 59.58 cm + 0.8 cm = 60.38 cm.

Der Draht für einen Stern sollte **60 - 60.5 cm** lang sein.

F250



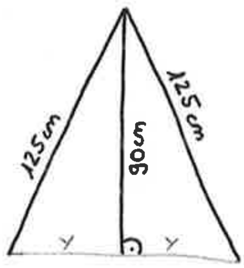
Die Standbreite des Ständers häng von seiner Höhe ab:
Sie wird minimal, wenn er eng gestellt und hoch ist.
Sie wird maximal, wenn er breit gestellt und niedrig ist.



a) Minimale Standbreite wird bei einer Höhe von 120 cm erreicht.

Halbe minimale Standbreite $x = \sqrt{125^2 - 120^2}\,\text{cm} = 35\,\text{cm}$

Die minimale Standbreite ist somit 2x = **70 cm**.

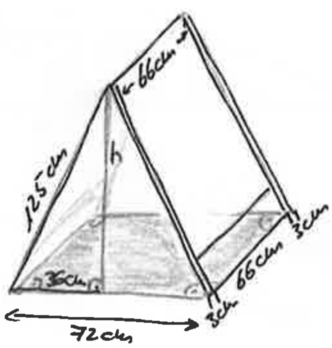


b) Maximale Standbreite wird bei einer Höhe von 90 cm erreicht.

Halbe maximale Standbreite $y = \sqrt{125^2 - 90^2}\,\text{cm} = 86.746\ldots\,\text{cm}$

Die maximale Standbreite ist somit 2y ≈ **173.5 cm**.

c)

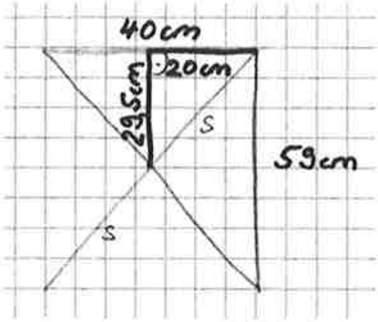


Breite der Plakatfläche: 66 cm
Durchmesser der Stützen: 3 cm
Gesamtbreite: 66 cm + 2 · 3 cm = 72 cm

Höhe $h = \sqrt{125^2 - 36^2}\,\text{cm} \approx 119.70\,\text{cm}$

Bei einer Ständerhöhe von **119.70 cm** wird die Standfläche quadratisch.

F251 **a** Sitzhöhe = 59 cm Sitzbreite = 40 cm

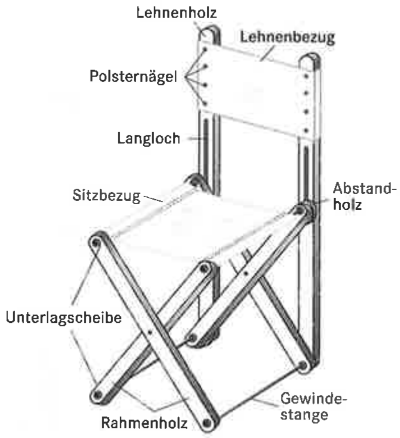


Die Rahmenhölzer bilden zwei kongruente gleichschenklige Dreiecke der Höhe 29.5 cm.

Die Schenkellänge s ist die halbe Länge des Rahmenholzes. Sie lässt sich berechnen:
$s = \sqrt{29.5^2 + 20^2}\,\text{cm} = 35.6405...\,\text{cm} \approx 35.64\,\text{cm}$

Die Länge des Rahmenholzes beträgt somit:
$2s \approx$ **71.28 cm**.
Möchte Lea Sitzhöhe ganz exakt auf 59 cm machen, so müsste sie sich noch überlegen, wieviel sie für die Rundung des Holzes zugeben muss, da die Gewindestange im Zentrim sitzt. Lea wird die Rahmenhölzer aber wohl eher **71 cm** lang machen.

b Bei geöffnetem Stuhl muss die Gewindestange an der unteren Kante des Langloches festsitzen. Geht man davon aus, dass die Gewindestangen keinen allzu grossen Durchmesser hagen, so muss das Loch **auf Sitzhöhe beginnen**. (Sonst allenfalls auf Sitzhöhe – Radius Gewindestange.)



Damit der Stuhl ganz geschlossen werden kann, muss genug Platz da sein, damit die Gewindestange nach oben rutschen kann, bis das Rahmenholz fast senkrecht steht.
Das Langloch ist also sicher dann genügend lang, wenn seine Oberkante auf einer Höhe von 71.3 cm ab Boden ist.

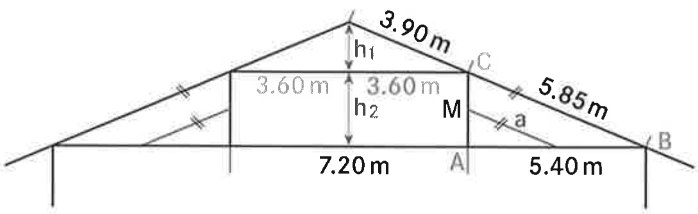
Daraus ergibt sich:
Länge des Langloches = Länge Rahmenholz – Sitzhöhe = 71.3 cm – 59 cm = **12.3 cm**

Tatsächlich würde es genügen, wenn es etwas weniger lang ist:
1. Die Rahmenhölzer sind nicht ganz senkrecht, wenn der Stuhl zusammengeklappt ist.
2. Die Gewindestange sitzt nicht zuäusserst am Rahmenholz.

Es spielt aber keine Rolle, wenn das Langloch länger ist! Viel wichtiger ist es, dass dieses unten am richtigen Ort beginnt!

F252 Arbeitsblatt
Hinweis: Dieses Arbeitsblatt mit dem Riegelhaus ist sehr aufwändig, wenn man alles berechnen will!
Wir empfehlen, je nach gewünschter Übungstätigkeit bestimmte Balken auszuwählen. Anhand der Lösung ist leicht ersichtlich, welche Balken wie berechnet werden müssen.

F253 **a** Zu berechnen:
a, h_1 und h_2

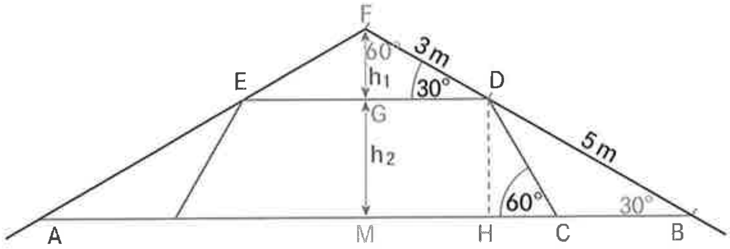


a a ist Mittellinie im Dreieck ABC und somit halb so lang wie BC:
a = 5.85 m : 2 ≈ **2.93 m**

h_1 $h_1 = \sqrt{3.9^2 - 3.6^2}\,\text{m} = \mathbf{1.5\,m}$

h_2 $h_2 = AC = \sqrt{5.85^2 - 5.4^2}\,\text{m} = \mathbf{2.25\,m}$

b Zu berechnen:
AB, CD, ED,
h_1 und h_2



△GDF	GDF ist ein halbes gleichseitiges Dreieck mit der Seite FD = 3 m.	
	h_1 ist halbe Seite:	**h_1 = 1.5 m**
	GD ist Höhe:	GD = 1.5 m · $\sqrt{3}$ = 2.598… m ≈ 2.60 m
	ED	**ED** = 2 · GD ≈ **5.20 m**
△MBF	MBF ist ein halbes gleichseitiges Dreieck mit der Seite BF = 8 m.	
	MF ist halbe Seite:	MF = 4 m
	h_2	**h_2** = MF − h_1 = 4 m − 1.5 m = **2.5 m**
	MB ist Höhe:	MB = 4 m · $\sqrt{3}$ = 6.928… m ≈ 6.93 m
	AB	**AB** = 2 · MB ≈ **13.86 m**
△HCD	HCD ist ein halbes gleichseitiges Dreieck mit der zu berechnenden Seite CD.	
	HD ist Höhe:	HD = h_2 = 2.5 m
	CD	$\frac{CD}{2} \cdot \sqrt{3} = 2.5\,\text{m} \quad \vert \cdot 2 : \sqrt{3}$
		CD $= 2.5\,\text{m} \cdot 2 : \sqrt{3} \approx$ **2.89 m**

F254 **a** Zu berechnen: EF, CF, AC, CD und AB

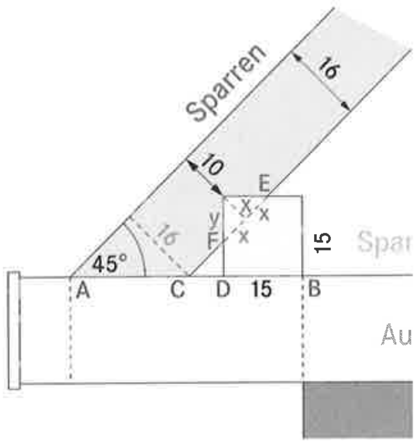
AC **AC** = 16 cm · $\sqrt{2}$ = 22.627… cm ≈ **22.63 cm**

EF x = 16 cm − 10 cm = 6 cm
EF = 2x = **12 cm**

CD y = x · $\sqrt{2}$ = 6 cm · $\sqrt{2}$ = 8.485… cm ≈ 8.49 cm
CD = FD = 15 cm − y = 6.514… cm ≈ **6.51 cm**

AB **AB** = AC + CD + 15 cm ≈ **44.14 cm**

CF **CF** = CD · $\sqrt{2}$ ≈ **9.21 cm**



b Zu berechnen: CD, FD, AB, BC, EF, MG

CD **CD** = 5 cm · $\sqrt{2}$ = 7.071… cm ≈ **7.07 cm**

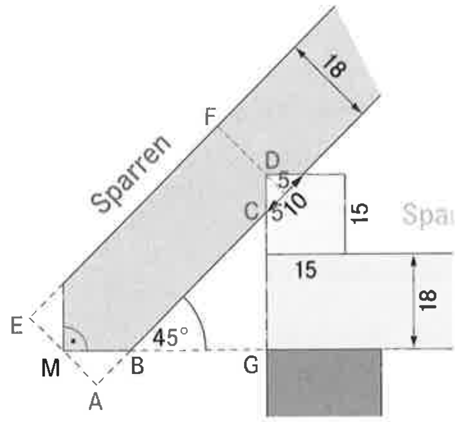
FD **FD** = 18 cm − 5 cm = **13 cm**

AB **AB** = AM = 18 cm : 2 = **9 cm**

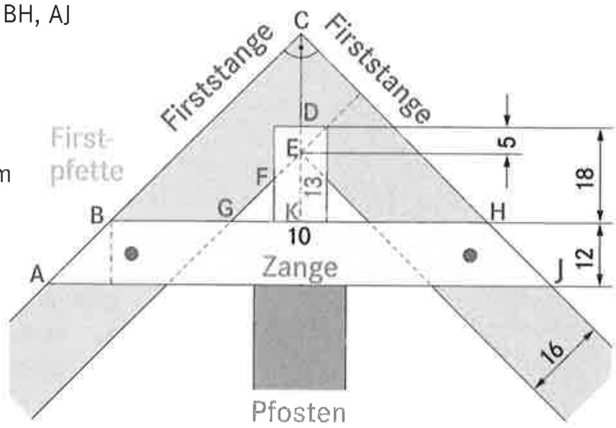
BC BG = GC = 18 cm + 15 cm − CD
= 25.928… cm ≈ 25.93 cm
BC = BG · $\sqrt{2}$ ≈ **36.67 cm**

EF **EF** = AB + BC + 5 cm ≈ **50.67 cm**

MG MB = AB · $\sqrt{2}$ = 9 cm · $\sqrt{2}$ = 12.727… cm ≈ 12.73 cm
MG = MB + BG ≈ **38.66 cm**



d Zu berechnen: AB, BC, CD, FE, GF, BH, AJ



AB **AB** = $12\,cm \cdot \sqrt{2}$ ≈ **16.97 cm**

CD CE = $16\,cm \cdot \sqrt{2}$
= 22.627... cm ≈ 22.63 cm
CD = CE − 5 cm ≈ **17.63 cm**

BC **BC** = $(18\,cm + CD) \cdot \sqrt{2}$
≈ **50.38 cm**

FE **FE** = $5\,cm \cdot \sqrt{2}$
= 7.071... cm ≈ **7.07 cm**

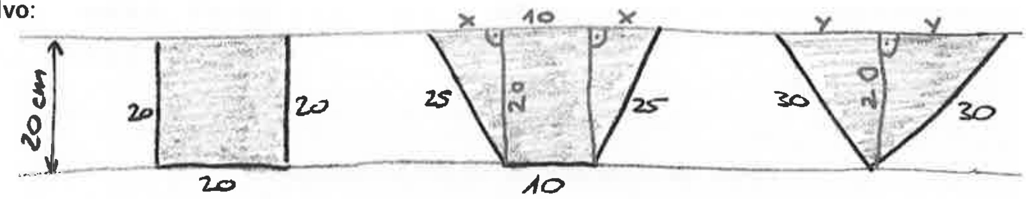
GF GE = $13\,cm \cdot \sqrt{2}$ = 18.384... cm ≈ 18.38 cm
GF = GE − FE ≈ **11.31 cm**

BH BK = KC = CE + 13 cm = 35.627... cm ≈ 35.63 cm
BH = 2 · BK ≈ **71.25 cm**

AJ **AJ** = BH + 2 · 12 cm = **95.25 cm**

F255 Damit das Blech möglichst viel Wasser leiten kann, muss der geformte Kanal eine möglichst grosse Querschnittsfläche haben.

Ivo:

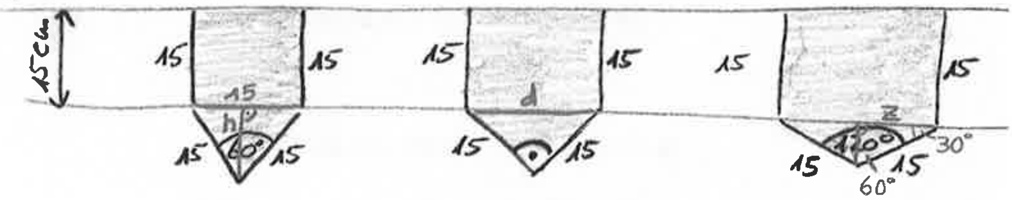


Querschnitt links: $A_{\text{Ivo links}} = 20\,cm \cdot 20\,cm = \mathbf{400\,cm^2}$

Querschnitt Mitte: $x = \sqrt{25^2 - 20^2}\,cm = 15\,cm$
Parallelseiten des Trapezes: 10 cm, 40 cm ⇒ Mittellinie = 25 cm
$A_{\text{Ivo Mitte}}$ = Mittellinie · Höhe = 25 cm · 20 cm = $\mathbf{500\,cm^2}$

Querschnitt rechts: $y = \sqrt{30^2 - 20^2}\,cm$ = 22.360... cm ≈ 22.36 cm
$A_{\text{Ivo rechts}} = 2y \cdot 20\,cm : 2 = y \cdot 20\,cm = \mathbf{447.21\,cm^2}$

Ali:



Effizientester Kanal:

Die grösstmögliche Fläche würde ein **halbkreisförmiger Querschnitt** liefern.

Aus $r \cdot \pi = 60\,cm$
folgt: $r = \frac{60}{\pi}\,cm$

$A_{\text{Halbkreis}} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi$
= $\mathbf{572.96\,cm^2}$

Querschnitt links: Die Spitze bildet ein gleichseitiges Dreieck.
$h = 7.5\,cm \cdot \sqrt{3}$ = 12.990... cm ≈ 12.99 cm
$A_{\text{Ali links}} = A_{\square} + A_{\triangle} = (15\,cm)^2 + 15\,cm \cdot h : 2 \approx \mathbf{322.43\,cm^2}$

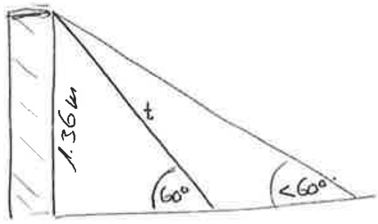
Querschnitt links: Die Spitze bildet ein halbes Quadrat.
$d = 15\,cm \cdot \sqrt{2}$ = 21.213... cm ≈ 21.21 cm
$A_{\text{Ali Mitte}} = A_{\square} + A_{\triangle} = 15\,cm \cdot d + (15\,cm)^2 : 2 \approx \mathbf{430.70\,cm^2}$

Querschnitt links: Die Spitze lässt sich in zwei halbe gleichseitige Dreiecke teilen.
$z = 7.5\,cm \cdot \sqrt{3}$ = 12.990... cm ≈ 12.99 cm ⇒ 2z ≈ 25.98 cm
$A_{\text{Ali rechts}} = A_{\square} + A_{\triangle} = 15\,cm \cdot 2z + 2z \cdot 7.5\,cm : 2 \approx \mathbf{487.14\,cm^2}$

Der **mittlere Querschnitt von Ivo** kann die grösste Wassermenge auf das Rad leiten.

F256 **a** Bei einem Steigungswinkel von 60° wird die Treppe am kürzesten.

Das Steigungsdreieck ist ein halbes gleichseitiges Dreieck: Höhe = 1.36 m, Seite t

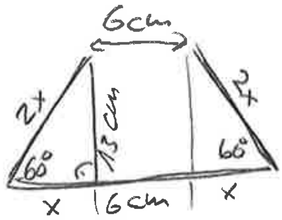


$\frac{t}{2} \cdot \sqrt{3} = 1.36\,\text{m} \qquad |\cdot 2 : \sqrt{3}$

$t = 1.36\,\text{m} \cdot 2 : \sqrt{3} \approx 1.57\,\text{m}$

Die Treppe muss mindestens **1.57 m** lang sein.

b x ist **halbe** Seite eines gleichseitigen Dreiecks mit der Höhe 13 cm.



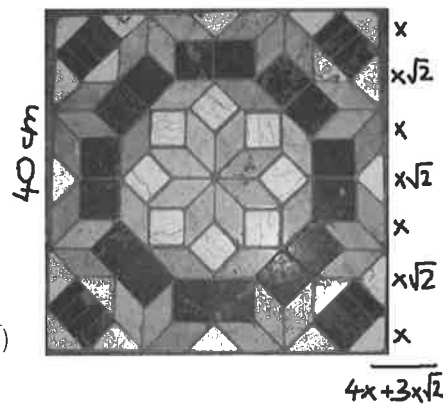
$x \cdot \sqrt{3} = 13\,\text{cm} \qquad : \sqrt{3}$

$x = 13\,\text{cm} : \sqrt{3} = 7.505\,\text{cm} \approx 7.51\,\text{cm}$

Bodenbreite: 6 cm + 2x = 21.01 cm

Der Tunnel muss einen **21 cm** breiten Boden haben.

F257 In diesem Mosaik gibt es zwei verschiedene Steinformen: Quadrate und Rhomben.
Alle Steine haben die gleich langen Seiten x.



Den Rand bilden zwei Quadrat- und zwei Rhombenseiten x sowie 3 Quadratdiagonalen $x \cdot \sqrt{2}$.
Für den 40 cm langen Rand gilt demnach:

$4x + 3 \cdot x \cdot \sqrt{2} = 40\,\text{cm} \qquad |\text{x ausklammern}$

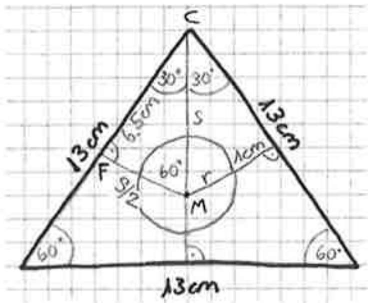
$(4 + 3 \cdot \sqrt{2})x = 40\,\text{cm} \qquad |\text{Klammer berechnen}$

$8.24x = 40\,\text{cm} \qquad |: 8.24 \quad \text{oder } |:(4 + 3 \cdot \sqrt{2})$

$x = 4.85\,\text{cm}$

Die Steine sollten **4.8 - 4.9 cm** lange Seiten haben.

F258 M ist der Mittelpunkt der kreisförmigen Vertiefung.



Wir berechnen als Erstes den Abstand FM von M zum Rand des Glastellers.
FMC ist ein halbes gleichseitiges Dreieck mit der Seite MC und der Höhe FC = 6.5 cm. FM ist **halbe** Seite.

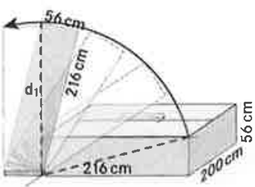
$FM \cdot \sqrt{3} = 6.5\,\text{cm} \qquad |: \sqrt{3}$

$FM = 6.5\,\text{cm} : \sqrt{3} = 3.752\ldots\,\text{cm} \approx 3.75\,\text{cm}$

Der Radius r der Vertiefung ist 1 cm kleiner: $r = FM - 1\,\text{cm} \approx 2.75\,\text{cm}$

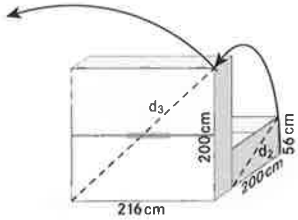
Die Vertiefung muss einen Durchmesser von **5.5 cm** haben.

F259



Der Versuch, den Schrank direkt so aufzurichten, dass er richtig steht, schlägt fehl. Die obere vordere Kante steht an der Decke an. Beim Aufrichten, wird der Schrank höher, als wenn er steht. Die maximale Höhe beansprucht er, wenn die Diagonale d_1 senkrecht steht. $d_1 = \sqrt{216^2 + 56^2}\,\text{cm} \approx$ **223.14 cm**

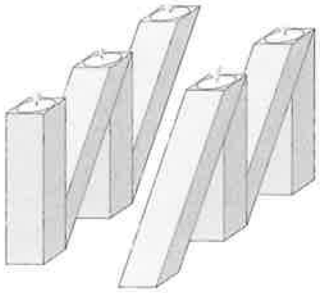
Ein Versuch, den Schrank zuerst auf die Seite zu legen und dann aufzurichten, schlägt erst recht fehl.
Er lässt sich zwar auf die Seite legen:
$d_2 = \sqrt{200^2 + 56^2}\,\text{cm} \approx$ **207.69 cm**,
aber definitiv nicht aufrichten:
$d_3 = \sqrt{200^2 + 216^2}\,\text{cm} \approx$ **294.37 cm**



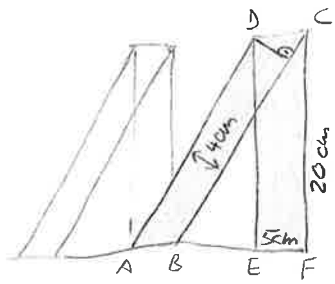
Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

Rat
Nochmals auseinandernehmen und stehend montieren.

F260 **a** **Lösungsidee 1:**



Wenn man die Länge der schräg verlaufenden Kante BC kennt, so kann man die Abstände zwischen den Fusskanten berechnen.
Die Kante BC lässt sich mit Hilfe der Fläche berechnen: Das Rechteck EFCD und das Rhomboid ABCD haben die gemeinsame Seite CD und die gleiche Höhe von 20 cm. Vom Rhomboid kennt man zusätzlich die Höhe auf der Seite BC.



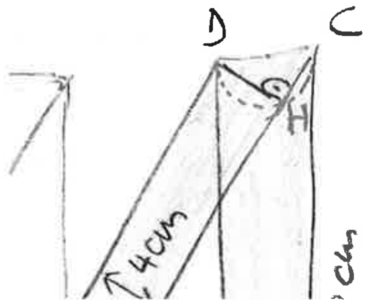
$A_{\text{▱}ABCD} = A_{\square EFCD} = 5\,\text{cm} \cdot 20\,\text{cm} = 100\,\text{cm}^2$
anderseits gilt auch:
$A_{\text{▱}ABCD} = BC \cdot 4\,\text{cm}$ also: $BC = 25\,\text{cm}$

Damit lässt sich BF berechnen: $BF = \sqrt{BC^2 - FC^2} = \sqrt{25^2 - 20^2}\,\text{cm} = 15\,\text{cm}$

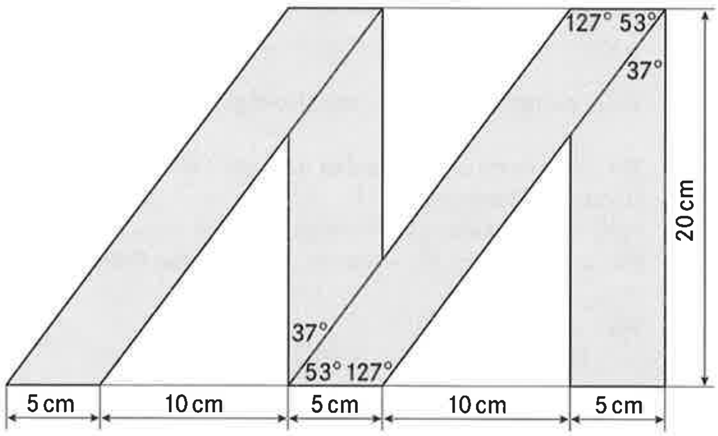
Der Abstand BE zwischen den Fusskanten misst 15 cm - 5 cm = **10 cm**.

Fehlerhinweis:
In der 1. Auflage des Aufgabenbuches hat sich leider bei dieser Aufgabe im Text die Angabe der Höhe davongeschlichen. Walter Müller will **20 cm hohe** Teelichter-Ständer herstellen!

Lösungsidee 2:
Walter Müller könnte seine Pläne auch massgetreu konstruieren und dann den Abstand messen:
- Rechteck EFCD
- Thaleskreis über DC schneiden mit k(D, r = 4 cm)
  → H
- CH verlängern und mit der «Bodenlinie» schneiden
  → B



b Die Winkel kann Walter Müller in den Plänen messen:



Wenn er sich auch an den Geometrie-Stoff eines höheren Schuljahres erinnert, kann er die Winkel auch berechen. Er erhält dann: 36.9°, 53.1° und 126.9°.

F261 **a** Zu berechnen: durchschnittliche Steigung

Höhendifferenz = 786 m
Effektive Länge = 1369 m
Horizontaldistanz = $\sqrt{1369^2 - 786^2}$ m
= 1120.8768... m

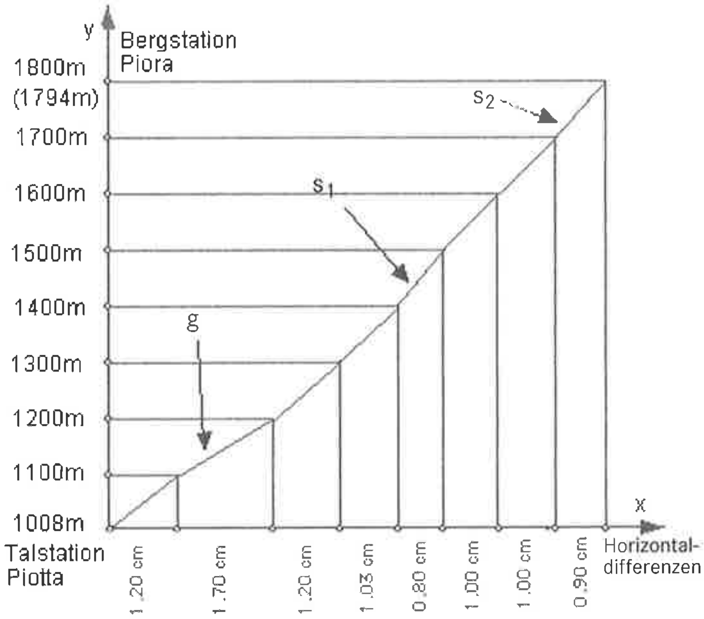
$$\text{Steigung} = \frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Horizontaldistanz}} = \frac{786\,\text{m}}{1\,120.88\,\text{m}} = 0.701 = 70.1\%$$

Die durchschnittliche Steigung beträgt **70.1%.**

b Die durchschnittliche Steigung und die maximale Steigung sind nicht dasselbe.
Der durchschnittlichen Steigung entspricht ein ideales «Steigungsdreieck» mit gleichmässigem Anstieg der effektiven Länge.

Eine Bahn mit solch regelmässigem Anstieg gibt es aber in Wirklichkeit kaum. Es ist gut möglich, dass eine Bahn im Gebirge nach einem relativ flachem Gelände plötzlich eine Felswand überwinden muss.
So ist es durchaus glaubhaft, dass die maximale Steigung 87.8 % ist.

c Je enger Höhenkurven auf einer Karte aufeinander folgen, desto steiler ist das Gelände.
Beim Betrachten der Höhenkurven erkennt man eine geringere Steigung im unteren Teil (g) und eine stärkere Steigung bei etwa 1400 Höhenmetern (s_1) und kurz vor der Endstation Piora (s_2).
Das folgende Diagramm, das auf Messungen in der Karte beruht, bestätigt dies.



Ungefähre Steigungen (Berechnung analog zu **d**)
g ≈ 47.06%, **s_1 ≈ 100.0%**, **s_2 ≈ 88.89%**
Bei s_1 und s_2 dürfte die Bahn die max. Steigung von 87.8% haben. Die zu hohen berechneten Werte beruhen auf der «groben» Datenentnahme in der Karte.

Steigung – Gefälle
Steigung und Gefälle sind zwei Worte für dasselbe. Sie unterscheiden sich nur durch die «Blickrichtung»: Bei einer Bahn imponiert es, dass sie steil nach oben führt. In einer Wasserleitung fliesst das Wasser immer abwärts.

d Druckleitungen werden aus Kostengründen auf möglichst kurzem Weg verlegt.
Aus der Karte ist ersichtlich, dass die Strasse um einen Bergrücken führt. Somit ist für die Rohrlegung ein direkter Weg durch den Berg sinnvoll. Dass die Rohre nicht geradlinig verlegt werden konnten, hat vermutlich mit der Gesteinsart (teils sehr hart) zu tun.

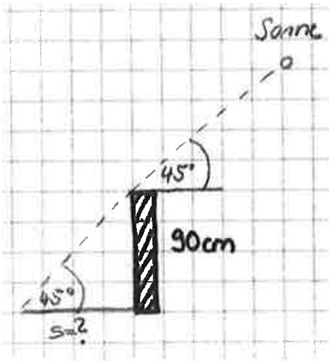
Gefälle

Höhendifferenz:	1851 m − 1794 m =	57 m
Auf der auf 200% vergrösserten Karte entnommene Horizontaldistanz		6 cm
Entspricht auf der 1:25 000-er Karte in 100%		3 cm
In Wirklichkeit	3 · 250 m =	750 m

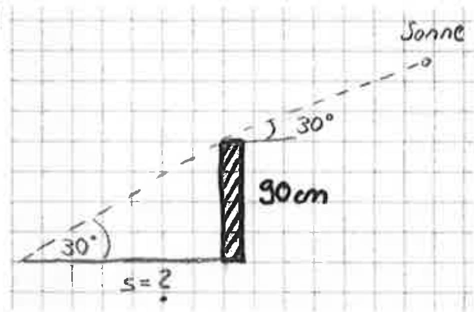
$$\text{Gefälle} = \frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Horizontaldistanz}} = \frac{57\,\text{m}}{750\,\text{m}} = 0.076 = \mathbf{7.6\%}$$

F262 ■ Pfosten und Schatten bilden ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck.
Der Schatten ist genau gleich lang wie der Pfosten.

Schattenlänge s = **90 cm**



b

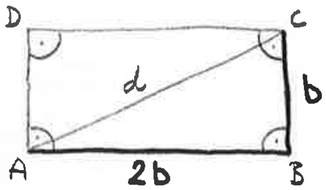


Pfosten und Schatten bilden ein halbes gleichseitiges Dreieck:
Pfosten = **halbe** Seite = 90 cm,
Schatten = Höhe.
Schattenlänge s = 90 cm · $\sqrt{3}$ = **155.88 cm**

F263 Breite = b
Länge = 2b

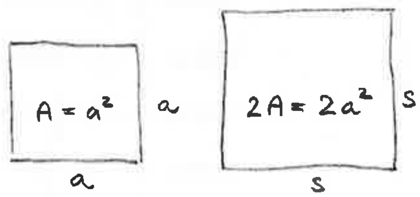
Diagonale **d** = $\sqrt{b^2+(2b)^2} = \sqrt{b^2+4b^2} = \sqrt{5b^2} = \mathbf{b\cdot\sqrt{5}}$

Fläche **A** = 2b · b = 2 b^2



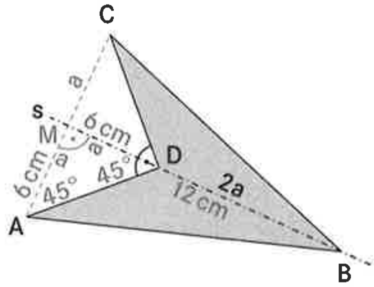
F264 Ursprüngliches Quadrat:
Seite a
Fläche A = a^2

Quadrat mit doppelter Fläche:
Seite s
Fläche $s^2 = 2a^2$
$s = a\cdot\sqrt{\mathbf{2}}$



Die Seite a muss mit dem Faktor $\sqrt{\mathbf{2}}$ ≈ **1.414** vergrössert werden.

F265 Das Dreieck ADM ist rechtwinklig-gleichschenklig.



■ a = 6 cm AM = MD = 6 cm MB = 18 cm

Umfang u:
AD = 6 cm · $\sqrt{2}$ = 8.485... cm ≈ 8.49 cm
AB = $\sqrt{6^2+18^2}$ cm = 18.973... cm ≈ 18.97 cm
BC = AB CD = AD

u = 2 · AD + 2 · AB ≈ **54.92 cm**

Fläche A:
Beispielsweise: **A** = 2 · $A_{\triangle DBC}$ = 2 · 12 cm · 6 cm : 2 = **72 cm²** (DB = Seite, MC = Höhe)

■ a AM = MD = a MB = 3a

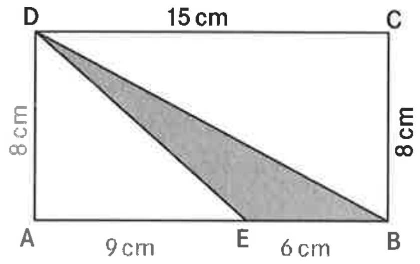
Umfang u:
AD = CD = $a\cdot\sqrt{2}$
AB = BC = $\sqrt{a^2+(3a)^2} = \sqrt{10a^2} = a\cdot\sqrt{10}$

Fläche A:
A = 2 · $A_{\triangle DBC}$ = 2 · 2a · a : 2 = **2a²**

u = 2 · AD + 2 · AB = 2 · a · $\sqrt{2}$ + 2 · a · $\sqrt{10}$ = $\mathbf{2a(\sqrt{2}+\sqrt{10})}$ oder ≈ **9.15a**

F266 Fläche des Rechtecks:

$A_{\square} = 15\,cm \cdot 8\,cm = 120\,cm^2$



Fläche des Dreiecks EBD:

$A_{\triangle EBD} = 120\,cm^2 : 5 = 24\,cm^2$

Es gilt auch:

$A_{\triangle EBD} = EB \cdot 8\,cm : 2$ (EB= Seite, 8 cm = Höhe)

$= EB \cdot 4\,cm$

und damit **EB = 6 cm**

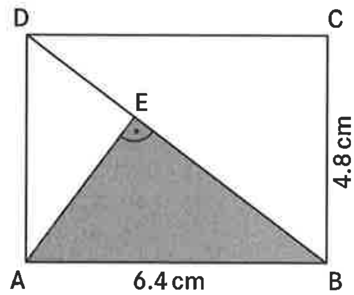
$AE = 15\,cm - 6\,cm = 9\,cm$

$\mathbf{ED} = \sqrt{9^2 + 8^2}\,cm = 12.041...\,cm \approx \mathbf{12.04\,cm}$

$\mathbf{BD} = \sqrt{15^2 + 8^2}\,cm = \mathbf{17\,cm}$

$\mathbf{u} = EB + BD + DE \approx \mathbf{35.04\,cm}$

F267 Zu berechnen: DE, AE, BE, $A_{\triangle ABE}$, $A_{\triangle AED}$



DB $\quad DB = \sqrt{4.8^2 + 6.4^2}\,cm = 8\,cm$

AE Mit Hilfe der Fläche:

$A_{\triangle ABD} = AB \cdot BC : 2$

$= 6.4\,cm \cdot 4.8\,cm : 2 = 15.36\,cm^2$

auch $BD \cdot AE : 2 = A_{\triangle ABD}$

$8\,cm \cdot AE : 2 = 15.36\,cm^2 \quad | \cdot 2 : 8\,cm$

$\mathbf{AE} = 15.36\,cm^2 \cdot 2 : 8\,cm$

$= \mathbf{3.84\,cm}$

BE $\quad \mathbf{BE} = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{6.4^2 - 3.84^2}\,cm = \mathbf{5.12\,cm}$

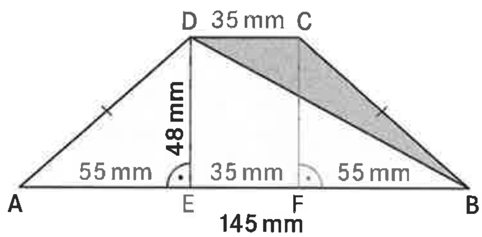
DE $\quad \mathbf{DE} = DB - BE = 8\,cm - 5.12\,cm = \mathbf{2.88\,cm}$

$\mathbf{A_{\triangle ABE}} \quad \mathbf{A_{\triangle ABE}} = AE \cdot BE : 2 = 3.84\,cm \cdot 5.12\,cm : 2 \approx \mathbf{9.83\,cm^2}$

$\mathbf{A_{\triangle AED}} \quad \mathbf{A_{\triangle AED}} = AE \cdot DE : 2 = 3.84\,cm \cdot 2.88\,cm : 2 \approx \mathbf{5.53\,cm^2}$

Kontrolle: $A_{\triangle ABE} + A_{\triangle AED} = 9.83\,cm^2 + 5.53\,cm^2 = 15.36\,cm^2 = A_{\triangle ABD}$ ✓

F268 $A_{⏢} = 4\,320\,mm^2$ zu berechnen: u_{DBC}, A_{DBC}



$A_{⏢} = m \cdot h$

$4\,320\,mm^2 = m \cdot 48\,mm \quad |: 48\,mm$

$\mathbf{m} = 4\,320\,mm^2 : 48\,mm$

$= \mathbf{90\,mm}$

$AB = 145\,mm \quad m = 90\,mm \quad \Rightarrow \quad \mathbf{DC = 35\,mm}$

$AE = FB = (145\,mm - 35\,mm) : 2 = 55\,mm$

$EB = 35\,mm + 55\,mm = 90\,mm$

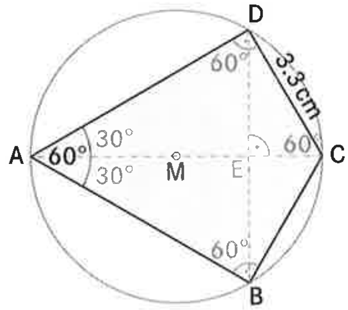
$\mathbf{DB} = \sqrt{EB^2 + ED^2} = \sqrt{90^2 + 48^2}\,mm = \mathbf{102\,mm}$

$\mathbf{BC} = \sqrt{FB^2 + FC^2} = \sqrt{55^2 + 48^2}\,mm = \mathbf{73\,mm}$

$\mathbf{u_{DBC}} = DC + DB + BC = 35\,mm + 102\,mm + 73\,mm = \mathbf{210\,mm}$

$\mathbf{A_{DBC}} = DC \cdot h : 2 = 35\,mm \cdot 48\,mm : 2 = \mathbf{840\,mm^2}$

F269 Zu berechnen: AD und BD



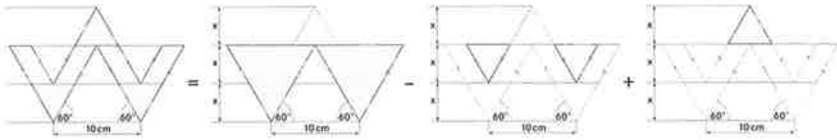
Das Dreieck ABD ist ein gleichseitiges Dreieck:
AD = AB = BD

Das Dreieck ECD ist ein halbes gleichseitiges Dreieck:

Seite	CD = 3.3 cm
halbe Seite	EC = 1.65 cm
Höhe	DE = 1.65 cm · $\sqrt{3}$ = 2.857... cm

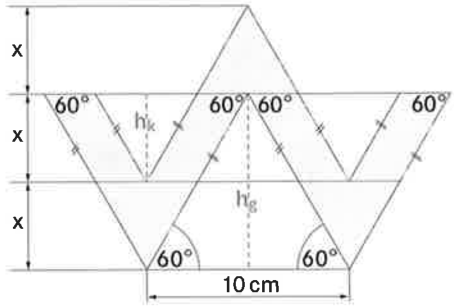
BD = 2 · DE ≈ **5.72 cm** **AD** = BD ≈ **5.72 cm**

F270 Lösungsidee:



$A_W = 2 \cdot A_{\triangle gross} - 2 \cdot A_{\triangle klein} + A_{\triangle klein}$
$\quad = 2 \cdot A_{\triangle gross} - A_{\triangle klein}$

Alle Dreiecke sind gleichseitig.
Die grossen haben eine Seitenlänge von 10 cm und eine Höhe h_g = 5 cm · $\sqrt{3}$ = 8.660... cm.
Die kleinen haben eine Seitenlänge von 5 cm und eine Höhe h_k = 2.5 cm · $\sqrt{3}$ = 4.330... cm.

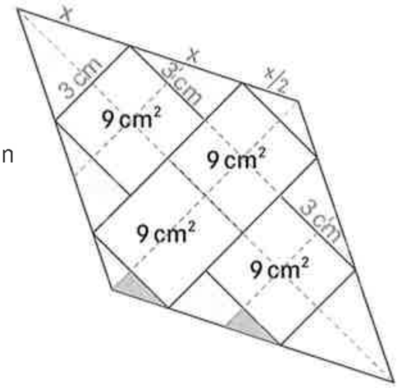


$A_{\triangle gross}$ = 10 cm · h_g : 2 = 43.301... cm^2
≈ 43.3 cm^2

$A_{\triangle klein}$ = 5 cm · h_k : 2 = 10.825... cm^2
≈ 10.83 cm^2

$A_W = 2 \cdot A_{\triangle gross} - A_{\triangle klein} \approx$ **75.78 cm²**

F271 Die grossen grauen Dreiecke sind alle kongruent:
Sie haben gleich grosse Winkel und mind. eine gleich lange Seite.
Die kleinen grauen Dreiecke sind aus demselben Grund ebenfalls kongruent zueinander und kongruent zur «oberen Hälfte» des grossen Dreiecks (siehe 2 dunkelgraue △).

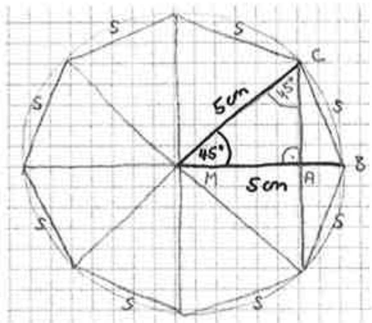


Eine Seite s des Rhombus setzt sich damit aus 2.5x zusammen, wobei

$x = \sqrt{3^2 + 1.5^2}$ cm = 3.354... cm

Und damit: **s** = 2.5x ≈ **8.39 cm**

F272 r = 5 cm s = ?



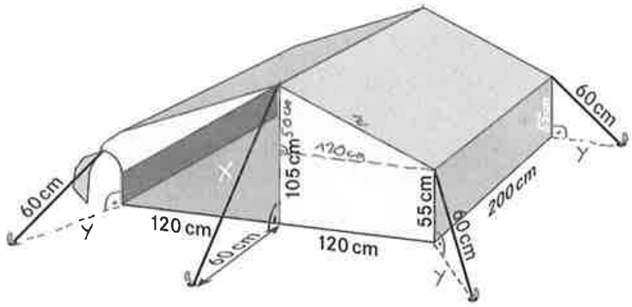
Das Dreieck MAC ist rechtwinklig-gleichschenklig.

MC = AC · $\sqrt{2}$ = 5 cm
somit: **AC** = 5 cm : $\sqrt{2}$ = 3.535... cm

MB = 5 cm MA = AC **AB** = 5 cm − MA = 1.464... cm

s = CB = $\sqrt{AB^2 + AC^2} \approx$ **3.83 cm**

F273 ■ $x = \sqrt{105^2 + 60^2}$ cm ≈ **120.93 cm**



Die Zeltschnur sollte mindestens **121 cm** lang sein.

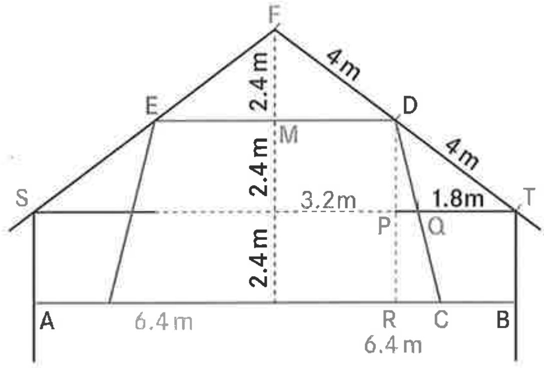
■ $y = \sqrt{60^2 - 55^2}$ cm ≈ **23.98 cm**

Die Eckschnüre mussen in **24cm** Abstand zur Ecke befestigt werden.

■ $z = \sqrt{120^2 + 50^2}$ cm ≈ **130 cm**

Zeltblache: **Länge** = 2·55 cm + 2·z = 2·55 cm + 2·130 cm = 370 cm = **3.7 m**
Breite = **2 m**
Fläche = 3.7 m · 2 m = **7.4 m²**

F274 Zu berechnen: AB, CD, ED und CB



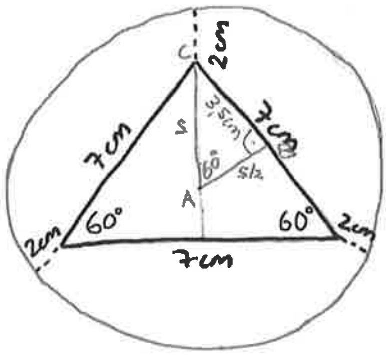
ED MD = $\sqrt{4^2 - 2.4^2}$ m = 3.2 m
ED = 2 · MD = **6.4 m**

AB ED ist Mittellinie im Dreieck STF
AB = ST = 2 · ED = **12.8 m**

CD PQ = 6.4 m − 3.2 m − 1.8 m
= 1.4 m
PQ ist Mittellinie im Dreieck RCD
RC = 2 · PQ = 2.8 m
CD = $\sqrt{4.8^2 + 2.8^2}$ ≈ **5.57 m**

CB CB = RB − RC = 3.2 m − 2.8 m = **0.4 m**

F275 Zu berechnen: Durchmesser des Tellers



ABC ist ein halbes gleichseitiges Dreieck.
AC = Seite = s
BC = Höhe = 3.5 cm

$\frac{s}{2} \cdot \sqrt{3}$ = 3.5 cm $|\cdot 2 : \sqrt{3}$
s = 3.5 cm · 2 : $\sqrt{3}$ = 4.041... cm

Radius = s + 2 cm
Durchmesser = 2·(s + 2 cm) ≈ **12.08 cm**

Die Kerzenteller müssen eine Durchmesser von mindestens **12.1 cm** haben. Tami würde sich sicher auch mit **12 cm** begnügen.

F276 ■ Länge des Stollens:

Höhendifferenz:	1900 m − 1859 m = 41 m
Auf der Karte gemessene Horizontaldistanz	10.1 cm
In Wirklichkeit	10.1 · 250 m = 2 525 m

Länge des Stollens = $\sqrt{41^2 + 2525^2}$ m = 2525.33 m ≈ **2525 m**

■ **Durchschnittliches Gefälle** = $\frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Horizontaldistanz}} = \frac{41\text{ m}}{2525\text{ m}}$ = 0.016 = **1.6%**

F3 Pythagoras im Raum – Schnittfiguren von Würfel und Quader

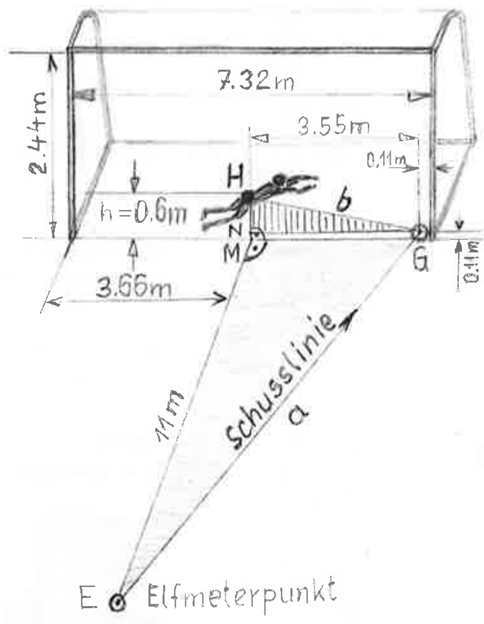
F31 **Vorgaben**:
- Das Fussballtor ist 7.32 m breit und 2.44 m hoch.
- Der Elfmeterpunkt ist 11 m von der Mitte der Torlinie entfernt.
- Die Hände des Goalis sind in Wartestellung 60 cm über dem Boden.
- Der Ball fliegt mit einer mittleren Geschwindigkeit von 26 m/s .
- Die Reaktionszeit des Torhüters ist 0.25 s.
- Der Balldurchmesser beträgt 22 cm.

Diese 3 Angaben können **variiert** werden. Wir haben sie willkürlich so angenommen.

Weitere Annahmen, die wir für unsere **Lösungsvorschläge** getroffen haben:
- Der Goalie soll den Ball mit beiden Händen umfassen.
- Wir lassen bei den Hechtsprüngen des Goalies die Gravitation ausser Acht.
- Für die gestreckten Arme rechnen wir mit einer Länge von 90cm (Verkürzung des Weges)
- Der Goalie darf erst dann reagieren, wenn der Ball angestossen wird.

a Flachschuss direkt neben den vorderen Torpfosten

Lösungsidee 1:
Wir arbeiten in 2 Schritten.
1. Wir berechnen, wie lang der Ball braucht, bis er in G landet.
2. Wir berechnen, mit welcher Geschwindigkeit der Goalie dorthin springen müsste, um den Ball mit beiden Händen zu umfassen.
   Wir vernachlässigen dabei die gleichzeitige Bewegung von Armen und Körper. Wir berechnen die Geschwindigkeit, den der Körper**mittelpunkt** zurücklegen muss, damit der Goalie den Ball mit **ausgestreckten** Armen fassen kann.



1. Weg, den der Ball zurücklegt = EG
   EG ist Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks EGM auf dem Rasen.
   EM = 11 m
   MG = Halbe Torbreite - Ballradius
   = 3.66 m - 0.11 m = 3.55 m
   EG = $\sqrt{11^2 + 3.55^2}$ m ≈ 11.56 m

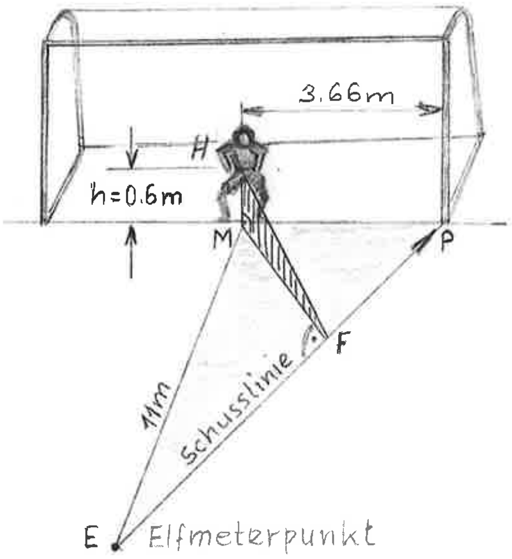
   Flugzeit des Balls = t
   v = 26 m/s   s = EG
   v = s : t |·t : v
   t = s : v ≈ 11.56 m : 26 m/s ≈ **0.44s**

2. Weg, den der Goalie (Körpermittelpunkt) zurücklegen muss:
   b = Länge vom Mittelpunkt der Warteposition H bis zum Mittelpunkt G des Balls
   b ist Hypotenuse im senkrecht stehenden Dreieck NGH.
   NG = MG = 3.55 m
   NH = Höhe der Hände in Wartestellung (Körpermittelpunkt) - Ballradius
   = 0.6 m - 0.11 m = 0.49 m
   b = HG = $\sqrt{0.49^2 + 3.55^2}$ m ≈ 3.58 m

   Abzüglich der Armlänge von 0.9 m verbleiben: 2.68 m.
   Zuzüglich Ballradius (0.11m) für das Umfassen: **2.79 m**.

Bei einer Reaktionszeit von 0.25 s bleiben dem Goalie 0.44 s - 0.25 s = **0.19 s** Zeit, um den Ball zu fassen.
Geschwindigkeit des Torhüters:
$v = s : t \approx 2.79\,m : 0.19\,s \approx$ **14.68 m/s ≈ 52.86 km/h**

Lösungsidee 2:
Der Goalie wählt bei der Abwehr des Flachschusses den kürzeste Weg zur Fluglinie des Balls.
Wir **vernachlässigen** in dieser Rechnung den **Ballradius**.



Wir arbeiten wieder in 2 Schritten.
1. Wir berechnen, wie lang der Ball braucht, bis er in F vorbei kommt.
2. Wir berechnen, mit welcher Geschwindigkeit der Goalie dorthin springen müsste, um den Ball abzuwehren. Wir vernachlässigen dabei die gleichzeitige Bewegung von Armen und Körper. Wir berechnen die Geschwindigkeit, den der Körper**mittelpunkt** zurücklegen muss, damit der Goalie den Ball (Mittelpunkt) mit **ausgestreckten** Armen abwehren kann.

1. Weg, den der Ball zurücklegt = EF
   Für die Berechnung von EF benötigen wir EP und MF. MF ist Höhe im Bodendreieck EPM und kann mit Hilfe der Fläche berechnet werden.
   EP ist Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks EPM auf dem Rasen.
   $EM = 11\,m$
   MP = Halbe Torbreite = $3.66\,m$
   $EP = \sqrt{11^2 + 3.66^2}\,m \approx 11.59\,m$
   $$\left.\begin{array}{l} A_{EPM} = 11\,m \cdot 3.66\,m : 2 = 20.13\,m^2 \\ A_{EPM} \approx 11.59\,m \cdot MF : 2 \end{array}\right\} \Rightarrow MF \approx 20.13 \cdot 2 : 11.59\,m \approx 3.47\,m$$

   $EF = \sqrt{11^2 - 3.47^2}\,m \approx 10.44\,m$

   Flugzeit des Balls = t
   $v = 26\,m/s \qquad s = EF$
   $v = s : t \qquad | \cdot t : v$
   $\mathbf{t} = s : v \approx 10.44\,m : 26\,m/s \approx$ **0.40s**

2. Weg, den der Goalie (Körpermittelpunkt) zurücklegen muss:
   HF = Länge vom Mittelpunkt der Warteposition H bis zum Mittelpunkt F des Balls
   HF ist Hypotenuse im senkrecht stehenden Dreieck MFH.
   MH = Höhe der Hände in Wartestellung (Körpermittelpunkt) = 0.6 m
   $HF = \sqrt{0.6^2 + 3.47^2}\,m \approx 3.52\,m$

   Abzüglich der Armlänge von 0.9 m verbleiben: 2.62 m.

   Bei einer Reaktionszeit von 0.25 s bleiben dem Goalie 0.40 s - 0.25 s = **0.15 s** Zeit, um den Ball bei F abzuwehren.
   Geschwindigkeit des Torhüters:
   $v = s : t \approx 2.62\,m : 0.15\,s \approx$ **17.47 m/s ≈ 62.88 km/h**

   Der Goalie müsste eine noch grössere Geschwindigkeit aufbringen, als wenn er zum Pfosten springt.

Kommentar
Es ist unwahrscheinlich, dass der Goalie eine Geschwindigkeit von über 50 km/h oder im zweiten Fall gar über 60 km/h erreichen kann. →

b Schuss in den oberen Torwinkel

Lösungsidee:

Wir arbeiten wiederum in 2 Schritten.

1. Wir berechnen, wie lang der Ball braucht, bis er in K eintrifft.
2. Wir berechnen, mit welcher Geschwindigkeit der Goalie dorthin springen müsste, um den Ball mit beiden Händen zu umfassen.
   Wir vernachlässigen dabei die gleichzeitige Bewegung von Armen und Körper. Wir berechnen die Geschwindigkeit, den der Körper**mittelpunkt** zurücklegen muss, damit der Goalie den Ball mit **ausgestreckten** Armen fassen kann.

1. Weg, den der Ball zurücklegt = EK

EK ist Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks EGK, das senkrecht auf dem Rasen steht.

EM = 11 m

MG = Halbe Torbreite - Ballradius
= 3.66 m - 0.11 m = 3.55 m

EG = $\sqrt{11^2+3.55^2}$ m ≈ 11.56 m

GK = Torhöhe - 2 mal Ballradius
= 2.44 m - 2 · 0.11 m = 2.22 m

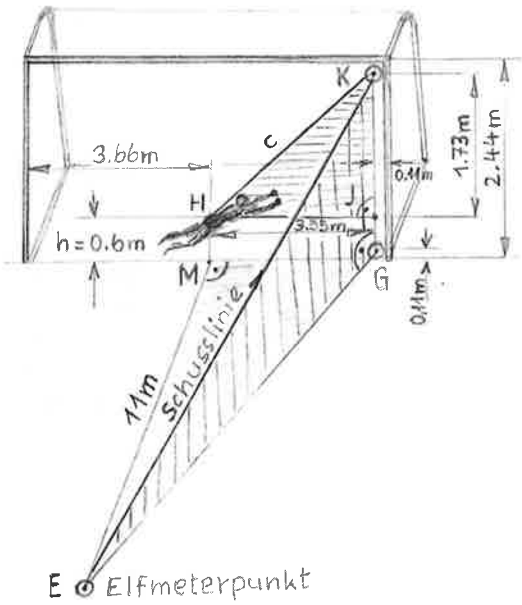
EK = $\sqrt{EG^2+GK^2}$ m ≈ 11.77 m

Flugzeit des Balls = t

v = 26 m/s   s = EK

v = s : t |·t : v

t = s : v ≈ 11.77 m : 26 m/s ≈ **0.45 s**



2. Weg, den der Goalie (Körpermittelpunkt) zurücklegen muss:

c = Länge vom Mittelpunkt der Warteposition H bis zum Mittelpunkt K des Balls

c ist Hypotenuse im senkrecht stehenden Dreieck HJK.

HJ = MG = 3.55 m

JK = Torhöhe - Höhe der Hände in Wartestellung (Körpermittelpunkt) - Ballradius
= 2.44 m - 0.6 m - 0.11 m = 1.73 m

c = HK = $\sqrt{1.73^2+3.55^2}$ m ≈ 3.95 m

Abzüglich der Armlänge von 0.9 m verbleiben: 3.05 m.
Zuzüglich Ballradius (0.11 m) für das Umfassen: **3.16 m**.

Bei einer Reaktionszeit von 0.25 s bleiben dem Goalie 0.45 s - 0.25 s = **0.20 s** Zeit, um den Ball zu fassen.

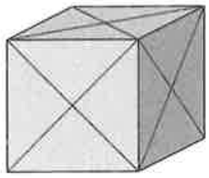
Geschwindigkeit des Torhüters:

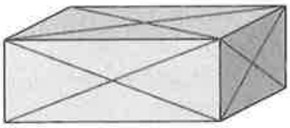
v = s : t ≈ 3.16 m : 0.20 s ≈ **15.8 m/s ≈ 56.88 km/h**

Kommentar:

Es ist unwahrscheinlich, dass der Goalie eine Geschwindigkeit von über 50km/h erreichen und mit dem Sprung eine derartig hohe Leistung vollbringen kann. Man hat gemessen, dass ein 75 kg schwerer, gut trainierter Torwart bei einem Sprung in 60 cm Höhe eine Geschwindigkeit von 3 m/s bis 4 m/s erreicht.
Deshalb sind so präzis platzierte «Elfmeter» kaum zu halten, es sei denn, der Goalie darf vorzeitig reagieren. Die neuen Regeln erlauben dies tatsächlich.

F32 **a** Beim Würfel sind **alle** Flächendiagonalen **gleich lang**. Seine Oberfläche besteht ja aus 6 kongruenten Quadraten.

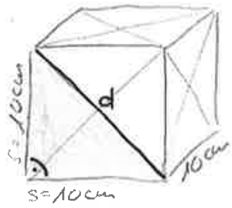


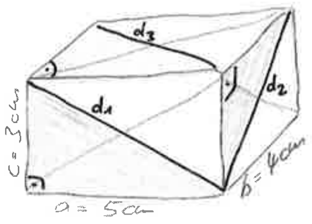
b 

Bei einem allgemeinen Quader mit Kanten in drei verschiedenen Längen gibt es auch **drei verschieden lange** Flächendiagonalen. Seine Oberfläche besteht dann nämlich aus 3 verschieden grossen Flächen, die paarweise vorkommen.

Ist aber ein Flächenpaar quadratisch, dann kommen nur Flächendiagonalen in zwei verschiedenen Längen vor.

F33 **a** $\mathbf{d} = 10\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} \approx \mathbf{14.14\,cm}$



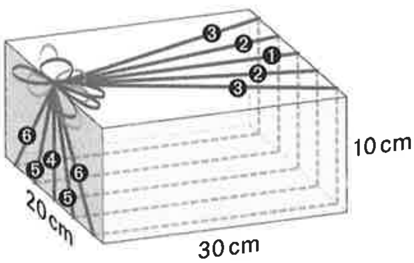
b 

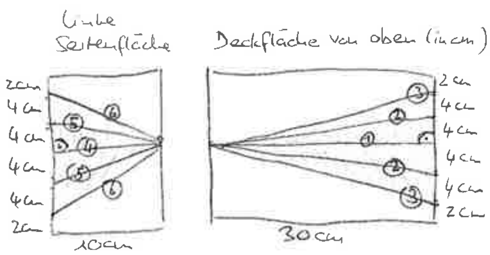
$\mathbf{d_1} = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{5^2 + 3^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{5.83\,cm}$

$\mathbf{d_2} = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}\,\text{cm} = \mathbf{5\,cm}$

$\mathbf{d_3} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 4^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{6.40\,cm}$

F34





Die Bänder haben zueinander 4 cm Abstand, zuäusserst bleibt je 2 cm.

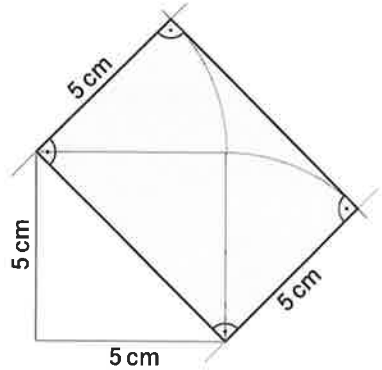
Band		Länge	Anzahl	Gesamtlänge
auf der Bodenfläche		30 cm	5	150 cm
auf der rechten Seitenfläche		10 cm	5	50 cm
auf der Deckfläche	❶	30 cm	1	30 cm
	❷	$\sqrt{30^2 + 4^2}$ cm = 30.265… cm	2	≈ 60 cm
	❸	$\sqrt{30^2 + 8^2}$ cm = 31.048… cm	2	≈ 62 cm
auf der linken Seitenfläche	❹	10 cm	1	10 cm
	❺	$\sqrt{10^2 + 4^2}$ cm = 10.770… cm	2	≈ 22 cm
	❻	$\sqrt{10^2 + 8^2}$ cm = 12.806… cm	2	≈ 26 cm
Masche		100 cm	1	100 cm
Gesamte Bandlänge				**510 cm**

Will man wirklich 1 m Band für die Masche benützen, so brauchte es mindestens **5.1 m.**
Gibt es ein besondes schönes Band auf einer 5m-Rolle, so würde dies sicherlich auch genügen.

F35 ■ Die Schnittfigur ist ein **Rechteck**.

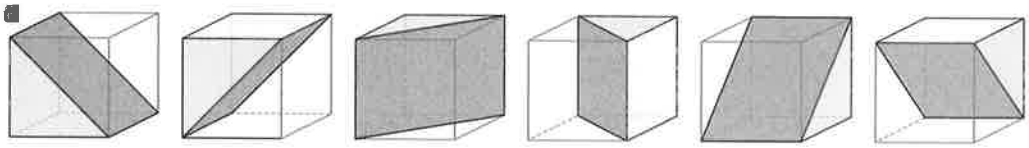
■ Die eine Rechteckseite ist Diagonale eines Oberflächenquadrates. Die andere hat die gleiche Länge wie eine Seite.
Um die Schnittfigur zu zeichnen, beginnt man deshalb am bequemsten mit einem Quadrat und zeichnet dann das Rechteck über der Diagonalen.

Die Figur ist rechts im **Massstab 1 : 2** abgedruckt.



■ Kurze Rechteckseite = **5 cm**
Lange Rechtecksseite = 5 cm · $\sqrt{2}$ = 7.071... cm ≈ **7.07 cm**
Fläche = 5 cm · 5 cm · $\sqrt{2}$ ≈ **35.36 cm²**

■

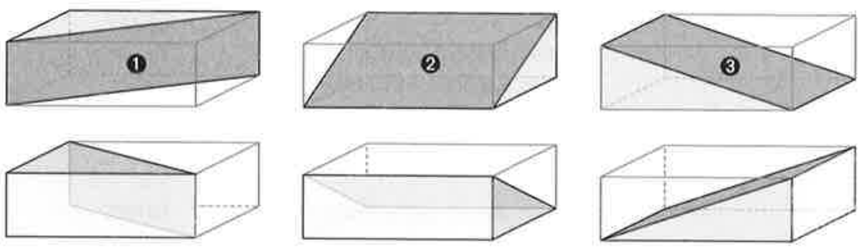


F36 ■ In einer räumlichen Darstellung müssen die drei Dimensionen des Raumes mit Hilfe von zwei Dimensionen wiedergegeben werden. Dabei können nicht alle Teile eines Körpers in ihrer wirklichen Form gezeigt werden. Elemente, die in Wirklichkeit nach hinten verlaufen, werden verzerrt dargestellt, damit der Eindruck der Tiefe entsteht.

In einer räumlichen Darstellung eines Würfels sind die Kanten unterschiedlich lang und die Oberflächenquadrate haben unterschiedliche Formen: Die in Wirklichkeit nach hinten verlaufenden Kanten sind verkürzt. Die Seitenflächen sowie die Deck- und die Grundfläche werden als Rhomboide dargestellt.
Die Flächendiagonalen der Seiten-, Grund- und Deckfläche sind in der Darstellung somit Diagonalen eines Rhomboids und deshalb unterschiedlich lang.
Die Schnittlinien, welche die Schnittflächen begrenzen, werden aus denselben Gründen verzerrt wiedergegeben.

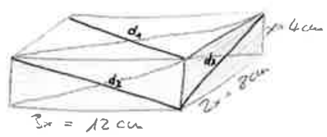
■ Alle (Schnitt-)Linien, die in der Vorder- oder der Rückfläche des Würfels liegen, sind in wirklicher Form und Lage - und bei Massstab 1:1 - auch in wirklicher Grösse dargestellt. Ebenso alle Schnittlinien, die parallel zur Vorder- oder Rückfläche verlaufen.
Auch Schnittflächen, die parallel zur Vorder- oder Rückfläche verlaufen, werden in der wirklichen Form und Grösse abgebildet.

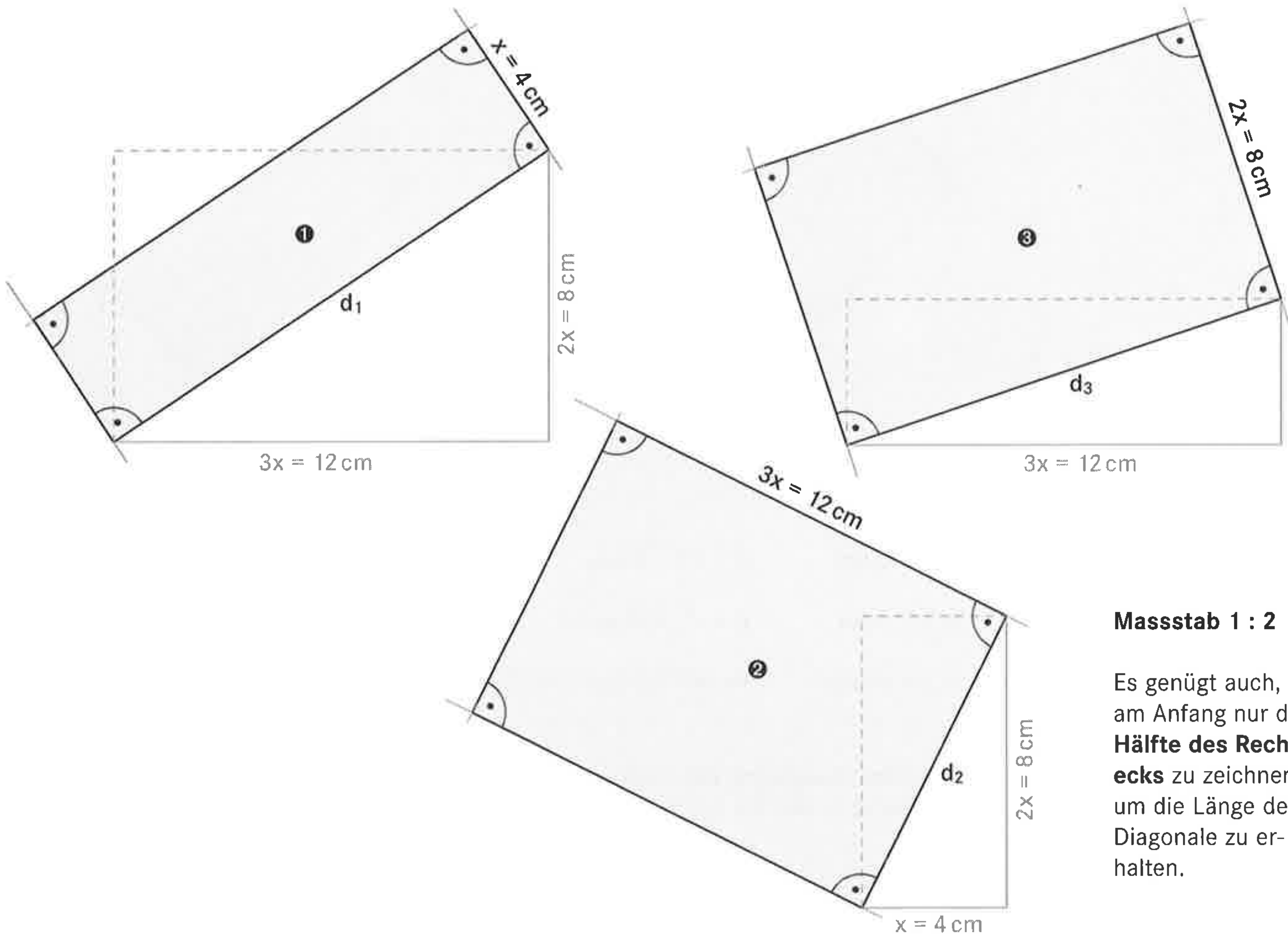
F37 ■



■ Alle Schnittfiguren sind Rechtecke.
Eine Rechteckseite ist jeweils Würfelkante, die andere ist Flächendiagonale.

Um eine Schnittfigur zu zeichnen, beginnt man am bequemsten mit einem Rechteck in der Grösse des Oberflächenrechtecks, in dem die Diagonale liegt. Dann errichtet man über einer seiner Diagonalen das Schnittrechteck in der richtigen Höhe.





Massstab 1 : 2

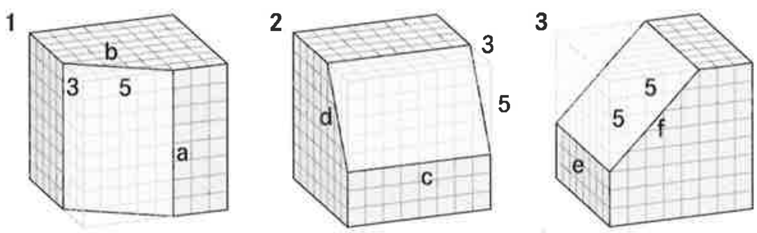
Es genügt auch, am Anfang nur die **Hälfte des Rechtecks** zu zeichnen, um die Länge der Diagonale zu erhalten.

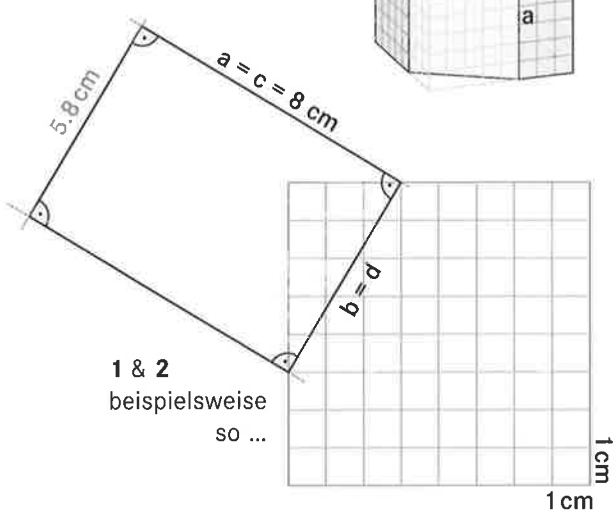
d Rechteck ❶: 1. Seite = Diagonale $d_1 = \sqrt{12^2+8^2}$ cm ≈ **14.42 cm**
2. Seite = Höhe x = **4 cm**

Rechteck ❷: 1. Seite = Diagonale $d_2 = \sqrt{8^2+4^2}$ cm ≈ **8.94 cm**
2. Seite = Länge 3x = **12 cm**

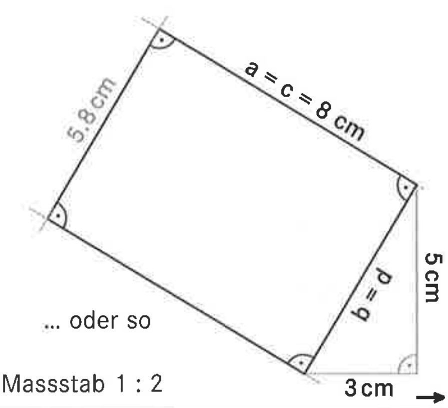
Rechteck ❸: 1. Seite = Diagonale $d_3 = \sqrt{12^2+4^2}$ cm ≈ **12.65 cm**
2. Seite = Länge 2x = **8 cm**

F38 **a** Alle drei Schnittflächen sind Rechtecke.





1 & **2** beispielsweise so …

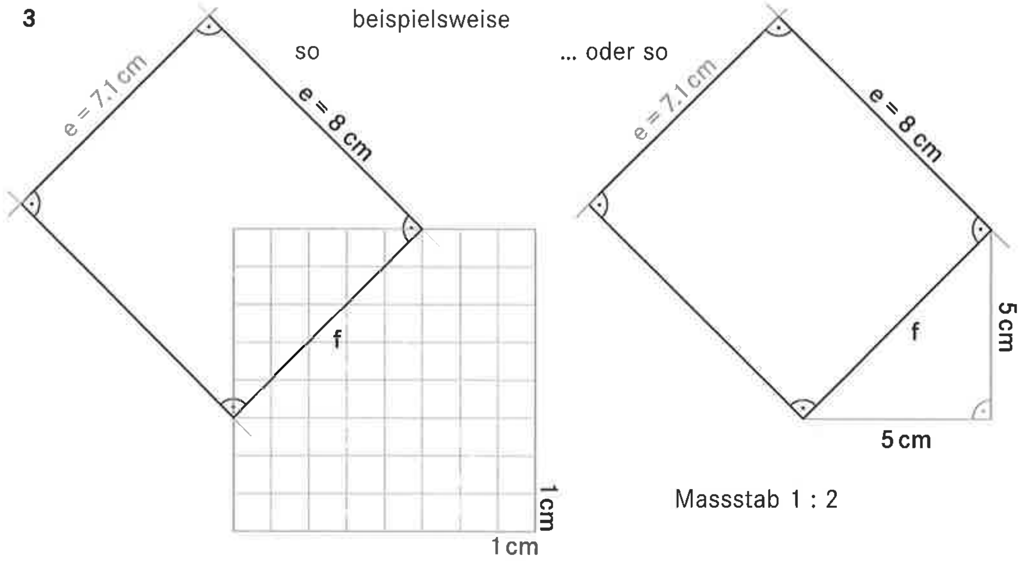


… oder so

Massstab 1 : 2

Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

→ **3**



a **1** **a = 8 cm** $\quad b = \sqrt{5^2 + 3^2}$ cm = 5.830... cm ≈ **5.8 cm** $\quad A_1 = a \cdot b \approx$ **46.65 cm²**

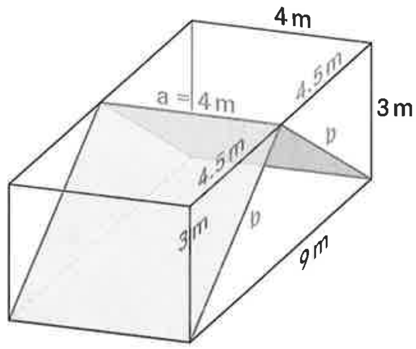
2 **c = 8 cm** $\quad d = \sqrt{5^2 + 3^2}$ cm = 5.830... cm ≈ **5.8 cm** $\quad A_2 = a \cdot b \approx$ **46.65 cm²**

3 **e = 8 cm** $\quad f = \sqrt{5^2 + 5^2}$ cm = 7.071... cm ≈ **7.1 cm** $\quad A_3 = a \cdot b \approx$ **56.57 cm²**

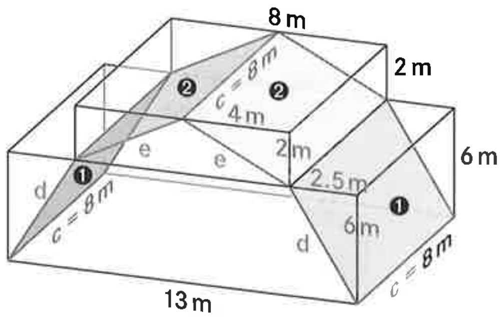
F39 **a** Das Dach besteht aus zwei kongruenten Rechtecksflächen mit den Seiten a und b.

a = 4 m
$b = \sqrt{3^2 + 4.5^2}$ m = 5.408... m ≈ 5.41 m

$A_{Dach} = 2 \cdot a \cdot b =$ **43.27 m²**



b



Das Dach besteht aus
- 2 kongruenten Rechtecksflächen ❶ mit den Seiten c und d sowie
- 2 kongruenten Rechtecksflächen ❷ mit den Seiten c und e.

c = 8 cm
$d = \sqrt{6^2 + 2.5^2}$ m = 6.5 m
$e = \sqrt{2^2 + 4^2}$ m = 4.472... m ≈ 4.47 m

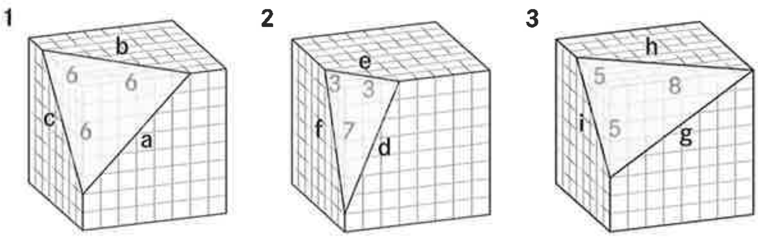
$A_{Dach} = 2 \cdot A_❶ + 2 \cdot A_❷ = 2 \cdot c \cdot d + 2 \cdot c \cdot e = 2c(d + e) \approx$ **175.55 m²**

F310 Arbeitsblatt

F311 **a** **1** **a = b = c**
$= \sqrt{6^2 + 6^2}$ cm
≈ **8.49 cm**

2 **d = f** $= \sqrt{3^2 + 7^2}$ cm
≈ **7.62 cm**

$e = \sqrt{3^2 + 3^2}$ cm
≈ **4.24 cm**



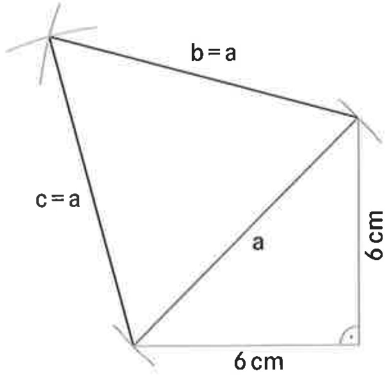
gleichseitiges △ gleichschenkliges △ gleichschenkliges △

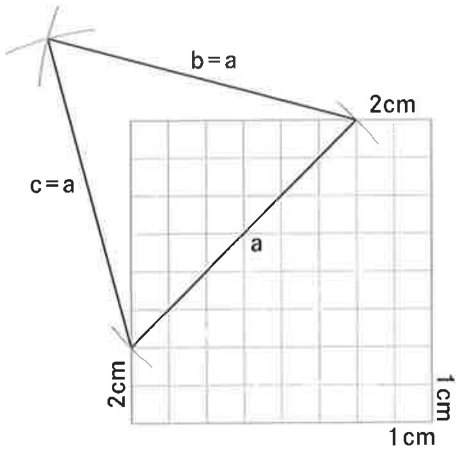
Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

3 **g** = **h** = $\sqrt{8^2+5^2}$ cm ≈ **9.43 cm**
i = $\sqrt{5^2+5^2}$ cm ≈ **7.07 cm**

Massstab 1 : 2

1 Konstruktion mit oder ohne Karogitter

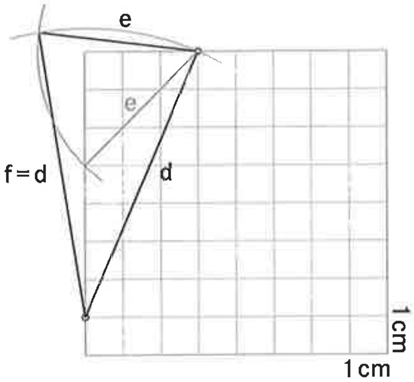


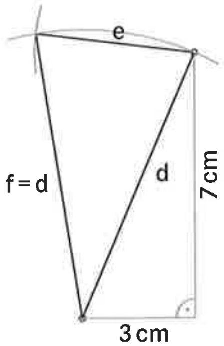


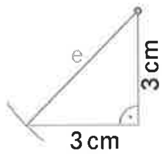
Rechnen und Zeichnen

Es ist durchaus legitim, die berechneten Werte für die Zeichnung der wirklichen Form und Grösse und später auch für die Herstellung von Netzen beizuziehen. Je nach Art der Fläche ist die eine oder andere Methode bequemer.

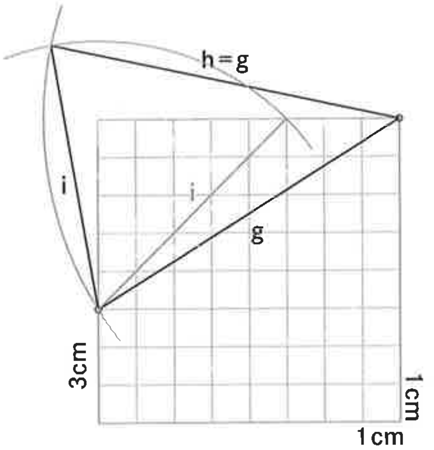
2 Die Seitenlängen können auch einzeln konstruiert oder aus der Berechnung entnommen werden.

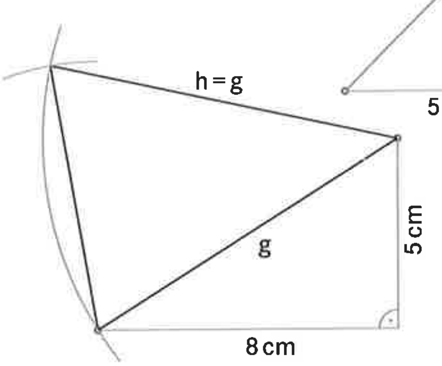


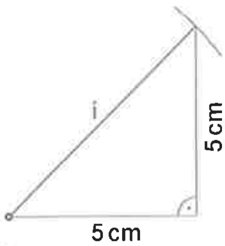




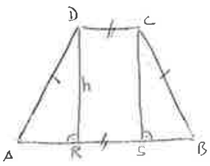
3







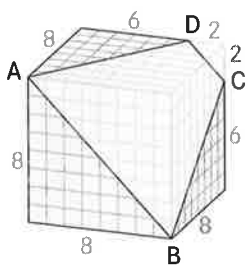
F312 a **1** Die Schnittfigur ist ein gleichschenkliges Trapez.
Die eine Parallelseite ist Flächendiagonale, die andere verläuft parallel zur Flächendiagonale.



b **1** **AB** = 8 cm · $\sqrt{2}$ = 11.313... cm ≈ **11.31 cm**
DC = 2 cm · $\sqrt{2}$ = 2.828... cm ≈ **2.83 cm**
AD = **BC** = $\sqrt{8^2+6^2}$ cm = **10 cm**

m = (AB + DC) : 2 = 7.071... cm (= 5 cm · $\sqrt{2}$)
AR = SB = (AB − DC) : 2 = 4.242... cm
h = $\sqrt{AD^2 - AR^2}$ = 9.055... cm

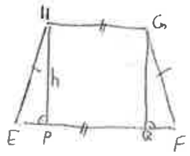
A_{ABCD} = m · h ≈ **64.03 cm²**



Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

→

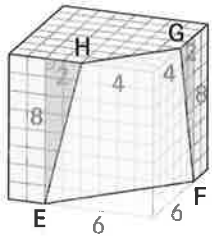
2 Diese Schnittfigur ist ebenfalls ein gleichschenkliges Trapez. Beide Parallelseiten verlaufen parallel zu einer Flächendiagonale.



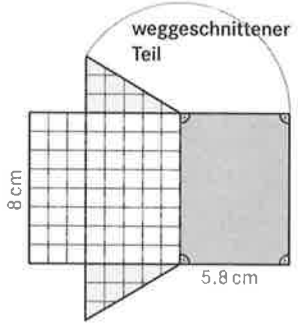
2 **EF** = $6\,\text{cm}\cdot\sqrt{2}$ = 8.485... cm ≈ **8.49 cm**
HG = $4\,\text{cm}\cdot\sqrt{2}\,\text{cm}$ = 5.656... cm ≈ **5.66 cm**
EH = FG = $\sqrt{8^2+2^2}\,\text{cm}$ = 8.246... cm ≈ **8.25 cm**

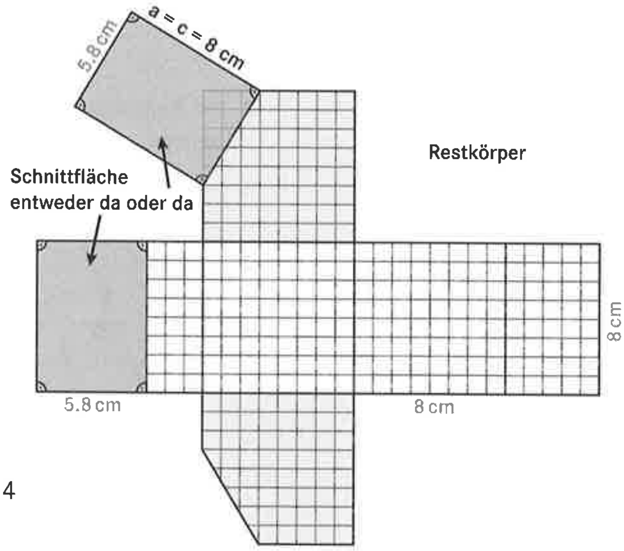
m = (EF + HG) : 2 = 7.071... cm (= $5\,\text{cm}\cdot\sqrt{2}$)
EP = QF = (EF − HG) : 2 = 1.414... cm
h = $\sqrt{EH^2 - EP^2}$ = 8.124... cm

$A_{EFGH} = m \cdot h \approx$ **57.45 cm²**



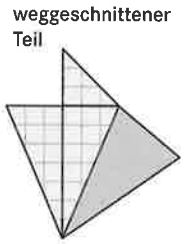
F313 Mögliche Netze für **F38 1** & **2**
Die Netze für **F38 3** können analog hergestellt werden.

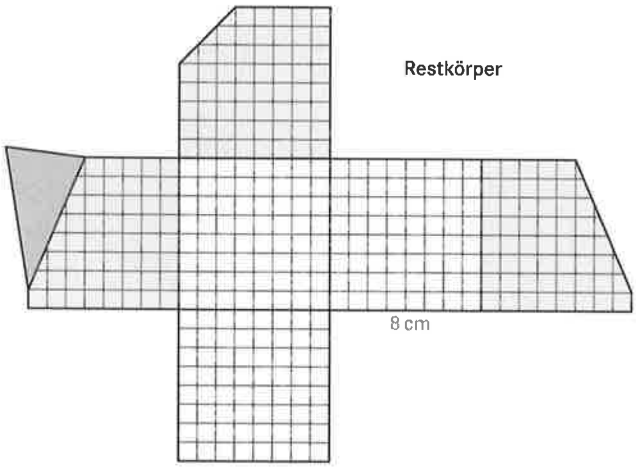




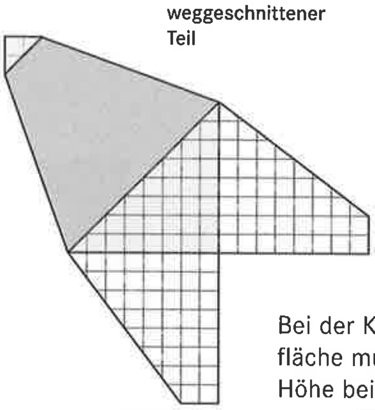
Massstab 1 : 4

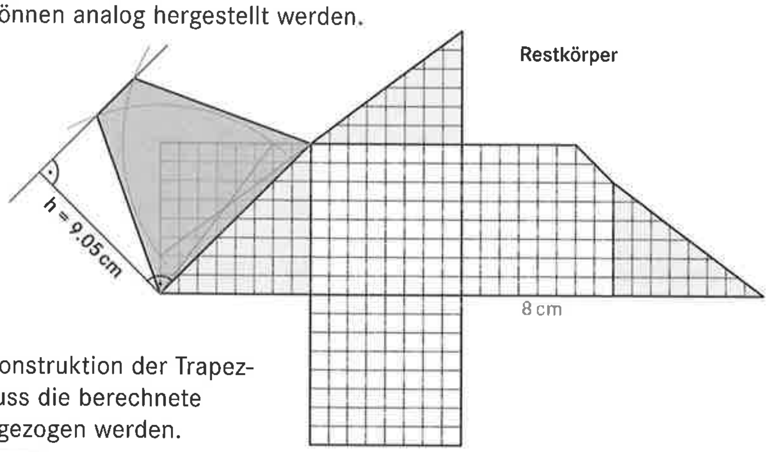
Mögliche Netze für **F311 2**
Die Netze für **F311 1** & **3** können analog hergestellt werden.





Mögliche Netze für **F312 1**.
Die Netze für **F312 2** können analog hergestellt werden.

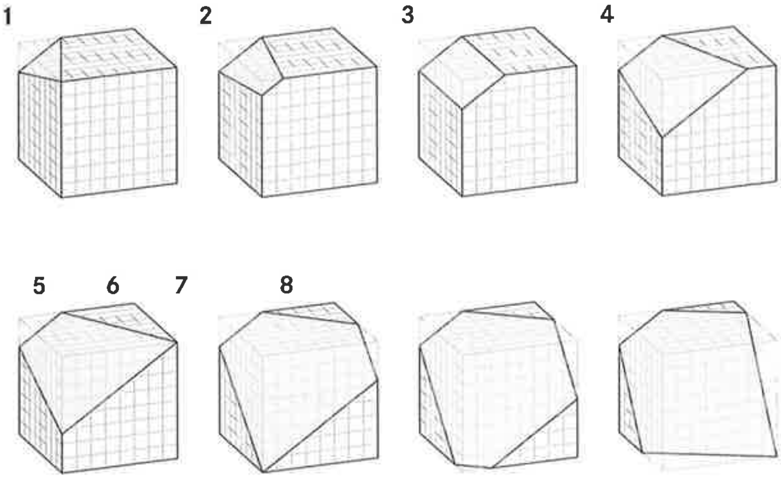




Bei der Konstruktion der Trapezfläche muss die berechnete Höhe beigezogen werden.

F315 **a** **1** Allgemeines Dreieck
2 Trapez (nicht gleichschenklig)
3 Rechteck
4 Trapez (nicht gleichschenklig)
5 Trapez (nicht gleichschenklig)
6 Fünfeck
7 Sechseck
8 Fünfeck

Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.



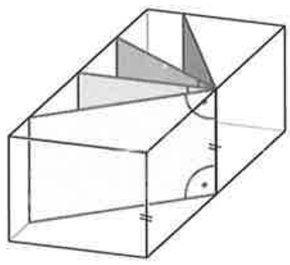
b Die Ecken von ebenen Schnittfiguren liegen immer auf Kanten, die Seiten sind Schnittlinien in verschiedenen Oberflächenquadraten.
Bei jedem ebenen Schnitt werden mindestens drei Kanten und drei Flächen durchschnitten. Eine Schnittfigur muss also mindestens drei Ecken haben.
In jedem Oberflächenquadrat kann nur eine Schnittlinie liegen. Es kann demnach keine Schnittfiguren mit mehr als sechs Seiten und somit auch nicht mit mehr als sechs Ecken geben.

Bei nicht ebenen Schnitten und nicht ebenen Schnittfiguren sieht die Sache anders aus. Experimentiere selbst, beispielsweise mit einem Stück Knetmasse.

c Rechtecke entstehen dann, wenn zwei Schnittlinien parallel zu Würfelkanten verlaufen.

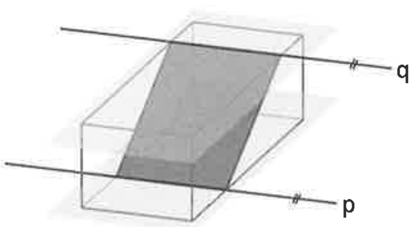
Allgmein gilt: Verläuft eine Schnittlinie **parallel zu einer Würfel- oder Quaderkante**, so entsteht ein **rechter Winkel**.

Dies kann man einsehen, wenn man einen rechtwinkligen Karton, der die gleiche Höhe wie der Quader hat, vertikal in ein Kantenmodell stellt – so, dass eine Seite parallel zu einer Kante verläuft. Wenn man den Karton jetzt um diese eine Seite dreht, dann überstreicht die benachbarte obere Seite die Deckfläche des Quaders.



Stellt man den Karton schief in den Quader, so liegt die benachbarte Seite nicht auf einer Quaderfläche.

d **Schnittlinien** auf zwei sich **gegenüberliegenden Würfel- oder Quaderflächen** verlaufen immer **parallel** zueinander.



Sich gegenüberliegende Würfel- bzw. Quaderflächen sind parallel. Sie liegen in zwei parallelen Ebenen.
Zwei parallele Ebenen werden aber von einer dritten Ebene (dort liegt die Schnittfläche!) immer in zwei parallelen Geraden geschnitten.
Hätten die Geraden p und q nämlich einen Schnittpunkt, so hätten auch die beiden Ebenen einen gemeinsamen Punkt. Sie könnten somit nicht parallel sein.

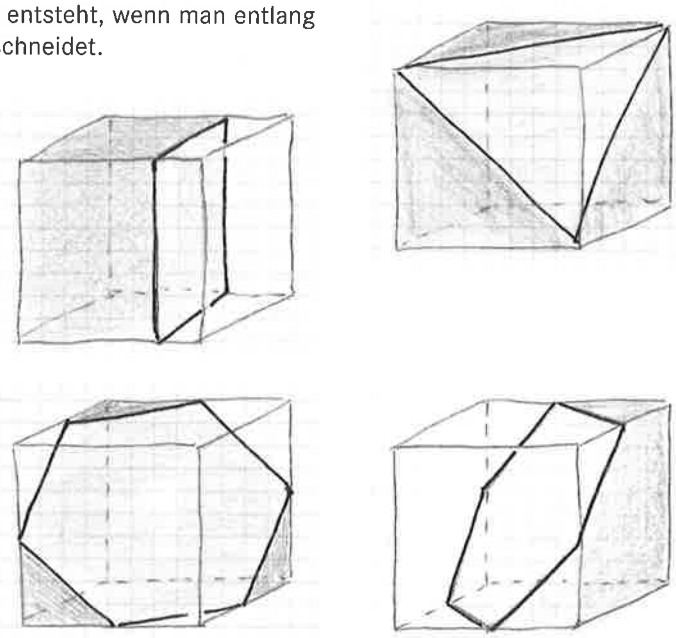
e Die Seitenlängen kannst du bei allen Schnittfiguren berechnen.
Die Fläche kannst du nur beim Rechteck berechnen. Dreieck und Trapeze müsstest du konstruieren und dann die Höhe messen. Beim Trapez ist dies recht anspruchsvoll.

F316 **a** Ein gleichsseitiges Dreieck entsteht, wenn man entlang dreier Flächendiagonalen schneidet.

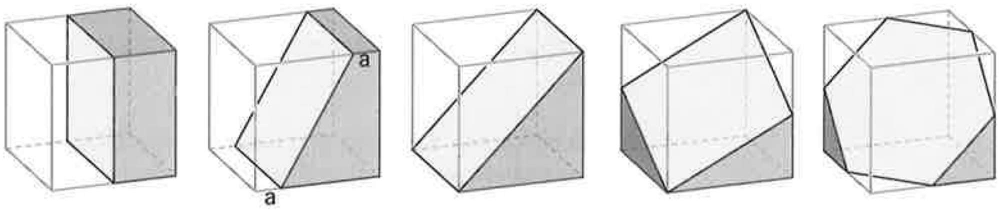
Ein Quadrat entsteht, wenn man parallel zu einer Seitenfläche schneidet.

Ein regelmässiges Fünfeck ist denkbar. Man muss dazu den Schnitt in der Figur **6** von **F315** leicht variieren.

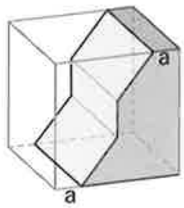
Ein regelmässiges Sechseck entsteht durch einen Schnitt durch sechs Kantenmitten.



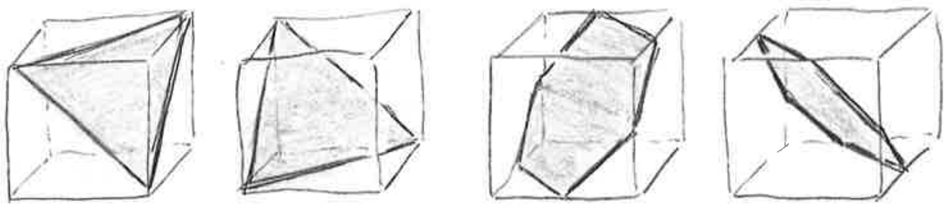
b Beispiele: Es ist jeweils nur die eine Hälfte abgebildet.



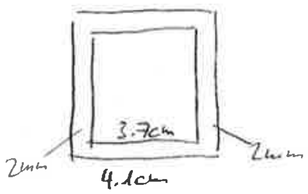
c In den Beispielen oben sind die abgebildeten Würfelhälften **links** und in der **Mitte ebenensymmetrisch** zum weggeschnitttenen Teil. Symmetrieebene ist die Schnittebene.
Alle andern Würfelhälften sind zum weggeschnittenen Teil punktsymmetrisch in Bezug auf den Würfelmittelpunkt.



F317 **a** Jedes der beiden neuen Modelle von zwei verschiedenen Seiten:

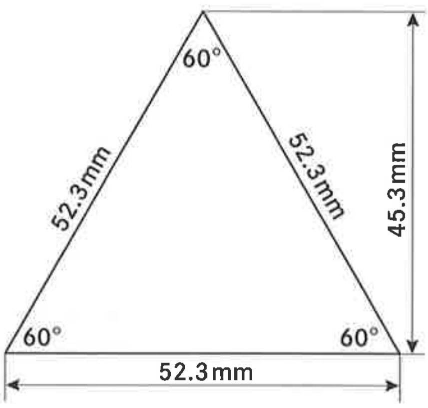


b



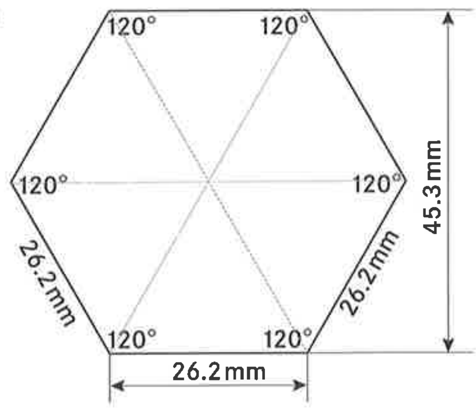
Aussenmass der Würfel: 4.1 cm
Dicke des Plexiglases: 2 mm
Innenmass der Würfel: 3.7 cm

Kantenlänge s des gleichseitigen Dreiecks:
s = 3.7 cm · $\sqrt{2}$ ≈ **5.23 cm**
Höhe = $\frac{s}{2}$ · $\sqrt{3}$ ≈ **4.53 cm**



Kantenlänge k des regelmässigen Sechsecks:
$k = 1.85\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} \approx$ **2.62 cm**

Höhe $= 2 \cdot \frac{k}{2} \cdot \sqrt{3} \approx$ **4.53 cm**

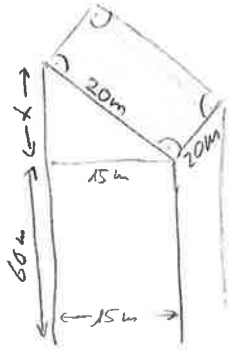


F318 Die quadratische Dachfläche hat 20 m lange Seiten.

$x = \sqrt{20^2 - 15^2}\,\text{m} \approx 13.23\,\text{m}$

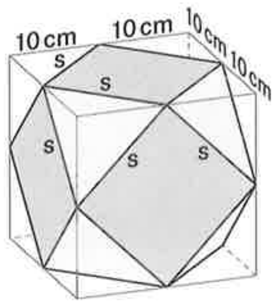
Höhe des Hauses = $60\,\text{m} + x \approx$ **73.23 m**

Das Haus wird insgesamt 73.23 m hoch.



F319 Der Körper, ein so genannter Kubokateder, besteht aus 6 kongruenten Quadraten und 8 kongruenten gleichseitigen Dreiecken.

Quadrate und Dreiecke haben dieselbe Kantenlänge s:
$s = 10\text{cm} \cdot \sqrt{2} = 14.142...\,\text{cm}$



- Quadrat:
  $A_\square = 20\,\text{cm} \cdot 20\,\text{cm} : 2 = 200\text{cm}^2$

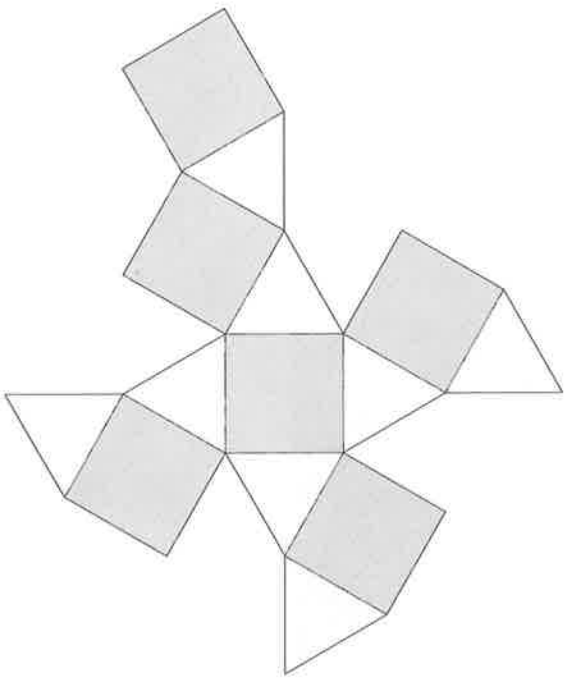
  Dreieck:
  $h = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = 12.247...\,\text{cm}$

  $A_\triangle = s \cdot h : 2 = 86.602...\,\text{cm}^2$

  Gesamte Oberfläche $= 6 \cdot A_\square + 8 \cdot A_\triangle$
  $\approx$ **1892.82 cm²**

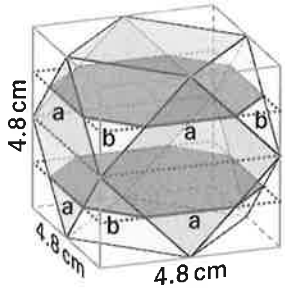
- Der Körper hat insgesamt 24 Kanten (6 Quadrate à 4 Kanten oder 8 Dreiecke à 3 Kanten).
  Gesamte Kantenlänge $= 24 \cdot s$
  $= 24 \cdot 10\text{cm} \cdot \sqrt{2}$
  $\approx$ **339.41 cm**

  Für die Herstellung eines Drahtmodells sind mindestens **340 cm** nötig.



- Ein mögliches Netz.
  Es gibt viele andere Varianten.

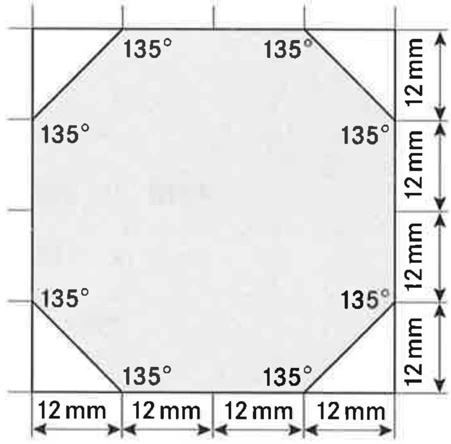
F320 Die angegebene Höhe des Körpers von 4.8 cm entspricht der Kantenlänge des Würfels.
Die beiden einzubauenden Flächen sind kongruent. Es sind Achtecke mit zwei unterschiedlich lange Seiten a und b:



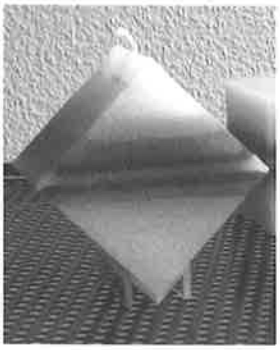
a ist Mittelparallele im halben Quadrat, also halb so lang wie dessen Diagonale, bzw. halb so lang wie die Würfelkante.
a = 4.8 cm : 2 = **2.4 cm**

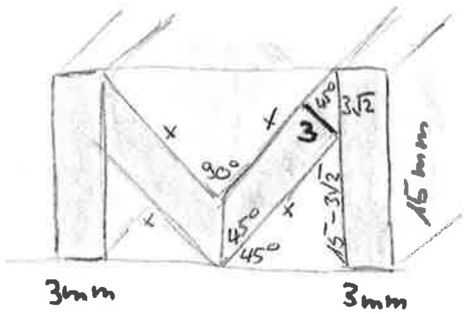
b ist Mittelparallele im gleichseitigen Dreieck, also halb so lang wie dessen Seiten s.
s = 2.4 cm · $\sqrt{2}$ = 3.394... cm
b = s : 2 ≈ **1.70 cm**

Das Erstellen der Planzeichung wird am einfachsten, wenn man von der quadratischen Schnittfläche ausgeht, in der ein solches Achteck liegt.



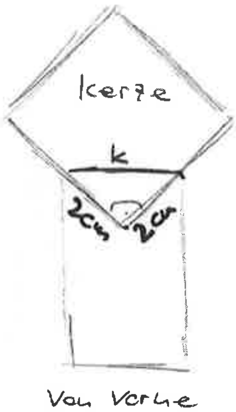
F321 **a** Der M-förmige Halter lässt sich aus
- zwei Teilen mit einem rechteckigen Querschnitt (Seitenlänge = 15 mm, Dicke = 3 mm)
- und zwei Teilen mit rhomboidförmigen Querschnitt (Dicke = 3 mm) zusammensetzen. Die Berechnung der langen Parallelseiten x kann der Skizze entnommen werden. Sie müssen im 45°-Winkel geschnitten werden.



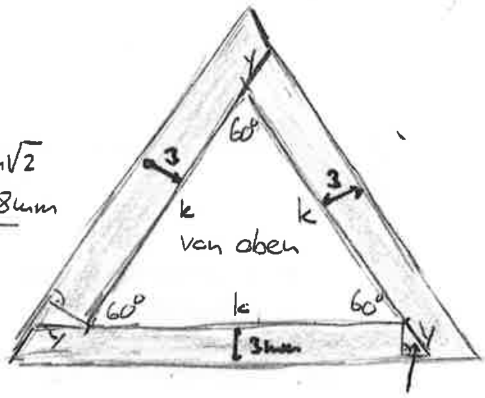


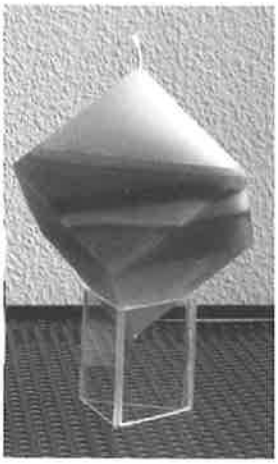
$x = (15 - 3\sqrt{2})\sqrt{2}$ mm
≈ 15.21 mm

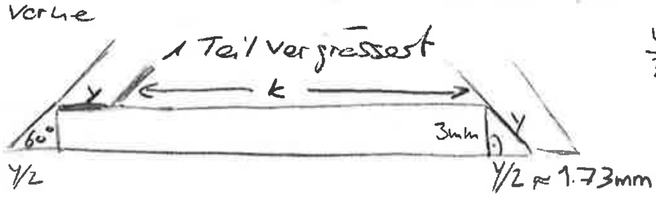
b Das Prisma lässt sich aus drei kongruenten Teilen mit trapezförmigem Querschnitt zusammensetzen. Diese werden beidseitig im 60°-Winkel angeschnitte. Die Längen sind in der Berechnung in der Skizze ersichtlich.



$k = 20\text{mm}\sqrt{2}$
≈ 28.28 mm



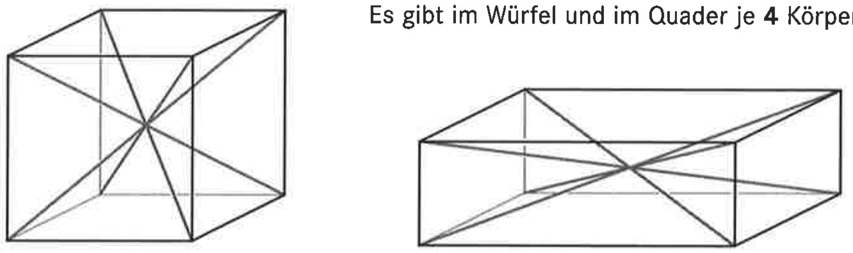




$\frac{y}{2} \cdot \sqrt{3} = 3$ mm
$y = 3\text{mm} \cdot 2 : \sqrt{3}$
≈ 3.46 mm

obere Kante: k + y ≈ 31.74 mm
untere Kante = obere Kante + 2 · $\frac{y}{2}$ = 35.21 mm

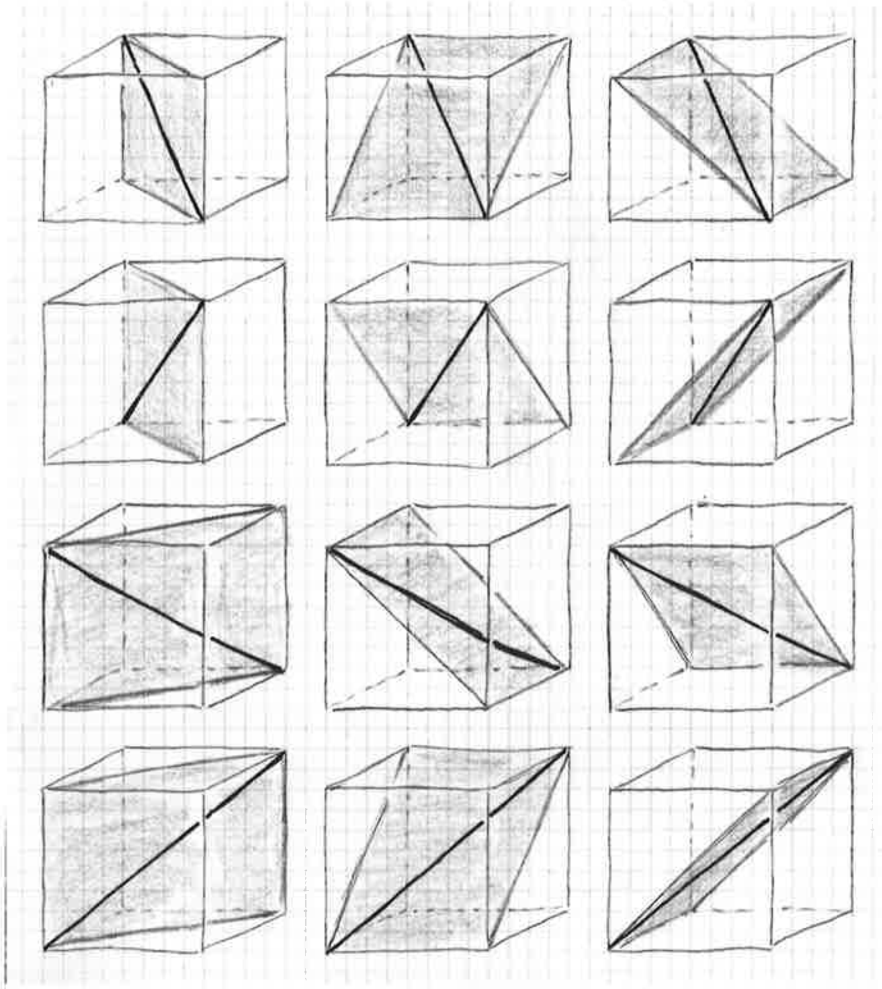
F322 ■



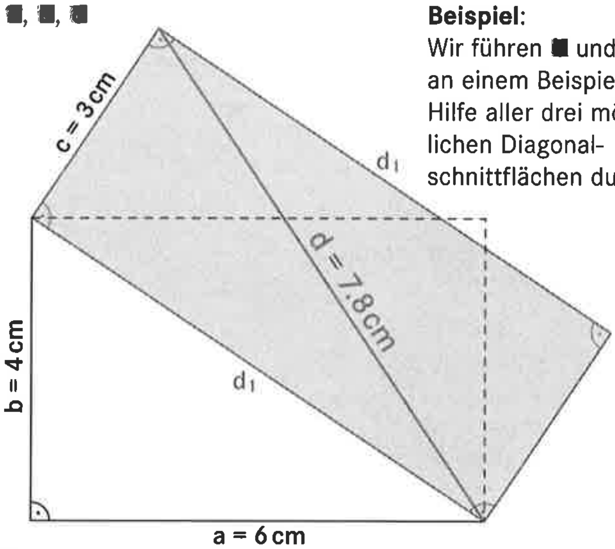
Es gibt im Würfel und im Quader je **4** Körperdiagonalen.

■ Sowohl im Würfel wie auch im Quader haben alle Körperdiagonalen die gleiche Länge.

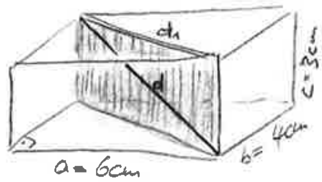
F323



F324 ■, ■, ■



Beispiel:
Wir führen ■ und ■ an einem Beispiel mit Hilfe aller drei möglichen Diagonalschnittflächen durch.



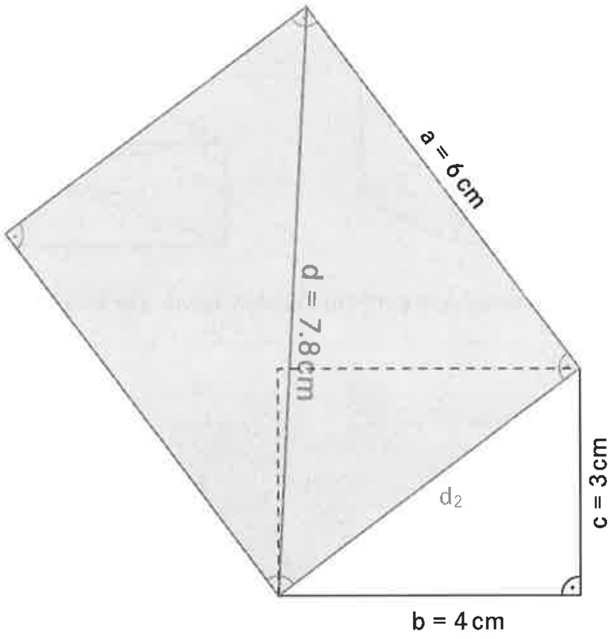
$d_1 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{6^2+4^2}\,\text{cm}$
$= \sqrt{52}$

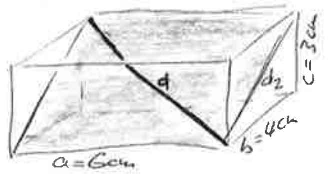
$(\sqrt{52})^2 = 52$

$\mathbf{d} = \sqrt{d_1^2+c^2} = \sqrt{52+3^2}\,\text{cm}$
$= \sqrt{61}\,\text{cm} \approx \mathbf{7.81\,cm}$

→

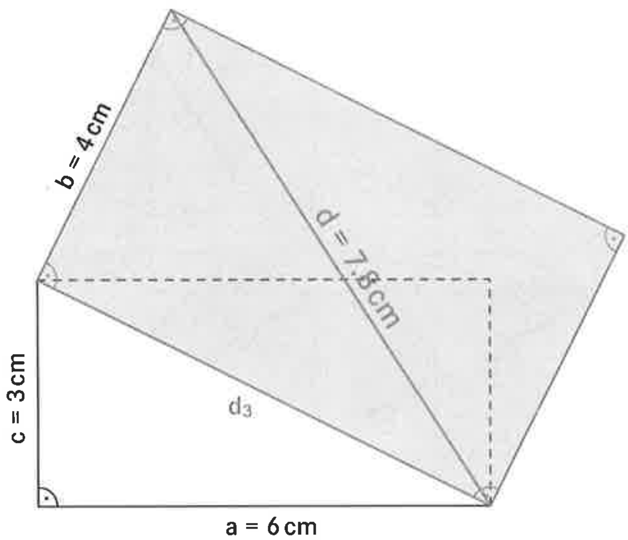
→

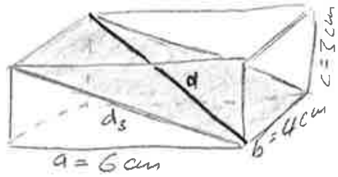




$d_2 = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 3^2}\,\text{cm}$
$= 5\,\text{cm}$

$\mathbf{d} = \sqrt{d_2^{\,2} + a^2} = \sqrt{5^2 + 6^2}\,\text{cm}$
$= \sqrt{61}\,\text{cm} \approx \mathbf{7.81\,cm}$



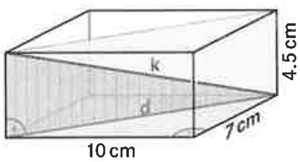


$d_3 = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{6^2 + 3^2}\,\text{cm}$
$= \sqrt{45}\,\text{cm}$

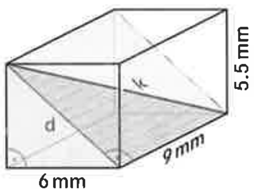
$(\sqrt{45})^2 = 45$

$\mathbf{d} = \sqrt{d_3^{\,2} + b^2} = \sqrt{45 + 4^2}\,\text{cm}$
$= \sqrt{61}\,\text{cm} \approx \mathbf{7.81\,cm}$

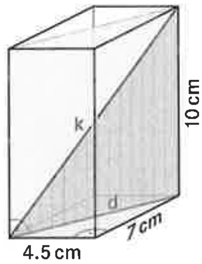
F325 a



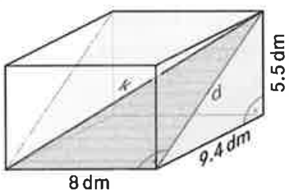
b



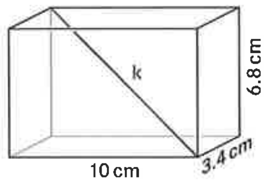
c



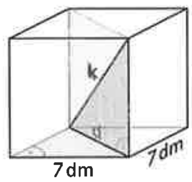
d



e



f



Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

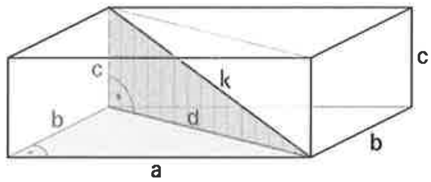
a $d = \sqrt{10^2 + 7^2}\,\text{cm} = \sqrt{149}\,\text{cm}$ $\quad$ $\mathbf{k} = \sqrt{149 + 4.5^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{13.01\,cm}$
b $d = \sqrt{6^2 + 5.5^2}\,\text{mm} = \sqrt{66.25}\,\text{mm}$ $\quad$ $\mathbf{k} = \sqrt{66.25 + 9^2}\,\text{mm} \approx \mathbf{12.13\,mm}$
c $d = \sqrt{4.5^2 + 7^2}\,\text{cm} = \sqrt{69.25}\,\text{cm}$ $\quad$ $\mathbf{k} = \sqrt{69.25 + 10^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{13.01\,cm}$
d $d = \sqrt{9.4^2 + 5.5^2}\,\text{dm} = \sqrt{118.61}\,\text{dm}$ $\quad$ $\mathbf{k} = \sqrt{118.61 + 8^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{13.51\,dm}$
e $\quad$ $\mathbf{k} = \sqrt{10^2 + 3.4^2 + 6.8^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{12.56\,cm}$
f $\quad$ $\mathbf{k} = \sqrt{7^2 + 7^2 + 7^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{12.12\,dm}$

Länge der Körperdiagonalen in Würfel und Quader

Die Länge einer Körperdiagonalen lässt sich durch zweimalige Anwendung des Satzes von Pythagoras berechnen.

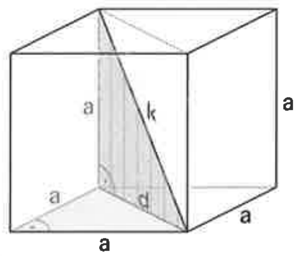
Quaderdiagonale

$d^2 = a^2 + b^2$
$k^2 = d^2 + c^2$
$k^2 = a^2 + b^2 + c^2$ $\quad\quad$ $\mathbf{k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

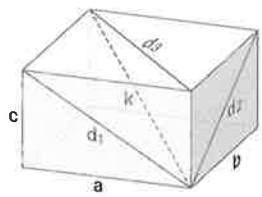


Würfeldiagonale

$d^2 = a^2 + a^2$
$k^2 = d^2 + a^2$
$k^2 = a^2 + a^2 + a^2$
$k^2 = 3a^2$
$k = \sqrt{3a^2}$ $\quad\quad$ $\mathbf{k = a\sqrt{3}}$



F326 **Zu verwendend Formeln**



$d_1 = \sqrt{a^2+c^2}$ $\quad$ $d_2 = \sqrt{b^2+c^2}$ $\quad$ $d_3 = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad$ $k = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$V = a \cdot b \cdot c$ $\quad$ $S = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

a $a = 16\,cm$ $\quad b = 13\,cm$ $\quad c = 4\,cm$

$d_1 \approx 16.49\,cm$ $\quad d_2 \approx 13.60\,cm$ $\quad d_3 \approx 20.62\,cm$
$k = 21.00\,cm$ $\quad V = 832.00\,cm^3$ $\quad S = 648.00\,cm^2$

b $a = 8\,dm$ $\quad b = 15\,dm$ $\quad c = 11\,dm$

$d_1 \approx 13.60\,dm$ $\quad d_2 \approx 18.60\,dm$ $\quad d_3 \approx 17.00\,dm$
$k = 20.25\,dm$ $\quad V = 1320.00\,dm^3$ $\quad S = 746.00\,dm^2$

c $a = 6.3\,dm$ $\quad b = 4.8\,dm$ $\quad c = 3.6\,dm$

$d_1 \approx 7.26\,dm$ $\quad d_2 \approx 6.00\,dm$ $\quad d_3 \approx 7.92\,dm$
$k = 8.70\,dm$ $\quad V = 108.86\,dm^3$ $\quad S = 140.40\,dm^2$

d $a = 12\,cm$ $\quad b = 28\,cm$ $\quad c = 39\,cm$

$d_1 \approx 40.80\,cm$ $\quad d_2 \approx 48.01\,cm$ $\quad d_3 \approx 30.46\,cm$
$k = 49.49\,cm$ $\quad V = 13104.00\,cm^3$ $\quad S = 3792.00\,cm^2$

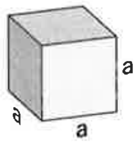
F327 $V = 64\,cm^3$ $\quad\quad V = a \cdot b \cdot c$

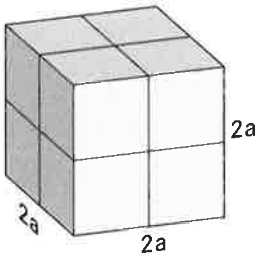
Mögliche Abmessungen des Quaders:

❶ $a = 1\,cm$	$b = 1\,cm$	$c = 64\,cm$		❺ $a = 2\,cm$	$b = 2\,cm$	$c = 16\,cm$
❷ $a = 1\,cm$	$b = 2\,cm$	$c = 32\,cm$		❻ $a = 2\,cm$	$b = 4\,cm$	$c = 8\,cm$
❸ $a = 1\,cm$	$b = 4\,cm$	$c = 16\,cm$		❼ $a = 4\,cm$	$b = 4\,cm$	$c = 4\,cm$
❹ $a = 1\,cm$	$b = 8\,cm$	$c = 8\,cm$				

Längste Körperdiagonale bei ❶: $k \approx 64.02\,cm$
Kürzeste Körperdiagonale ❼ (Würfel): $k \approx 6.93\,cm$
Der Würfel ist am «kompaktesten», deshalb hat er die kürzeste Körperdiagonale.

F328 Die Körperdiagonale verdoppelt sich:
$k_{klein} = a \cdot \sqrt{3}$ $\qquad$ $k_{gross} = 2a \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot k_{klein}$



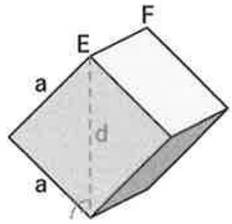


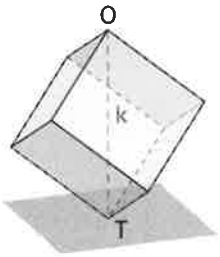
Die Flächendiagonalen verdoppeln sich offensichtlich auch. In Formeln:
$d_{klein} = a \cdot \sqrt{2}$ $\qquad$ $d_{gross} = 2a \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot d_{klein}$

Das Volumen verachtfacht sich:
$V_{klein} = a^3$ $\qquad$ $V_{gross} = (2a)^3 = 8a^3 = 8 \cdot V_{klein}$

Die Oberfläche vervierfacht sich. Jedes Oberflächenquadrat wird viermal so gross.
$S_{klein} = 6 \cdot a^2$ $\qquad$ $S_{gross} = 6 \cdot (2a)^2 = 6 \cdot 4a^2 = 24a^2 = 4 \cdot S_{klein}$

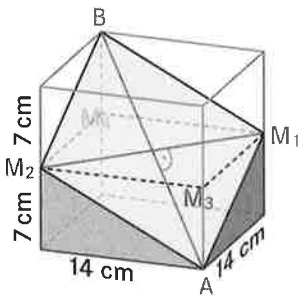
F329 Der Würfel balanciert dann auf einer Kante, wenn die Flächendiagonale d des Quadrates, das auf der Spitze steht, senkrecht nach oben zeigt.
$d = a \cdot \sqrt{2}$ entspricht gerade dem Abstand der beiden Eckpunkte E und F von der Unterlage.





Ein Würfel balanciert dann auf einer Ecke, wenn die Körperdiagonale k, die von dieser Ecke T ausgeht, senkrecht nach oben zur höchsten Ecke O zeigt.
$k = a \cdot \sqrt{3}$ entspricht dem Abstand dieser Ecke von der Unterlage.

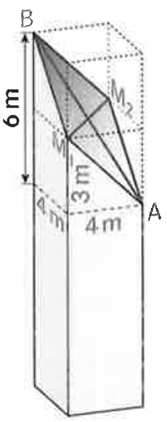
F330 **Nein**, die Schnittfigur ist kein Quadrat, sie ist ein (allgemeiner) Rhombus.
Die vier Seiten sind gleich lang, je von einer Würfelecke zu einer Kantenmitte.
Die beiden **Diagonalen** AB und M_2M_1 stehen zwar senkrecht zueinander, sind aber **nicht gleich lang**!



M_2M_1 ist Diagonale im Quadrat $M_2M_3M_1M_4$:
$M_2M_1 = 14\,cm \cdot \sqrt{2} \approx 19.80\,cm$

AB ist Körperdiagonale: $\quad AB = 14\,cm \cdot \sqrt{3} \approx 24.25\,cm$

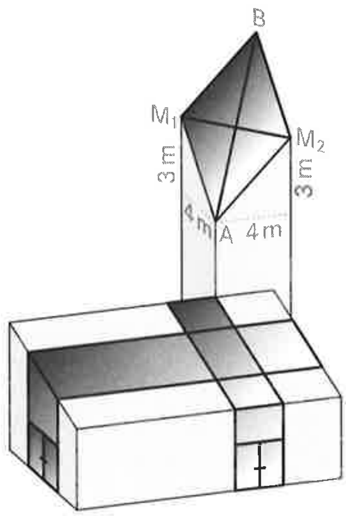
F331



Man kann die Turmspitze in der Höhe des Glasdaches in Gedanken zu einem Quader mit einer quadratischen Grundfläche von 4 m x 4 m und einer Höhe von 6 m ergänzen. Darin erkennt man dieselbe Figur wie im Würfel in **F330** - allerdings mit andern Abmessungen:

Die vier Seiten sind gleich lang:
$AM_1 = M_1B = AM_2 = M_2B = \sqrt{3^2+4^2}\,m = \mathbf{5\,m}$

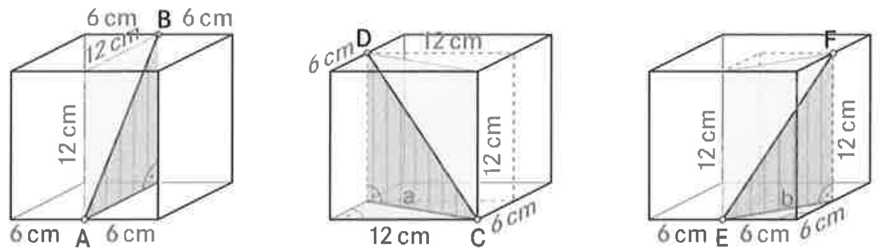
Die «Breite» M_1M_2 ist Quadratdiagonale:
$M_1M_2 = 4\,m \cdot \sqrt{2} = 5.656...\,m \approx \mathbf{5.66\,m}$



Die «Gesamtlänge» AB ist Körperdiagonale im Quader:
$AB = \sqrt{4^2+4^2+6^2}\,m = 8.246...\,m \approx \mathbf{8.25\,m}$

Dachfläche: $AB \cdot M_1M_2 : 2 = \mathbf{23.32\,m^2}$

F332 ■



AB ist Diagonale in einer quadratischen Schnittfläche: **AB** = $12\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} \approx$ **16.97 cm**

CD kann auf verschiedene Arten berechnet werden. Beispielsweise:

1. Als **Körperdiagonale** im Quader mit den Seiten 12 cm, 6 cm und 12 cm.
   CD = $\sqrt{12^2 + 6^2 + 12^2}\,\text{cm}$ = **18 cm**

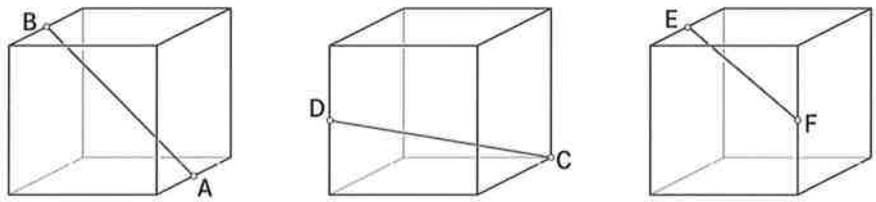
2. Mit Hilfe der **vertikalen Schnittfigur** durch C und D und den daraus entstehenden **rechtwinkligen Dreiecken** in zwei Schritten:
   a = $\sqrt{12^2 + 6^2}\,\text{cm} = \sqrt{180}\,\text{cm}$
   CD = $\sqrt{a^2 + 12^2}\,\text{cm} = \sqrt{180 + 144}\,\text{cm}$ = **18 cm**

EF kann ebenfalls auf verschiedene Arten berechnet werden. Beispielsweise:

1. Als **Körperdiagonale** im Quader mit den Seiten 6 cm, 6 cm und 12 cm.
   EF = $\sqrt{6^2 + 6^2 + 12^2}\,\text{cm} \approx$ **14.70 cm**

2. Mit Hilfe der **vertikalen Schnittfigur** durch E und F und den daraus entstehenden **rechtwinkligen Dreiecken** in zwei Schritten:
   b = $\sqrt{6^2 + 6^2}\,\text{cm} = \sqrt{72}\,\text{cm}$
   EF = $\sqrt{b^2 + 12^2}\,\text{cm} = \sqrt{72 + 144}\,\text{cm} \approx$ **14.70 cm**

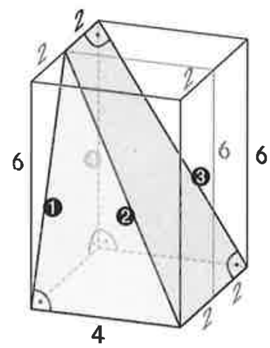
■ Zu jeder Strecke oben **ein Beispiel** für eine Strecke gleicher Länge (gleiche Buchstaben). **Es gibt beliebig viele Varianten.**



F333 Die vier Grundkanten sind in allen Teilaufgaben gleich lang: 4 Längen-Einheiten (LE).

1. **Kanten**

❶ = $\sqrt{6^2 + 2^2}$ LE = $\sqrt{40}$ LE ≈ **6.32 LE**
❷ = $\sqrt{4^2 + 2^2 + 6^2}$ LE = $\sqrt{56}$ LE ≈ **7.48 LE**
❸ = $\sqrt{6^2 + 4^2}$ LE = $\sqrt{52}$ LE ≈ **7.21 LE**
❹ = **6 LE**

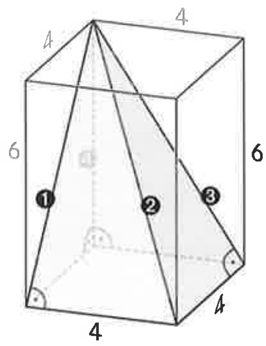


Dachflächen in Flächen-Einheiten (FE)

vorne	rechtwinkliges Dreieck
	A_{vorne} = Grundkante · Kante❶ : 2 ≈ **12.65 FE**
rechts	rechtwinkliges Trapez m = 3 LE h = Kante❸
	A_{rechts} = m · Kante❸ ≈ **21.63 FE**
hinten	halbes Rechteck
	A_{hinten} = **12 FE**
links	rechtwinkliges Trapez m = 3 LE h = Kante❹ = 6 LE (oder ▭ - △)
	A_{links} = m · Kante❹ = **18 FE**
Total	A_{Dach} ≈ **64.28 FE** (Summe der gerundeten Werte)

2. **Kanten**

❶ = $\sqrt{6^2+4^2}$ LE = $\sqrt{52}$ LE ≈ **7.21 LE**
❷ = $\sqrt{4^2+6^2+4^2}$ LE = $\sqrt{68}$ LE ≈ **8.25 LE**
❸ = ❶ = $\sqrt{52}$ LE ≈ **7.21 LE**
❹ = **6 LE**



Dachflächen

vorne — rechtwinkliges Dreieck
A_{vorne} = Grundkante · Kante ❶ : 2 ≈ **14.42 FE**

rechts — rechtwinkliges Dreieck
A_{rechts} = A_{vorne} ≈ **14.42 FE**

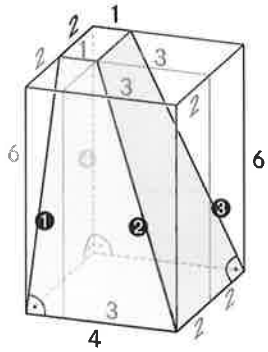
hinten — halbes Rechteck
A_{hinten} = **12 FE**

links — halbes Rechteck
A_{links} = A_{hinten} = **12 FE**

Total — A_{Dach} = **52.84 FE** (Summe der gerundeten Werte)

3. **Kanten**

❶ = $\sqrt{6^2+2^2}$ LE = $\sqrt{40}$ LE ≈ **6.32 LE**
❷ = $\sqrt{3^2+2^2+6^2}$ LE = $\sqrt{49}$ LE = **7 LE**
❸ = $\sqrt{6^2+3^2}$ LE = $\sqrt{45}$ LE ≈ **6.71 LE**
❹ = **6 LE**



Dachflächen

vorne — rechtwinkliges Trapez m = 2.5 LE h = Kante ❶
A_{vorne} = m · Kante ❶ ≈ **15.81 FE**

rechts — rechtwinkliges Trapez m = 3 h = Kante ❸
A_{rechts} = m · Kante ❸ ≈ **20.12 FE**

hinten — rechtwinkliges Trapez m = 2.5 LE h = Kante ❹ = 6 LE (oder ▭ – △)
A_{hinten} = **15 FE**

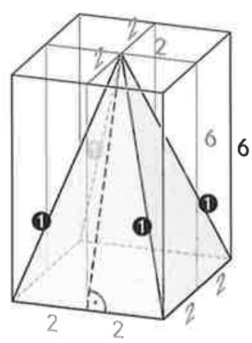
links — rechtwinkliges Trapez m = 3 LE h = Kante ❹ = 6 LE (oder ▭ – △)
A_{links} = m · Kante ❹ = **18 FE**

oben — Rechteck
A_{oben} = **2 FE**

Total — A_{Dach} ≈ **70.94 FE** (Summe der gerundeten Werte)

4. **Kanten**

Alle vier Kanten sind gleich lang
❶ = $\sqrt{2^2+2^2+6^2}$ LE = $\sqrt{44}$ LE ≈ **6.63 LE**



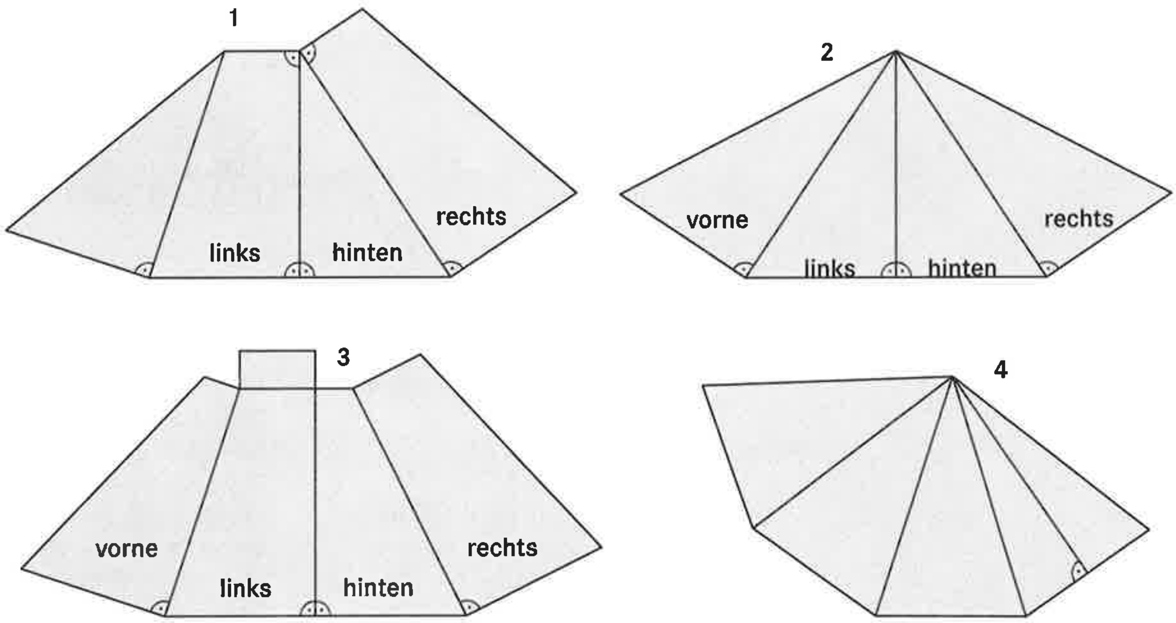
Dachflächen

Alle vier Dachflächen sind gleich gross. Es sind gleichschenklige Dreiecke mit der Höhe h = $\sqrt{6^2+2^2}$ LE = $\sqrt{40}$ LE ≈ **6.32 LE**

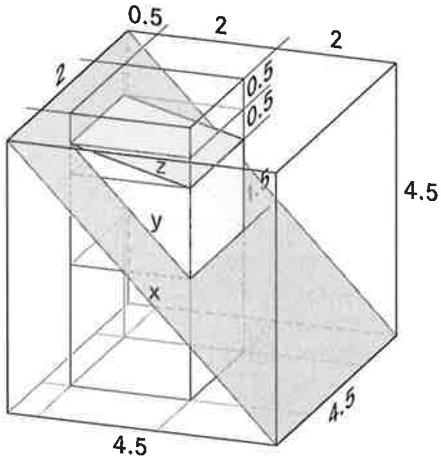
$A_{Fläche}$ = Grundkante · h : 2 ≈ **12.65 FE**

Total — A_{Dach} = 4 · $A_{Fläche}$ ≈ **50.60 FE** (Summe der gerundeten Werte)

Beispiele für Netze:



F334 **Grünes Dach:** $A_{\text{Dach grün}} = A_{\text{Dach ganz}} - A_{\text{Ausschnitt}}$



Dach ganz: Rechteck, Kanten 4.5 m und x

$x = 4.5\,\text{m} \cdot \sqrt{2} = 6.363\ldots\,\text{m}$

$A_{\text{Dach ganz}} = 4.5\,\text{m} \cdot x = 28.637\ldots\,\text{m}^2$

Ausschnitt: Rechteck, Kanten 2 m und y

$y = 2\,\text{m} \cdot \sqrt{2} = 2.828\ldots\,\text{m}$

$A_{\text{Ausschnitt}} = 2\,\text{m} \cdot y = 5.656\ldots\,\text{m}^2$

$\mathbf{A_{\text{Dach grün}}} = A_{\text{Dach ganz}} - A_{\text{Ausschnitt}}$

$\approx \mathbf{22.98\,m^2}$

Graues Dach: Rechteck, Kanten 2 m und z

$z = \sqrt{2^2 + 0.5^2}\,\text{m} = 2.061\ldots\,\text{m}$

$\mathbf{A_{\text{Dach grau}}} = 2\,\text{m} \cdot z \approx \mathbf{4.12\,m^2}$

Gelbe Mauer: $A_{\text{Mauer}} = A_{\text{Rechteck}} + 2 \cdot A_{\text{Dreieck}}$

Rechteck: Kanten 2 m (waagrecht) und 1.5 m (senkrecht)

$A_{\text{Rechteck}} = 2\,\text{m} \cdot 1.5\,\text{m} = 3\,\text{m}^2$

Dreieck: Seite = 1.5 m (senkrecht) und Höhe = 2 m (waagrecht)

$A_{\text{Dreieck}} = 1.5\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} : 2 = 1.5\,\text{m}^2$

$\mathbf{A_{\text{Mauer}}} = A_{\text{Rechteck}} + 2 \cdot A_{\text{Dreieck}} = \mathbf{6\,m^2}$

F335 **Grünes Dach:** Zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke, Katheten 2 m und x

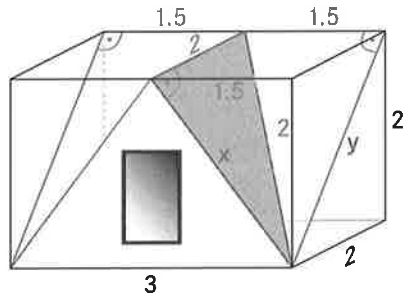
$x = \sqrt{1.5^2 + 2^2}\,\text{m} = 2.5\,\text{m}$

$\mathbf{A_{\text{grün}}} = 2 \cdot 2\,\text{m} \cdot 2.5\,\text{m} : 2 = \mathbf{5\,m^2}$

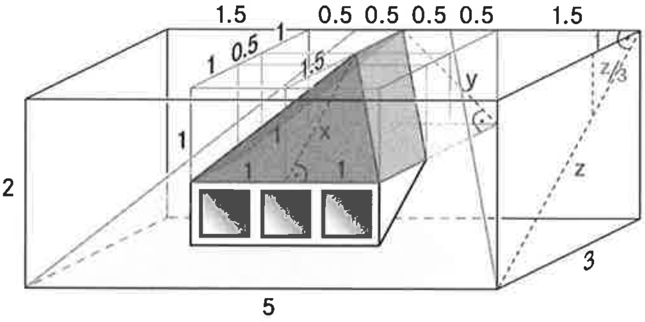
Gelbes Dach: Zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke, Katheten 1.5 m und y

$y = 2\,\text{m} \cdot \sqrt{2} = 2.828\ldots\,\text{m}$

$\mathbf{A_{\text{gelb}}} = 2 \cdot 1.5\,\text{m} \cdot y : 2 \approx \mathbf{4.24\,m^2}$



Grünes Dach:
$A_{\text{Grünes Dach}} = A_{\text{Dreieck}} + 2 \cdot A_{\text{Rhomboid}}$



Dreieck: Seite = 2 m, Höhe = x
$x = \sqrt{1^2 + 1.5^2}\,\text{m} = 1.802\ldots\,\text{m}$
$\mathbf{A_{Dreieck}} = 2\,\text{m} \cdot x : 2 \approx \mathbf{1.80\,m^2}$

Rhomboid: Seite 1 m, Höhe = y
$y = 1\,\text{m} \cdot \sqrt{2} = 1.414\ldots\,\text{m}$
$\mathbf{A_{Rhomboid}} = 1\,\text{m} \cdot y \approx \mathbf{1.41\,m^2}$

$\mathbf{A_{Grünes\ Dach}} = A_{\text{Dreieck}} + 2 \cdot A_{\text{Rhomboid}}$
$\approx \mathbf{4.62\,m^2}$

Höhe des Rhomboids:
Die Höhe und somit auch die Fläche des Rhomboids bleiben gleich, wenn man in Gedanken beispielsweise den First fest lässt und die untere Kante auf der Waagrechten nach hinten verschiebt bis sie an der Quaderwand anstösst. Jetzt hat man ein Rechteck, dessen eine Seite = y ist.

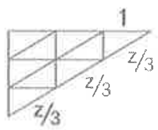
Aussparung beim gelben Dach

Die Berechnung der Aussparung beim gelben Dach ist sehr anspruchsvoll. Man könnte hier auch die Höhe des weissen Mauervorsprungs (z/3) m vorgeben oder das gelbe Dach ohne Aussparung berechnen lassen.

Gelbes Dach: $A_{\text{Gelbes Dach}} = A_{\text{Trapez}} - A_{\text{Rechteck Loch}} - A_{\text{Dreieck Loch}}$

Trapez: Parallelseiten 5 m und 1 m
Mittellinie = 3 m
Höhe = $z = \sqrt{3^2 + 2^2}\,\text{m} = 3.605\ldots\,\text{m}$
$\mathbf{A_{Trapez}}$ = Mittellinie · Höhe = $3\,\text{m} \cdot z$
$\approx \mathbf{10.82\,m^2}$

Die Trapezfläche lässt sich auch berechnen als Diagonalschnittfläche minus zwei rechtwinklige Dreiecke mit 1.5 m und z.

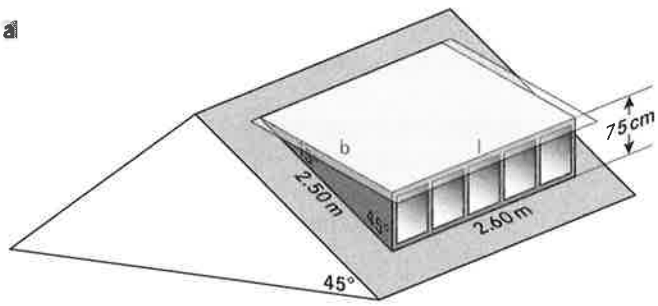


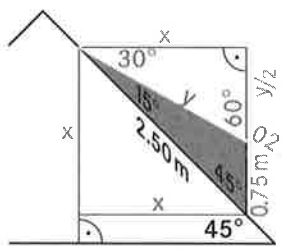
Rechteck: Seiten 2 m (Breite) und z/3 (schräge Kante beim Dach)
$\mathbf{A_{Rechteck\ Loch}} = 2\,\text{m} \cdot z/3 \approx \mathbf{2.40\,m^2}$

Dreieck Loch: Das auszusparende Dreieck ist gleich gross wie die dreieckige grüne Dachfläche
$\mathbf{A_{Dreieck\ Loch}} = A_{\text{Dreieck}} \approx \mathbf{1.80\,m^2}$

$A_{\text{Gelbes Dach}} = A_{\text{Trapez}} - A_{\text{Rechteck Loch}} - A_{\text{Dreieck Loch}} \approx \mathbf{6.62\,m^2}$

F336 a





Querschnitt

Fehlerhinweis

Die Höhe ist **75 cm**, nicht 78 cm.

Die Aufgabe ist absichtlich überbestimmt, um zwei verschiedene Lösungswege zu ermöglichen.
Leider hat sich dabei in der 1. Auflage ein Fehler eingeschlichen.

Länge Glasdach: $\mathbf{l} = 2.6\,\text{m} + 2 \cdot 0.1\,\text{m} = \mathbf{2.8\,m}$

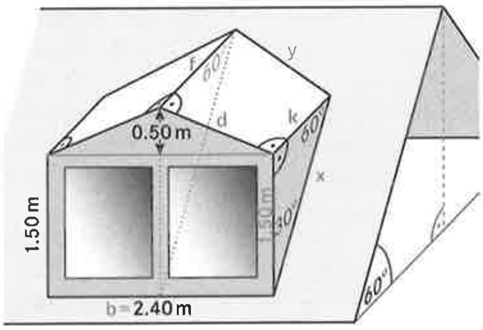
Breite Glasdach: $b = y + 0.2\,\text{m}$ (siehe Abb. rechts oben)
y ist Seite in einem gleichseitigen Dreieck dessen Höhe x ist.
x ist Seite des Quadrates mit Diagonale 2.5 m:
$x \cdot \sqrt{2} = 2.5\,\text{m}$
$x = 2.5\,\text{m} : \sqrt{2} = 1.767\ldots\text{m}$
$\frac{y}{2} \cdot \sqrt{3} = 1.767\ldots\text{m}$
$y = 1.767\ldots\text{m} \cdot 2 : \sqrt{3} = 2.041\ldots\text{m}$
$\mathbf{b} = y + 0.2\,\text{m} = 2.241\ldots\text{m} \approx \mathbf{2.24\,m}$

oder:
$\frac{y}{2} = x - 0.75\,\text{m} = 1.017\ldots\text{m}$
$y = 2.035\ldots\text{m}$
$\mathbf{b \approx 2.24\,m}$

Fläche Glasdach: $A = l \cdot b \approx \mathbf{6.27\,m^2}$

Fläche Glasdach $\approx \mathbf{6.27\,m^2}$

F337 **a** Die Länge l des Blechstreifens setzt sich zusammen aus
$l = b + 2 \cdot x + 2 \cdot y$



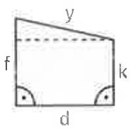
b Fensterbreite $\mathbf{b = 2.40\,m}$

x Seite in einem halben gleichseitigen Dreieck mit der Höhe 1.5 m

$\frac{x}{2} \cdot \sqrt{3} = 1.5\,m$

$\mathbf{x} = 1.5\,m \cdot 2 : \sqrt{3} \approx \mathbf{1.73\,m}$

y y ist Schrägseite eines rechtwinkligen Trapezes (gelbe Dachfläche). Zur Berechnung von y muss man d, f und k kennen.



d Dachschräge
$d = \sqrt{1.2^2 + 0.5^2}\,m = 1.3\,m$

k Dachkante, ist **halbe** Seite eines halben gleichseitigen Dreiecks mit der Höhe 1.5 m
$k \cdot \sqrt{3} = 1.5\,m$
$k = 1.5\,m : \sqrt{3} = 0.866...\,m$

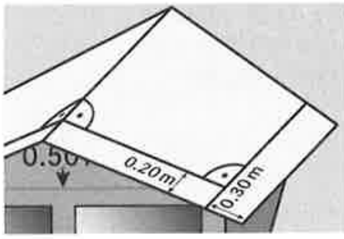
f Firstlänge, ist **halbe** Seite eines halben gleichseitigen Dreiecks (punktiert) mit der Höhe (1.5 m + 0.5 m) = 2 m
$f \cdot \sqrt{3} = 2\,m$
$f = 2\,m : \sqrt{3} = 1.154...\,m$

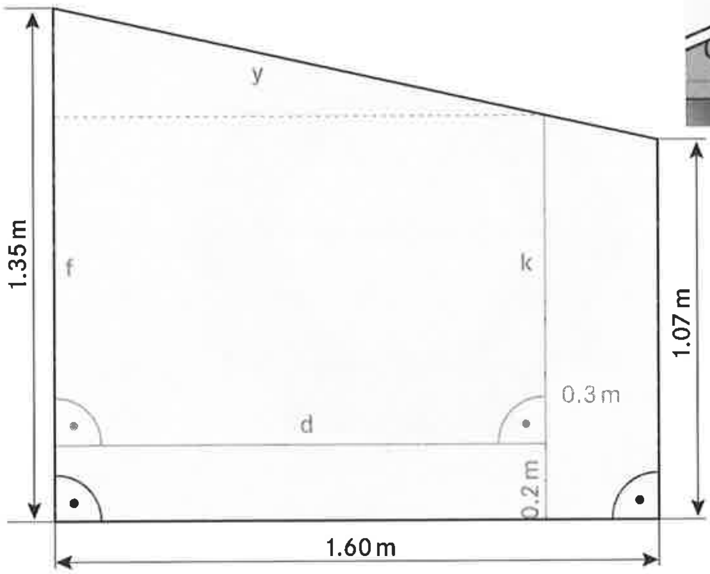
$\mathbf{y} = \sqrt{d^2 + (f-k)^2} = 1.331...\,m \approx \mathbf{1.33\,m}$

$\mathbf{l} = 2.40\,m + 2 \cdot 1.73\,m + 2 \cdot 1.33\,m \approx \mathbf{8.52\,m}$

An den Ecken gibt es Verschnitt. Der Spengler täte gut daran, mindestens **9 m** Blechstreifen bereit zu halten (je nach Streifenbreite).

b Der Plan ist hier im Massstab 1:20 abgedruckt. In Wirklichkeit würde man eher 1:10 wählen.



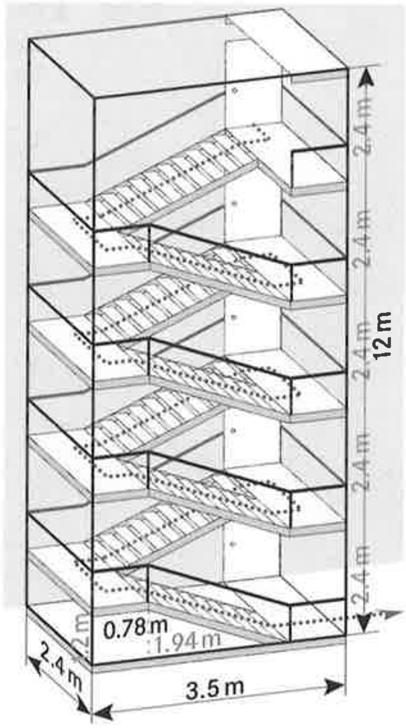


F338

F339 Der **Fluchtweg** setzt sich zusammen aus:

8 · Treppenlänge
1 · ein Viertel Etagenlänge
7 · eine halbe Etagenlänge
15 · eine halbe Etagenbreite
1 · ganze Etagenbreite

Total:
8·Treppelänge + 3.75·Etagenlänge + 8.5·Etagenbreite



Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

Treppenlänge t:

Höhenunterschied h: Etagenhöhe 12 m : 5 = 2.4 m
h = Etagenhöhe : 2 = 1.2 m

Horizontaldistanz d: d = 3.5 m − 2 · 0.78 m = 1.94 m

$t = \sqrt{d^2 + h^2} \approx$ **2.28 m**

Genauigkeit

Bei dieser und den nachfolgenden angewendeten Aufgabe berechnen wir das Endresultat mit gerundeten Zwischenwerten.

Etagenlänge l: **l = 2.4 m**

Etagenbreite b: **b = 0.78 m**

Fluchtweg: **w** = 8 · 2.28 m
+ 3.75 · 2.4 m
+ 8.5 · 0.78 m ≈ **33.87 m**

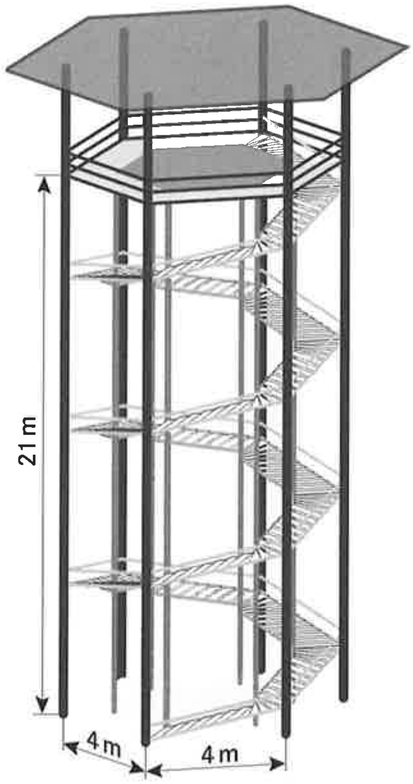
Der Fluchtweg ist **knapp 34 m** lang.

F340 a Der Weg führt über 21 Treppen (3·6 + 3)

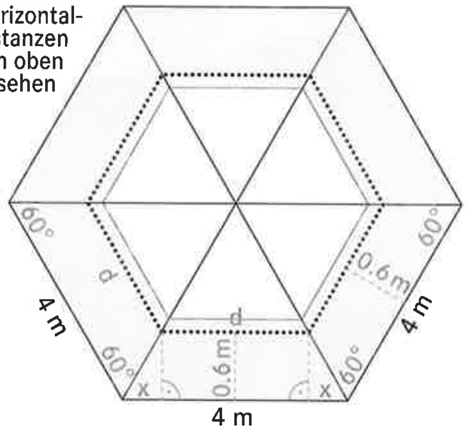
Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

Treppenlänge t:

Höhenunterschied h: h = 21 m : 21 = 1 m
Horizontaldistanz d: d = 4 m − 2x



Horizontal-distanzen von oben gesehen



x ist **halbe** Seite in einem halben gleichseitigen Dreieck mit der Höhe 0.6 m:

$x \cdot \sqrt{3} = 0.6\,\text{m}$
$x = 0.6\,\text{m} : \sqrt{3} = 0.346...\,\text{m}$

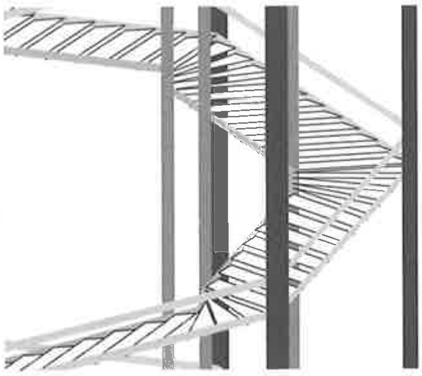
$d = 4\,\text{m} - 2x = 3.307...\,\text{m}$

$t = \sqrt{d^2 + h^2} = 3.455...\,\text{m} \approx$ **3.46 m**

Weg: **w** = 21 · t ≈ **72.66 m** (Mit exaktem Wert: 72.56 m)

Der Weg auf den Turm ist **rund 72.5 m** lang.

b Steigung der Treppe:



$$\frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Horizontaldistanz}} = \frac{1\,\text{m}}{4\,\text{m}} = 0.25 = \mathbf{25\%}$$

Durchschnittliche Steigung des gewählten Weges:

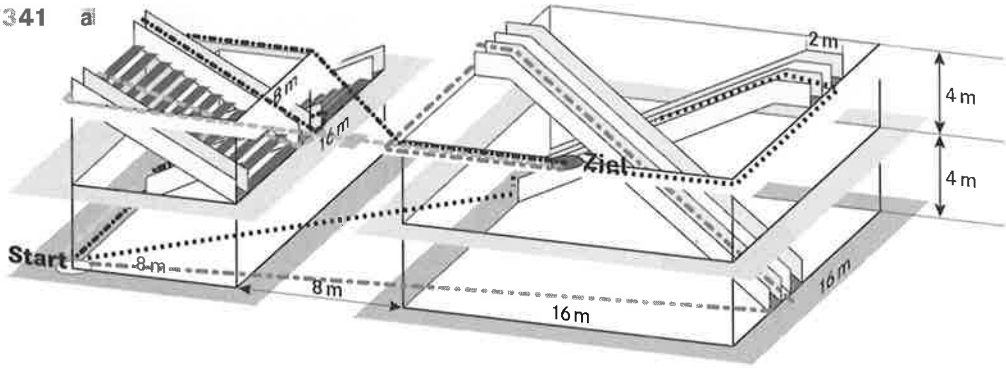
$$\frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Horizontaldistanz}} = \frac{h}{d} = \frac{1\,\text{m}}{3.307...\,\text{m}} = 0.302... = \mathbf{30.2\%}$$

Innen- und Aussenrand der Treppe laufen parallel. Es drängt sich deshalb auf, deren Steigung als Steigung der Treppe zu verstehen.Trotzdem weist der gewählte Weg eine grössere Steigung auf. Je näher man sich am inneren Rand bewegt, umso kürzer wird der Weg. Die Höhendifferenz muss dabei trotzdem überwunden werden. Dies wird beispielsweise mit dreiecksförmigen Treppenstufen bei der Richtungsänderung erreicht.

Randabstand der Wege

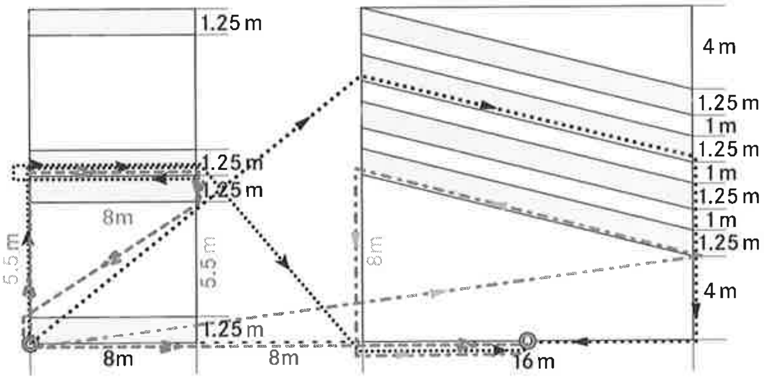
Bei dieser Aufgabe haben wir alle Wege konsequent ganz am Rand (ohne Abstand) gewählt.

F341 **a**

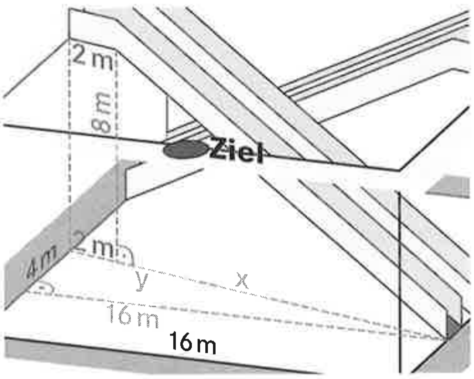


Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

Weg 1 -·-·-
Weg 2 ·······
Weg 3 - - - -
Weg 4 -··-··-



Berechnung der Rolltreppe:



$y = \sqrt{16^2+4^2}\,\text{m}$

$x = y - 2\,\text{m} = \sqrt{16^2+4^2}\,\text{m} - 2\,\text{m} = 14.492...\,\text{m}$

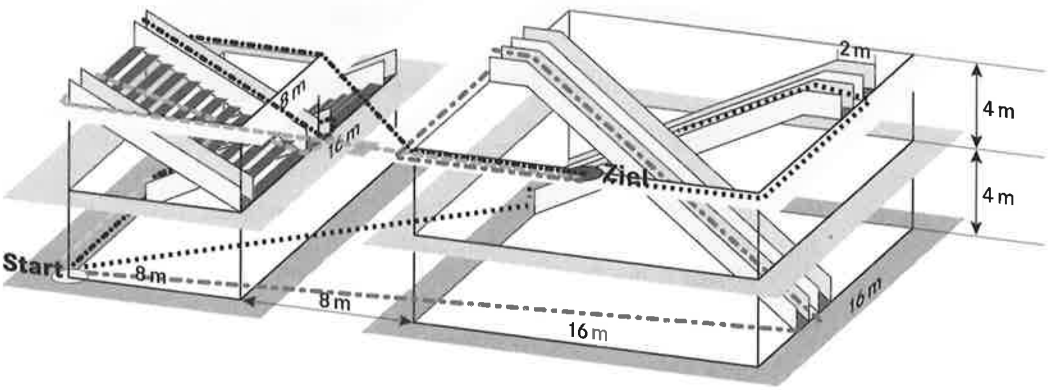
$z = \sqrt{8^2+x^2}\,\text{m} = 16.553...\,\text{m}$

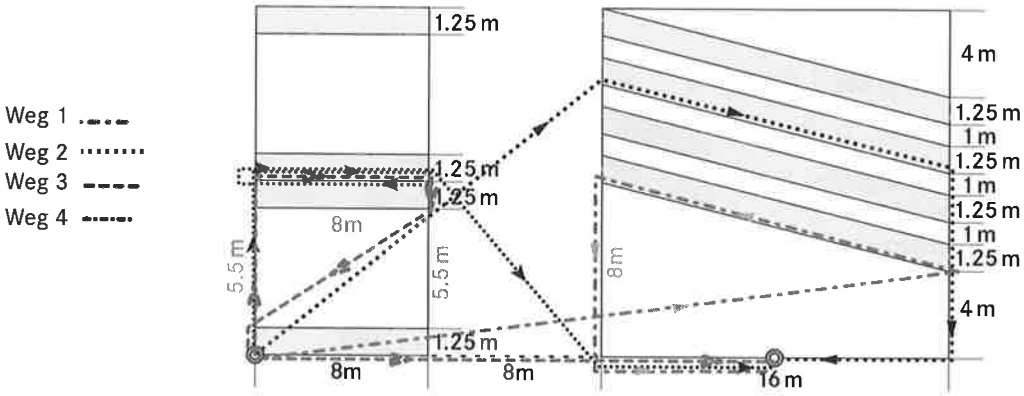
Gesamtlänge $= z + 2\,\text{m} \approx$ **18.55 m**

Weg 1:	über die vordere lange Rolltreppe		
Start bis Rolltreppe:	$\sqrt{32^2+4^2}\,\text{m}$	$\approx$	32.25 m
Rolltreppe:	siehe links	$\approx$	18.55 m
Rolltreppe bis Ecke:			8.00 m
Ecke bis Ziel:			8.00 m
Weg 1 total:			**66.80 m**

Weg 2:	über die hintere lange Rolltreppe		
Start bis Rolltreppe:	$\sqrt{16^2+12.5^2}\,\text{m}$	$\approx$	20.30 m
Rolltreppe:	siehe links	$\approx$	18.55 m
Rolltreppe bis Ecke:			8.50 m
Ecke bis Ziel:			8.00 m
Weg 2 total:			**55.35 m**

Letzte 2 m:
Im oberen Schema, das im Buch abgedruckt ist, sind die 2 m absichtlich parallel zur Seitenkante gezeichnet, damit man realisiert, dass sie waagrecht sind. In der massgetreuen Zeichnung ist das weniger offensichtlich. →





Weg 3:	über die kurzen Rolltreppen und die hintere Seite		
Start bis Rolltreppe:			8 m
untere Rolltreppe:	$\sqrt{8^2+4^2}$ m	≈	8.94 m
obere Rolltreppe:	$\sqrt{8^2+4^2}$ m	≈	8.94 m
Rolltreppe bis Ecke:			8.00 m
Ecke bis Ecke:	$\sqrt{8^2+8^2}$ m	≈	11.31 m
Ecke bis Ziel:			8.00 m
Weg 3 total:			**53.19 m**

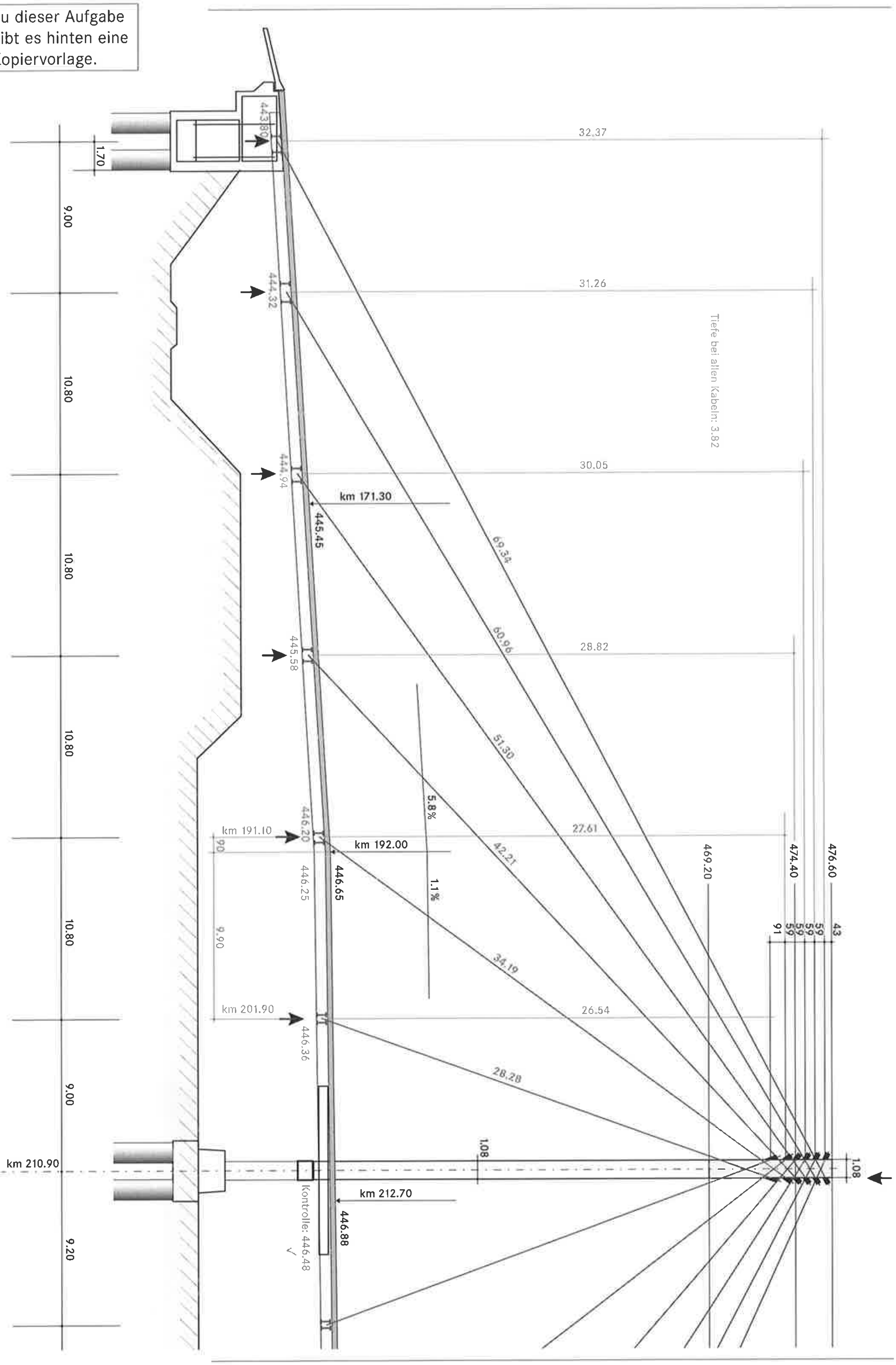
Weg 4:	über die kurzen Rolltreppen und die hintere Seite		
Start bis Rolltreppe:			8 m
untere Rolltreppe:	$\sqrt{8^2+4^2}$ m	≈	8.94 m
an oberer Rolltreppe vorbei			1.25 m
diagonal über die Treppe:	$\sqrt{5.5^2+8^2+4^2}$ m	≈	10.50 m
bis Ecke:			1.25 m
Ecke bis Ziel:			24.00 m
Weg 4 total:			**53.94 m**

Unser kürzester Weg: **Weg 3**! Hast du einen kürzeren gefunden?

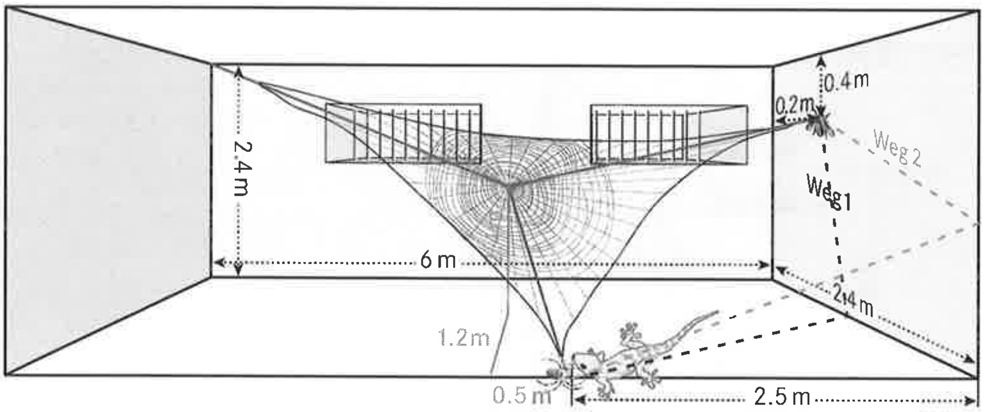
Wir bedanken uns bei Andreas Kilchenmann, Stadtingenieur von Winterthur, der uns die Pläne der Storchenbrücke freundlicherweise zur Verfügung stellte.

F342 Alle berechneten Werte sind im Plan auf der rechten Seite eingetragen. Die Tiefe ist bei allen Kabeln gleich. Sie kann dem Querschnitt oder der Ansicht von oben (Kopiervorlagen) entnommen werden.
Die Pläne sind Nachzeichnungen realer Pläne, die uns von Herrn Andreas Kilchenmann, Stadtingenieur von Winterthur, zur Verfügung gestellt wurden. Die Grössen sind tatsächlich so angeschrieben, wie wir sie zeigen: Für unser Schuldenken mit ziemlich seltsamen Einheitsangaben. Wir haben diese Einheiten absichtlich so übernommen, um zu zeigen, dass es im Alltag immer wieder Kreativität und einen gesunden Menschenverstand braucht, um Angaben irgendwelcher Art richtig zu interpertieren und Probleme zu lösen.

Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

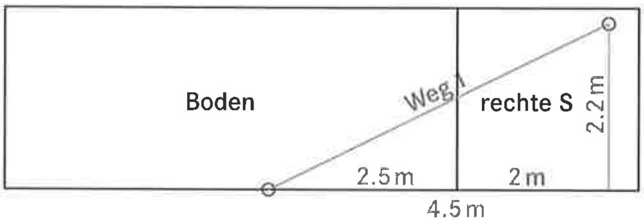


F343

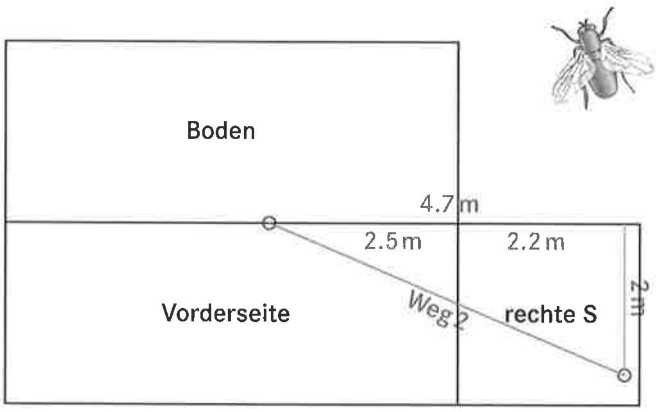


Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

Gecko
Für den Gecko drängen sich zwei mögliche Wege auf, die er auf ihre Länge überprüfen muss.



Weg 1:
Über den Boden und die Seitenwand.
Weg 1 $= \sqrt{4.5^2 + 2.2^2}$ m
$\approx$ **5.01 m**



Weg 2:
Über die (nicht sichtbare) Vorderseite und die Seitenwand.
Weg 2 $= \sqrt{4.7^2 + 2^2}$ m $\approx$ **5.11 m**

Der Gecko wählt Weg 1.

Spinne
Der Weg der Spinne besteht aus zwei Teilen.

Teil 1: Zurück in die Mitte
«Körperdiagonale eines Quaders» mit den Abmessungen (3 m - 2.5 m) = 0.5 Breite, 1.2 m Tiefe und 1.2 m Höhe.
Teil 1 $= \sqrt{0.5^2 + 1.2^2 + 1.2^2}$ m = 1.769... m

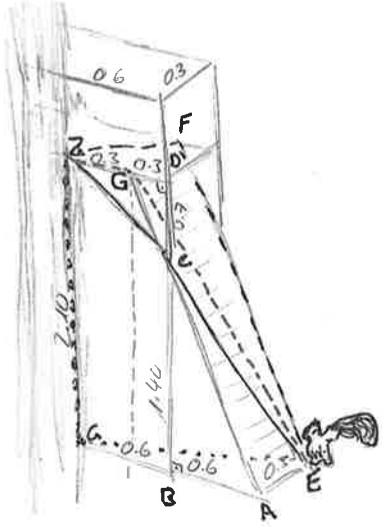
Teil 2: Von der Mitte zur Fliege
«Körperdiagonale eines Quaders» mit den Abmessungen 3 m Breite, (1.2 m - 0.2 m) = 1 m Tiefe und (1.2 m - 0.4 m) = 0.8 m Höhe.
Teil 2 $= \sqrt{3^2 + 1^2 + 0.8^2}$ m = 3.261... m

Weg der Spinne total $\approx$ **5.03 m**.

Der **Gecko** hat den kürzeren Weg!

Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

F344 **a** Das rechtwinklige Dreieck ABC ist doppelt so hoch wie das rechtwinklige Dreieck CDE. Es ist demnach auch doppelt so breit: AB = 60 cm.



Vier Wegbeispiele:

Weg 1:
Direkt zu Baumstamm und dann vertikal nach oben.
Weg 1 = EG + GZ
$= \sqrt{0.3^2 + 1.2^2}\,\text{m} + 2.1\,\text{m} \approx$ **3.34 m**

Weg 2:
Den hinteren Leiterholm hoch und oben quer über die Plattform.
Weg 2 = EF + FZ
$= \sqrt{0.9^2 + 2.1^2}\,\text{m} + \sqrt{0.3^2 + 0.3^2}\,\text{m} \approx$ **2.71 m**

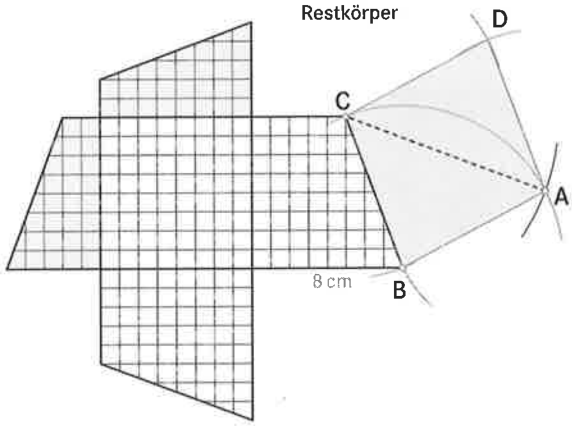
Weg 3:
Die Leiter schräg bis zu C hoch und dann dem unteren Holz entlang direkt zu Z.
Weg 3 = EC + CZ
$= \sqrt{0.3^2 + 0.6^2 + 1.4^2}\,\text{m} + \sqrt{0.7^2 + 0.6^2}\,\text{m} \approx$ **2.47 m**

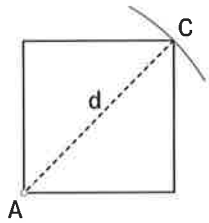
Weg 4:
Die Leiter schräg bis zu G hoch und dann der Plattform entlang zu Z.
Weg 4 = EG + GZ
$= \sqrt{0.3^2 + 0.9^2 + 2.1^2}\,\text{m} + 0.3\,\text{m} \approx$ **2.60 m**

Weg 3, schräg über die Leiter bis zu C, ist der kürzeste.

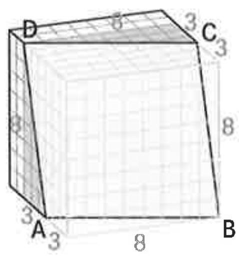
b –

F345 **a**





Die Schnittfigur ist ein Rhombus. Um diesen zu zeichnen, muss man seine Seitenlänge und eine Diagonale oder dann beide Diagonalen kennen. Seitenlänge und Diagonale AC lassen sich dazu konstruktiv oder rechnerisch bestimmen, die Länge der Diagonale BD nur rechnerisch.



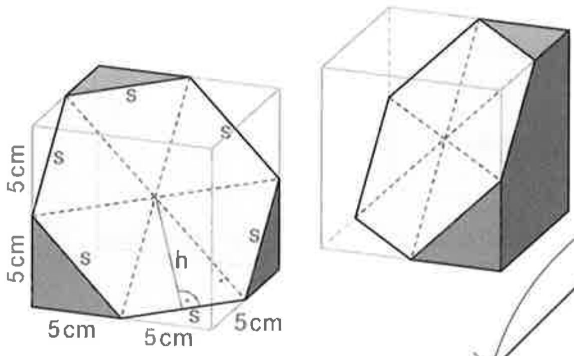
b s = AB = BC = CD = AD = $\sqrt{3^2 + 8^2}\,\text{cm} = \sqrt{73}\,\text{cm} = 8.544\ldots\,\text{cm}$
u = 4 · s ≈ **34.18 cm**

AC = $8\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} = 11.313\ldots\,\text{cm}$ (Diagonale in Quadrat)

BD = $\sqrt{8^2 + 6^2 + 8^2}\,\text{cm} = 12.806\ldots\,\text{cm}$ (Körperdiagonale in 8 x 6 x 8 Quader)

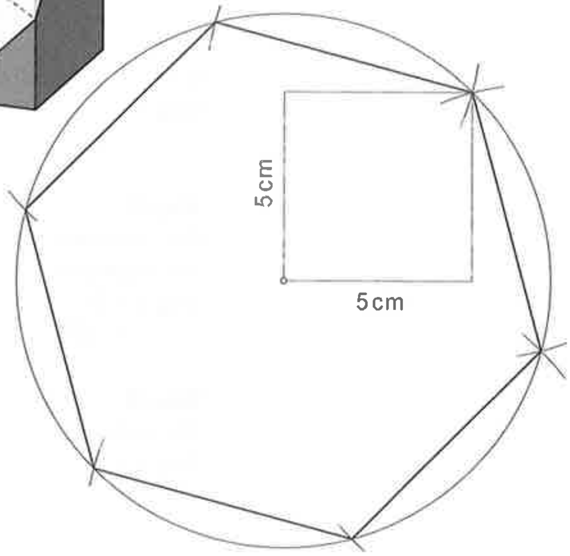
$\mathbf{A_{ABCD}}$ = AC · BD : 2 ≈ **72.44 cm²**

F346



Es ensteht ein regelmässiges. Sechseck mit der **Kantenlänge** $s = 5\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} = 7.071...\,\text{cm} \approx$ **7.07 cm.**

Hier im Massstab 1:2.



Die Fläche lässt sich in 6 gleichseitige Dreiecke mit der Seite s unterteilen. Höhe eines solchen Dreiecks:

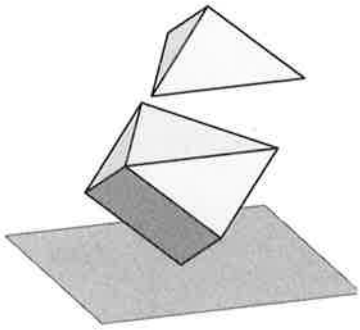
$h = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = 6.123...\,\text{cm}$

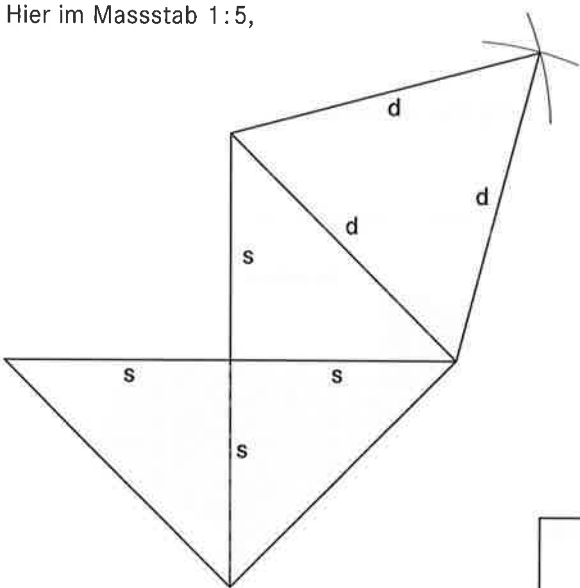
$A_{\triangle} = s \cdot h : 2 = 21.650...\,\text{cm}^2$

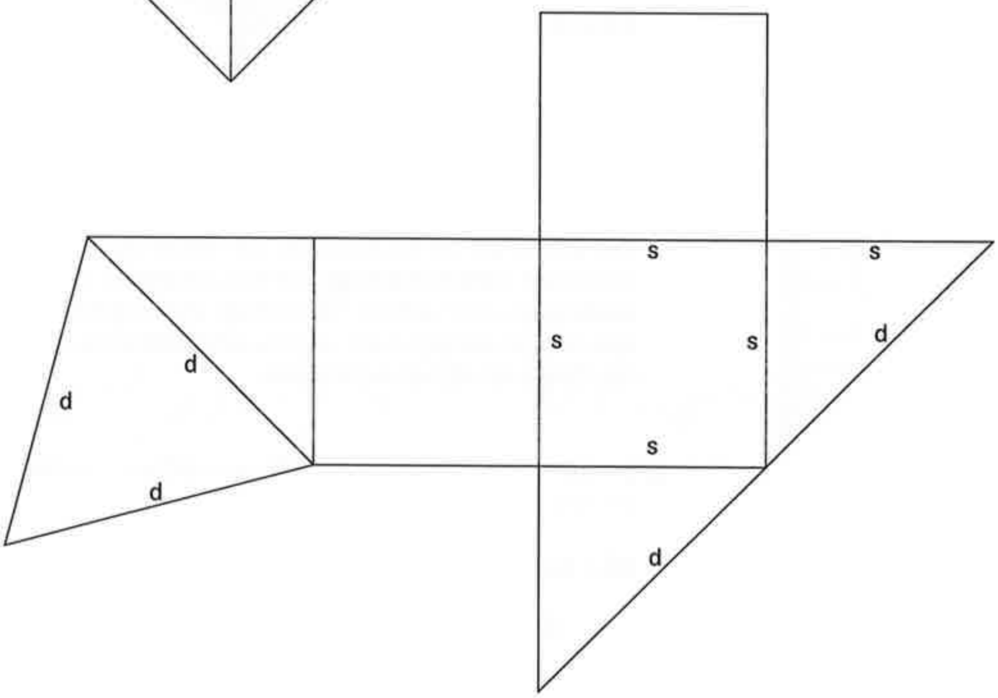
$\mathbf{A_{Sechseck}} = 6 \cdot A_{\triangle} = \mathbf{129.90\,cm^2}$

F347

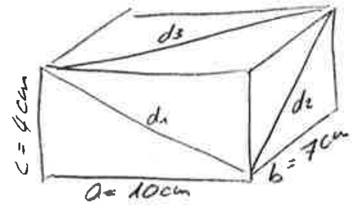
Hier im Massstab 1:5,







F348 **a** $a = 10\,\text{cm}$ $b = 7\,\text{cm}$ $c = 4\,\text{cm}$



$\mathbf{d_1} = \sqrt{10^2+4^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{10.77\,cm}$
$\mathbf{d_2} = \sqrt{7^2+4^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{8.06\,cm}$
$\mathbf{d_3} = \sqrt{10^2+7^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{12.21\,cm}$

$\mathbf{k} = \sqrt{10^2+7^2+4^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{12.85\,cm}$

b $\mathbf{k} = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 18\,\text{cm}$
$a^2+b^2+c^2 = 324\,\text{cm}^2$

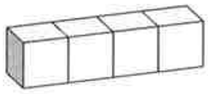
Es gibt beliebig viele Möglichkeiten. Beispielsweise:

$324 = 1 + 1 + 322$	$\Rightarrow$	$a = 1$	$b = 1$	$c = \sqrt{322}$
$324 = 16 + 4 + 304$	$\Rightarrow$	$a = 4$	$b = 2$	$c = \sqrt{304}$
$324 = 144 + 144 + 36$	$\Rightarrow$	$a = 12$	$b = 12$	$c = 6$

F349 Kantenlänge eines kleinen Würfelchens = a

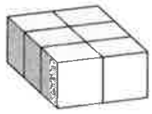
«Stange»:
1. Flächendiagonale = $\sqrt{(4a)^2 + a^2} = a\sqrt{17}$
2. Flächendiagonale = $\sqrt{(4a)^2 + a^2} = a\sqrt{17}$
3. Flächendiagonale = $\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Köperdiagonale = $\sqrt{(4a)^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{18}$



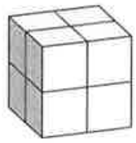
«Quader»:
1. Flächendiagonale = $\sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$
2. Flächendiagonale = $\sqrt{(3a)^2 + a^2} = a\sqrt{10}$
3. Flächendiagonale = $\sqrt{(3a)^2 + (2a)^2} = a\sqrt{13}$

Köperdiagonale = $\sqrt{(2a)^2 + (3a)^2 + a^2} = a\sqrt{14}$



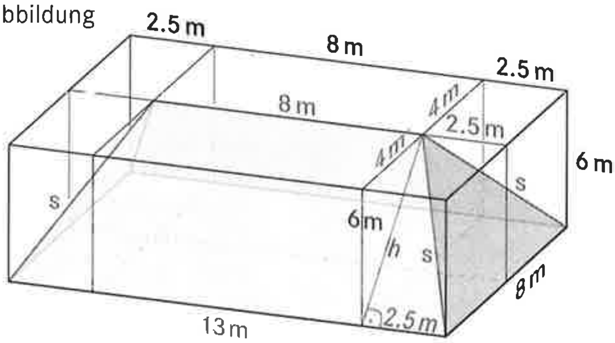
Würfel: Alle Flächendiagonalen = $\sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = a\sqrt{8}$

Köperdiagonale = $2a\sqrt{3}$



Die «Stange» hat die längste Körperdiagonale, der Würfel die kürzeste.
Die «Stange» hat sowohl die längste wie auch die kürzeste Flächendiagonale.

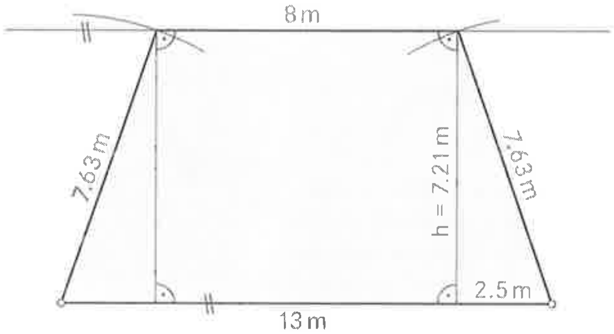
F350 Dachfirst und untere Kanten: siehe Abbildung

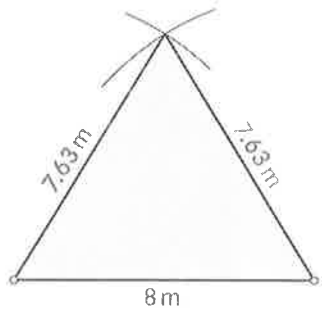


Die vier schräg nach oben verlaufenden Kanten s sind alle gleich lang:
$\mathbf{s} = \sqrt{2.5^2+4^2+6^2}\,\text{m} = 7.632\ldots\,\text{m}$
$\approx \mathbf{7.63\,m}$

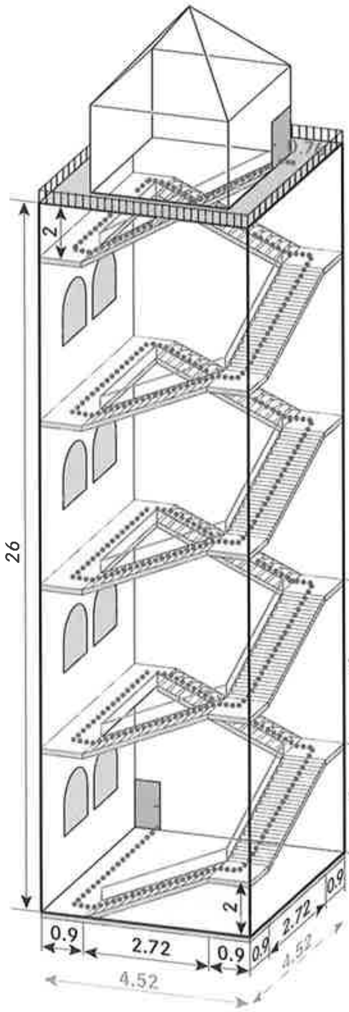
Um die trapezförmige Fläche zu zeichnen, ist es hilfreich deren Höhe h kennen:
$\mathbf{h} = \sqrt{6^2+4^2}\,\text{m} \approx \mathbf{7.21\,m}$
(oder $\mathbf{h} = \sqrt{s^2-2.5^2}\,\text{m} \approx \mathbf{7.21\,m}$)

Hier abgebildet im Massstab 1: 200, günstig wäre auch 1: 100.



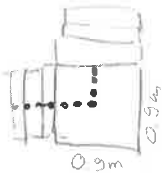


F351 Der **Weg** setzt sich zusammen aus:
12 · Treppenlänge «normale» Treppe
1 · Treppenlänge letzte Treppe
1 · Weg zur 1. Treppe
8 · Weg auf quadratischer Plattform
4 · Weg auf langer Plattform
(1 · Weg auf Aussichtsplattform)



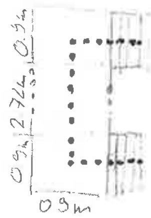
Treppenlänge t_1 «normale» Treppe:
Höhenunterschied h: $h = 2\,m$
Horizontaldistanz d: $d = 2.72\,m$

$$t_1 = \sqrt{d^2 + h^2} \approx \mathbf{3.38\,m}$$



Treppenlänge t_2 letzte Treppe:
Körperdiagonale in Quader mit
Breite a: $a = 4.52\,m - 0.9\,m - 0.76\,m = 2.86\,m$
Tiefe b: $b = a = 2.86\,m$
Höhe c: $c = 2\,m$

$$t_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \approx \mathbf{4.51\,m}$$

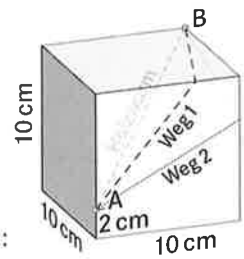


Weg zur ersten Treppe:	**e**	**= 4.52 m**
Weg auf quadratischer Plattform:	**q**	**= 0.9 m**
Weg auf langer Plattform:	**p**	**= 4.52 m**
Weg auf Aussichtsplattform:	**s**	**= 0.38 m**

Gesamter Weg: $w = 12 \cdot t_1 + t_2 + e + 8 \cdot q + 4 \cdot p + s$
$\approx \mathbf{75.25\,m}$ (ohne s: **74.87 m**)

Der Weg auf die Aussichtsterrasse ist ungefähr 75 m lang.

F352 **a)** **Holzwurm:**
Sein direktester Weg entspricht der Länge der Körperdiagonale in einem 10 cm x 10 cm x 8 cm Quader.



$$\mathbf{Weg}_{\mathbf{Holzwurm}} = \sqrt{10^2 + 10^2 + 8^2}\,cm \approx \mathbf{16.25\,cm}$$

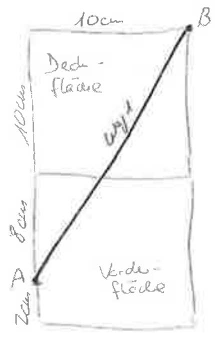
Ameise:
Kürzester Weg mit Hilfe eines Netzes bestimmen. In Frage kommen:
Weg 1: Über die Vorderfläche und die Deckfläche.
Weg 2: Über die Vorderfläche und die rechte Seitenfläche.
Weg 3: Über die linke Seitenfläche und die Deckfläche: gleich lang wie Weg 1.
Weg 4: Über die linke Seitenfläche und die Hinterfläche: gleich lang wie Weg 2.

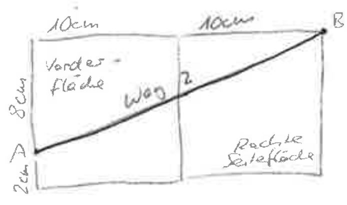
Weg 1: $\sqrt{18^2 + 10^2}\,cm \approx 20.59\,cm$

Weg 2: $\sqrt{8^2 + 20^2}\,cm \approx 21.54\,cm$

Weg 1 ist der kürzere, also:

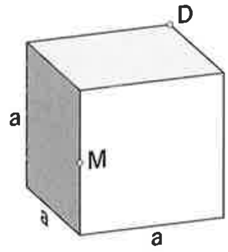
$$\mathbf{Weg}_{\mathbf{Ameise}} \approx \mathbf{20.59\,cm}$$





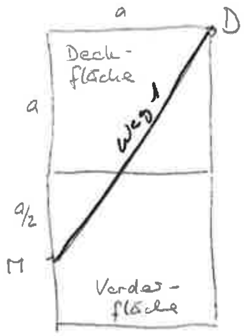
b) **Ja, falls** der Punkt nicht in der gleichen Seitenfläche wie A liegt.
In diesem Fall führt der Weg der Ameise immer über eine Kante und die beiden Wege bilden ein Dreieck.

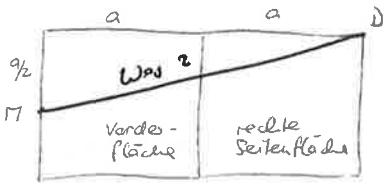
Holzwurm:



$\textbf{Weg}_{\textbf{Holzwurm}} = \sqrt{a^2 + a^2 + (0.5a)^2} = \mathbf{1.5\,a}$

Ameise:
Es sind wieder die Wege 1 und 2 zu prüfen.





Weg 1: $\sqrt{(1.5)^2 + a^2} = \sqrt{3.25} \cdot a = 1.802\ldots a \approx 1.80\,a$

Weg 2: $\sqrt{(0.5)^2 + (2a)^2} = \sqrt{4.25} \cdot a \approx 2.06\,a$

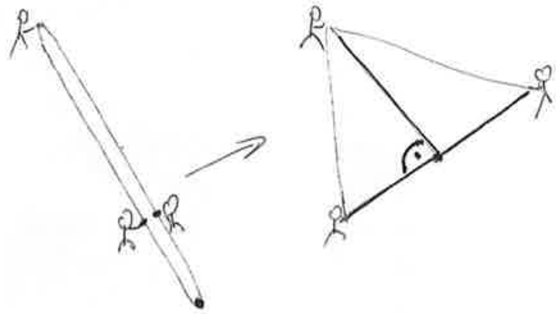
$\textbf{Weg}_{\textbf{Ameise}} = \sqrt{\mathbf{3.25}} \cdot \mathbf{a} \approx \mathbf{1.80\,a}$

Der Weg der Ameise ist **um 0.3 a länger** als der Weg des Holzwurms.
Oder auch:
Der Weg der Ameise ist 1.8a : 1.5a = **1.2 mal so lang** wie der Weg des Holzwurms.

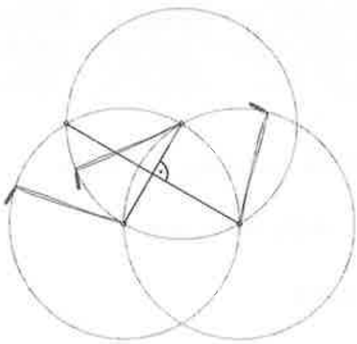
F4 Auf den Spuren des Satzes

F41 **Drei Verfahren** sind durch überlieferte Beschreibungen bekannt.

1. Mit Hilfe der Schnur ein gleichschenkliges Dreieck aufspannen. Dessen Symmetrieachse und die Basis bilden einen rechten Winkel.
Beispielsweise:
- Mitte der Schnur markieren.
- Von der Mitte aus zwei gleich lange Abschnitte nehmen
$\rightarrow$ Eckpunkte der Basis.



2.



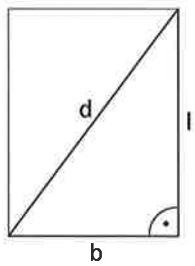
Mit Hilfe der Schnur drei Kreise mit demselben Radius «zeichnen» und geeignete Schnittpunkte verbinden.

3. Das bekannte Verfahren mit der Knotenschnur. Schnur mit Knoten oder andern Markierungen Markierungen in 12 gleich lange Abschnitte teilen. Ein Dreieck, aufgespannt mit 3, 4 und 5 Abschnitten wird ein rechtwinklig.

Knotenschnur:
Um das Verfahren auszuprobieren empfiehlt es sich, eine ca. 5m lange, nicht zu dicke Schnur zu nehmen und alle 10 cm einen Knoten zu machen (insgesamt mindestens 40). Damit erhält man neben dem 3/4/5-er Tripel noch andere Möglichkeiten.

Umkehrsatz:
An dieser Stelle könnte der Umkehrsatz thematisiert werden.

F42 **a** Es geht um ein Rechteck, von dem die lange Seite und die Diagonale bekannt sind. Die Breite wird gesucht.



Danach folgt ein Rezept, wie man die Breite berechnen kann. Dabei wird die Aussage des Satzes $b^2 = d^2 - l^2$ von Pythagoras verwendet, ohne dass diese als Gleichung angewendet wird.

b Die überlieferten Tontafeln der Babylonier enthalten nur **Rezepte**, die aufzeigen wie man in gewissen Situationen zu einer Lösung kommt. Sie zeigen nie auf, was warum zu tun ist. Begründungen für Lösungsverfahren sind bis jetzt nirgends aufgefunden worden.
Man geht heute allerdings davon aus, dass die gefundenen Tafeln den Anwendern dienten, die kein besonderes theoretisches Wissen benötigten. Die Lösungen und Verfahren sind so vielfältig, dass es kaum möglich ist, diese ohne theoretisches Wissen zu finden, das von einzelnen «Denkern» aufgebaut wurde.

Geometrie war in den alten Hochkulturen eines unter vielen **Anwendungsgebieten** einer sehr **rechnerisch ausgerichteten Mathematik**. Gesichert sind denn auch viele Tontafeln mit Zahlentabellen, auf welche die Schreiber – beispielsweise beim Aufschreiben von Aufgaben – jeweils zurückgreifen konnten.
Bei ihren Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken benutzten die Babylonier im Allgemeinen nur ganze Zahlen. Die Zahlentabellen enthielten dazu beispielsweise eine ganze Reihe von solchen ganzzahligen Tripeln für Länge, Breite und Diagonale.

Geschichtlicher Abriss:

Die Babylonier lebten ungefähr von 2000 v. Chr. bis 200 v. Chr. in der sehr fruchtbaren Region zwischen Euphrat und Tigris (Mesopotamien). Ab etwa 1900 v. Chr. war Babylon ihre Hauptstadt.
Das alte babylonische Reich löste das Reich der Sumerer und Akkader ab. Die Sumerer hatten bereits vor 3500 v. Chr. in diesem Gebiet eine sehr hoch stehende Kultur entwickelt (Städte, Bewässerungssysteme, Administration, Rechtswesen, Postwesen...). Die Akkader sind später zugewandert.
Die Babylonier übernahmen einige Errungenschaften der Sumerer, insbesondere deren Zahlensystem (60-er System) sowie deren Art auf Tontafeln zu schreiben. Dabei wurden die Zeichen mit einem Stift in Keilschrift in nasse Tontafeln geritzt und diese anschliessend in der heissen Sonne gebrannt.

Die meisten der überlieferten Tontafeln handeln von Inhalten, die keine allzu grossen mathemaitschen Kenntnisse verlangen. Beispielsweise Berechnungen, wie viele Arbeiter nötig sind, um einen Kanal für die Bewässerung und den Warentransport zu bauen. Einige zeigen aber doch erstaunliche mathematische Erkenntnisse:

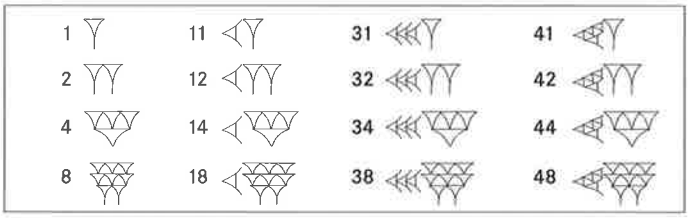
- Viele Tafeln sind eigentliche Rechnungs-Hilfstabellen. Sie enthalten beispielsweise Ansammlungen von Quadrat- und Kubikzahlen, auf die bei der Multiplikation (mit Hilfe von binomischen Formeln) zurückgegriffen werden konnte .
- Einige Tafeln zeigen auf, dass sich die Babylonier durchaus mit geometrischen Figuren und deren Berechnungen beschäftigten, beispielsweise mit rechtwinkligen, rechtwinklig-gleichschenkligen und gleichseitigen Dreiecken, mit Rechtecken, Quadraten und Rhomben. Sie kannten den (später so benannten) Thaleskreis wie auch den (später so benannten) Satz von Pythagoras. Sie hatten Formeln entwickelt, um pythagoräische Tripel zu berechnen und hatten sogar Näherungsverfahren erfunden, um $\sqrt{2}$ zu bestimmen.
  Die Babylonier konnten auch Flächen und sogar Körpervolumen (bis zum Pyramiden- und Kegelstumpf) berechnen, Grundrisspläne von Bauten erstellen und Vieles mehr.

Das babylonische Zahlensystem

Ihr Zahlensystem bauten die Babylonier auf dem Zahlensystem der Sumerer auf. Sie übernahmen von diesen die **60-er Einteilung**, bauten es aber zu einem **Stellenwertsystem** aus.

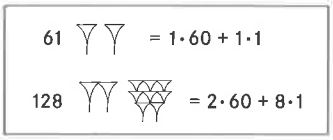
Obwohl das babylonische Zahlensystem auf der 60-er Einteilung basiert, enthält es auch Spuren von einem Zehnersystem. Die Zahlen 1 bis 59 (Null war nicht bekannt!) wurden nämlich mit nur zwei Zeichen gebildet: Einem Zeichen für «eins» 𒁹 und einem Zeichen für «zehn» 𒌋.

Beispiele:



Als Quellen benutzten wir unter anderem verschiedene Texte von J. J. O'Connor und E. F. Robertson aus dem Archiv der St. Andrews University in Schottland.

Die Position der einzelnen Zeichen innerhalb des Stellenwertsystems wurde mit Zwischenräumen verdeutlicht.



→

→ **Keilschrift Tontafel (Cuneiform Tablet) BM 34568, die im Buch abgebildet ist:**

Die Keilschrift Tafel BM 34568 wird im British Museum in London aufbewahrt. Sie stammt aus der späten seleukidischen Zeit, ist aber leider nicht datiert.

Diese Tafel gilt nicht als eine der Wichtigsten, die gefunden wurden. Sie zeigt aber sehr schön, wie damals geometrische Probleme gelöst und weitergegeben wurden.

Die Tafel enthält 19 Aufgaben zum Rechteck bzw. zum rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck.
Sie behandelt - frei durchmischt – verschiedene Typen:
1. Ähnliche Aufgaben wie das angegebene Beispiel.
2. Ähnliche Aufgaben wie das angegebene Beispiel, deren Lösungsweg aber vordergründig ohne Pythagoras auskommt.
3. Beispiele, bei denen die Summe zweier Seiten und die dritte Seite (oder nochmals eine Summe) gegeben ist.
4. Beispiele mit gegebenen Flächen.
5. Einzelne andere Aufgaben (siehe Rohr an der Wand **F43**).

Bei den Aufgaben vom 2. und 3. Typ ist das Lösungsvorgehen auf den ersten Blick nicht einsichtig.
In einer Aufgabe vom **2. Typ** wird beispielsweise die Diagonale d eines Rechtecks mit der Breite b = 3 und der Länge l = 4 folgendermassen berechnet:
$d = \frac{1}{2} \cdot l + b$ oder auch $d = \frac{1}{3} \cdot b + l$

Dies stimmt tatsächlich für alle Dreiecke, welche die gleiche Form haben, wie das angegebene Dreieck mit den Katheten 3 und 4 und der Hypotenuse 5.
Zieht man in die Überlegungen mit ein, dass von den Babyloniern für die Länge l, die Breite b und die Diagonale d stets pythagoräische Tripel der Form

$$l = (p^2 - q^2), \quad b = 2pq \quad \text{und} \quad d = (p^2 + q^2)$$

verwendet wurden, wobei $p>q$ ist, p und q teilerfremd und nicht beide ungerade sind, so kann man tatsächlich für jedes teilerfremde pythagoräische Tripel einen Lösungsweg finden, bei dem ein bestimmter Teil einer Seite zum andern addiert werden kann.

Bei den Aufgaben vom **3. Typ** lässt sich die Richtigkeit der angegebenen Rezepte zeigen, indem man das beschriebene Vorgehen in eine algebraische Formel übersetzt und mit Hilfe von $d^2 = l^2 + b^2$ vereinfacht.

Beispiel: l + d und b sind gegeben, es soll l und d berechnet werden.

Das Rezept gibt vor, $(l+d)^2$ zu berechnen, davon b^2 zu subtrahieren, das Ergebinis durch zwei und schliesslich noch durch (l+d) zu teilen, um l zu erhalten.

Die folgende Rechnung zeigt, dass dieses Vorgehen tatsächlich richtig ist:

$$\begin{aligned}\left((l+d)^2 - b^2\right) : 2 : (l+d) &= \left(l^2+2ld + d^2 - b^2\right) : 2(l+d)\\ &= \left(l^2+2ld + l^2 + b^2 - b^2\right) : 2(l+d)\\ &= \left(2l^2+2ld\right) : 2(l+d)\\ &= 2l(l+d) : 2(l+d)\\ &= l\end{aligned}$$

Beschriftung der Tontafel:
Vorder- und Rückseite bestehen aus zwei Kolonnen.
Vorne wurde zuerst die linke, dann die rechte Kolonne beschrieben.
Dann wurde die Tafel über Kopf gekehrt.
Hinten wurde dann zuerst die rechte und erst danach die linke Kolonne beschrieben.
Die linke Kolonne ist zum Teil stark beschädigt.

Auf der folgenden Seite sind Vorder- und Rückseite in **Originalgrösse** abgebildet. →

Wir bedanken uns bei **Christopher Walker vom British Museum in London**, der uns freundlicherweise umfassendes Material und Bilder des Tablets BM 34568 zur Verfügung stellte.

Quellen:
O. Neugebauer, Kopenhagen, Math. Keilschrifttexte, 3. Teil, Springer Verlag, 1937

Papers, presented by the soviet delegation at the XXIII international congress of orientalists, 1954

Vorderseite

Rückseite

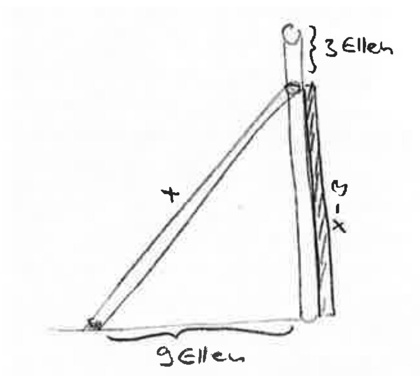
Die Aufgabe setzt die Kenntnis voraus, wie man das **Quadrat einer Summe (bzw. das Produkt von zwei Summen)** berechnet.
Sie führt auf eine quadratische Gleichung, bei der das Quadrat aber wieder wegfällt.

F43 Diese Aufgabe wurde in ähnlicher Form bereits tausend Jahre früher formuliert.
Sie gehört zu den **Klassikern**. In abgewandelter Form ist sie auch in **F247** zu finden.

$x^2 = 9^2 + (x-3)^2$
$x^2 = 9^2 + x^2 - 6x + 9 \qquad | - x^2$
$0 = 81 - 6x + 9 \qquad | + 6x$
$6x = 90 \qquad | : 6$
$x = 15$

Das Rohr ist **15 Ellen** lang.

$15 - 3 = 12$
Die Wand ist **12 Ellen** lang.



F44 30 ≙ ½ 1,24,51,10 ≙ 1.414212963 42,25,35 ≙ 0,707168415

- 1.414212963 entspricht ungefähr $\sqrt{2}$ = 1.4142135623...
dem **Faktor**, der bei der **Diagonalenformel** vorkommt: $d = s\sqrt{2}$,
wobei s Seite und d Diagonale eines Quadrates sind.

  0,707168415 ist dann die Länge der Diagonale: ½ · 1.414212963 = 0,707168415

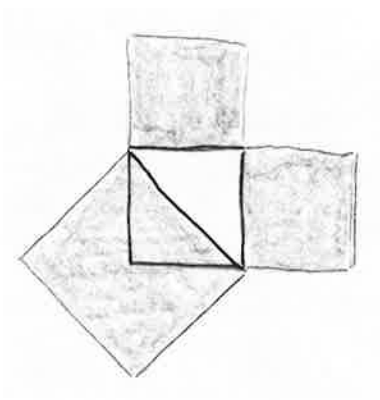
- $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.
Lange hat man angenommen, dass diese Zahlen erst in der neueren Zeit bekannt wurden. Offensichtlich kannten aber die Babylonier diese Zahl bereits und entwickelten auch Verfahren, mit denen sie einen guten Näherungswert bestimmen konnten.

  Wir «bestimmen» irrationale Zahlen heute einfach mit dem Taschenrechner.

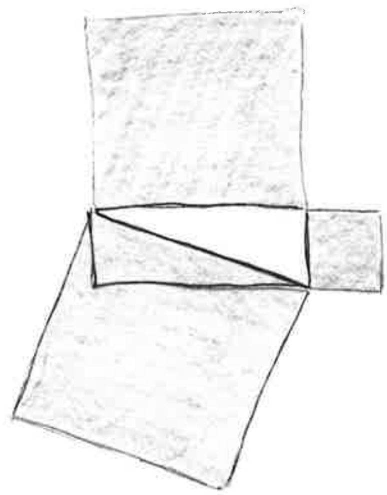
- ½ ist die einzige Grösse für die Seite, die als Diagonale den Kehrwert von $\sqrt{2}$ liefert:

  $d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

F45

- 

  Es handelt sich hier um einen Spezialfall des Satzes von Pythagoras.
Mit heutigen Kenntnissen gilt (Quadratseite s, Diagonale d): $d = s \cdot \sqrt{2}$ $\qquad d^2 = (s \cdot \sqrt{2})^2 = 2s^2$



- Mit dem letzten Teil des Satzes ist die Summe des Flächenquadrates über der vertikalen und der horizontalen Seite gemeint.
Dies ist der Satz von Pythagoras.

→

Als Quellen benutzten wir unter anderem verschiedene Texte von J. J .O'Connor und E. F. Robertson aus dem Archiv der St. Andrews University in Schottland.

→ **Geschichtlicher Abriss:**

Die meisten Geschichtsschreibungen über die Mathematik der indischen Kulturen beginnen mit der Geometrie, die in den Sulbasutras zwischen 800 - 200 v. Chr. beschrieben ist. Tatsächlich weiss man heute, dass Altar-Konstruktionen schon viel früher beschrieben wurden und dass in den indischen Kulturen bereits im 3. Jahrtausend v. Chr. Mathematik und Geometrie im Zusammenhang mit astronomischen Beobachtungen eingesetzt wurden.
Die ältesten bekannten indischen Kulturen (Harappa, Mohenjo-daro) entstanden um 2 500 v. Chr. im heutigen Pakistan. Sie kannten bereits ein einheitliches Gewichts- und Masssystem, das auf der Dezimaleinteilung beruhte. Diese Kulturen verschwanden ungefähr 1 700 v. Chr. Warum ist nicht bekannt.

Die nächsten überlieferten Funde aus den indischen Kulturen stammen von ca. 1 500 v. Chr. aus der Region des heutigen Iran. Damals entstanden die ersten so genannten Vedas: Heilige Texte, die Rezitationen und Gesänge enthalten, die bei Opferdarbringungen und andern religiösen Riten eingesetzt wurden.
Den Vedas wurden die Sulbasutra beigefügt. Sulbasutras sind Schriften, die genaue Vorschriften enthalten, wie die Altäre für die Opferdarbringung konstruiert werden müssen. Im vedischen Glauben mussten die Altäre nach genauesten Massen konstruiert werden, damit die Opfer von den Göttern akzeptiert wurden.
Je nach Art der Opferdarbringung (öffentlich oder familiär) waren verschiedene Typen von Altären notwendig.

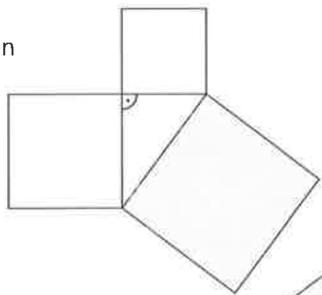
Die Geometrie in den Sulbasutras (= Anleitungen zur Konstruktion von Altären)

Über die Schreiber der Sulbasutras ist wenig bekannt. Man kennt ihre Namen, ihre Texte und die ungefähre Zeitperiode, in der sie lebten. Man geht aber davon aus, dass die Schreiber die Texte nicht einfach aufschrieben, sondern auch selbst entwickelten und berechneten, dass sie eine Art mathematisch gebildete Priester waren, die Mathematik nur der religiösen Praxis wegen betrieben.

Es ist auch nicht bekannt, ob die Mathematik einzig und allein dazu entwickelt wurde, um die beschriebenen Altäre zu konstruieren, oder ob sie noch anderweitig entwickelt und eingesetzt wurde.
Die Sulbasutras selbst liefern keine Herleitungen oder Beweise der beschriebenen Regeln. Sie setzen zudem exakte neben approximative Methoden (beispielsweise Näherungswerte von $\sqrt{2}$ und auch von Π), ohne dabei einen Unterschied in der Handhabung zu machen. Es ist nicht bekannt, ob dieser Unterschied den Schreibern überhaupt bewusst war.

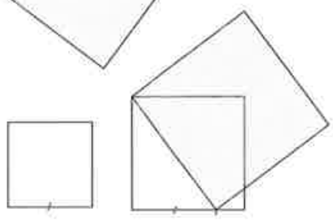
Eine der wichtigsten Sulbasutras ist die so genannte **Baudhayana Sulbasutra**, die ungefähr um 800 v. Chr. geschrieben wurde. Die Beschreibung der Verdoppelung eines Quadrates von **F45 1** stammt daraus. **F45 2** stammt aus der **Katyayana Sulbasutra**, die ungefähr um 200 v. Chr. geschrieben wurde.
F49 schliesslich stammt aus der **Apastamba Sulbasutra**, die ungefähr um 600 v. Chr. geschrieben wurde und aus mathematischer Sicht die Interessanteste ist.

F46 **Lösung mit Pythagorasfigur**



- Mit dem Seil und einem der in **F41** beschriebenen Verfahren einen rechten Winkel erzeugen.
- Die beiden Quadratseiten mit der Schnur abtragen und die Endpunkte verbinden.

Lösung wie in den Sulbasutra beschrieben

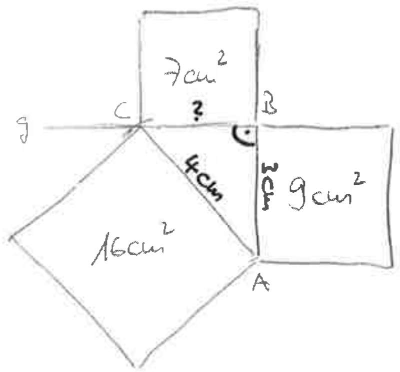


- Auf einer Seite des grossen Quadrates mit der Schnur die Seite des kleinen Quadrates abtragen.
- Den erhaltenen Punkt mit der «richtigen» Ecke des grossen Quadrates verbinden.

Als Seilkonstruktion ist diese Variante natürlich viel eleganter.

F47 $16\,cm^2 - 9\,cm^2 = 7\,cm^2$

Die Quadrate mit $7\,cm^2$ bzw. $9\,cm^2$ Fläche müssen in der Pythagorasfigur die Kathetenquadrate sein. Das Quadrat mit $16\,cm^2$ ist Hypotenusenquadrat.

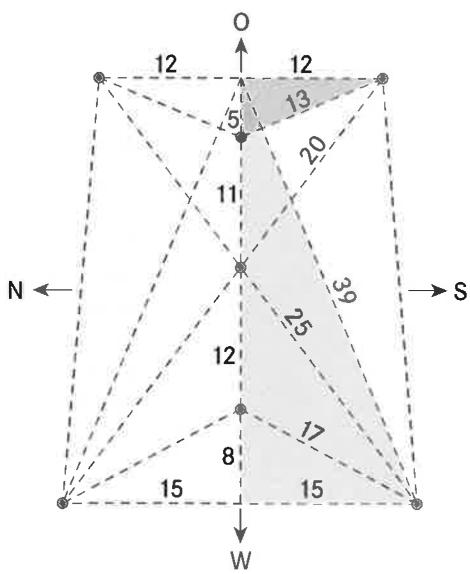


Konstruktionsbericht 1:
- Quadrat mit 3 cm langen Seiten $\rightarrow$ AB
- $g \perp AB$ durch C
- $k(A, r = 4\,cm) \cap g \rightarrow C$
- Quadrat über CB und allenfalls über AC ergänzen

Konstruktionsbericht 2:
- Quadrat mit 4 cm langen Seiten $\rightarrow$ AC
- Thaleskreis über AC
- $k(A, r = 3\,cm) \cap$ Thaleskreis $\rightarrow$ B
- Quadrat über CB und allenfalls über AB ergänzen

F48 Beispielsweise als Summe aus Quadraten der Fläche $9\,cm^2$ und $1\,cm^2$ wie in **F46**. Es sind aber auch mehrschrittige, individuelle Lösungen möglich. Prüft sie gegenseitig.

F49 Es genügt, die beiden rechtwinkligen Dreiecke mit den Seiten 8,15,39 und 5,12,14 mit Hilfe einer Schnur zu erstellen. Damit ist bereits die eine Hälfte des Altares bestimmt.
Die Zweite Hälfte kann dann auf die gleiche Art oder mit Hilfe der Achsensymmetrie erstellt werden.



F410 **Pythagoras und sein Geheimbund**
Angenommen wird, dass Pythagoras bereits als Kind mit seinem Vater weit gereist ist und gut ausgebildet wurde. Als junger Mann soll er auch den griechischen Mathematiker Thales getroffen haben und von dessen Schüler Anaximander in Geometrie und Kosmologie ausgebildet worden sein. Später hielt er sich vermutlich längere Zeit in Ägypten und dann als Kriegsgefangener in Babylonien auf. Man nimmt an, dass Pythagoras den nach ihm bennanten Satz in dieser Zeit kennen gelernt hat. Sowohl den Ägyptern als auch den Babyloniern war der Zusammenhang der Seitenquadrate im rechtwinkligen Dreieck bereits viel früher bekannt.
Nach seiner Gefangenschaft kehrte Pythagoras nach Samos zurück, wanderte aber bald nach Süditalien aus. Im heutigen Crotone gründete er eine philosophisch-religiöse Schule, eine Art Geheimbund, in dem strenge Verhaltensregeln galten. Die ständigen Mitglieder (innerer Zirkel) lebten in der Schule, wurden zur Geheimhaltung und Loyalität verpflichtet, durften nichts aufschreiben, mussten sich vegetarisch ernähren und hatten keinen eigenen Besitz. Sie wurden angeblich von Pythagoras selbst unterrichtet. Männer und Frauen waren gleichberechtigt zugelassen.

Die Mitglieder des äusseren Zirkels kamen nur tagsüber in die Schule, durften eigenen Besitz haben und mussten nicht vegetarisch leben.

Pythagoras starb vermutlich ungefähr 475 v. Chr in einem anderen süditalienischen Ort. Die genauen Umstände sind nicht bekannt. Es gibt widersprüchliche Berichte. Man nimmt aber an, dass sich seine Schule immer stärker in die Politik einmischte. Dies soll schliesslich zu einem Aufstand gegen seinen Geheimbund geführt haben, der ihn veranlasste zu fliehen. Einige Geschichtsschreiber berichten, er habe in der Fremde Selbstmord begangen, andere berichten, er sei wieder zurückgekommen und habe noch lange gelebt.

Eigentliche Arbeiten von Pythagoras sind nicht überliefert. Es gibt zwar mathematische Arbeiten, die seiner Schule zugeschrieben werden, doch es galt das Gesetz der Gemeinschaft. Man geht davon aus, dass Pythagoras keinen Beweis des Satzes geliefert hat. Eventuell hat ihn einer seiner Schüler bewiesen. Überliefert ist aber nur ein ca. 250 Jahre später entstandener Beweis von Euklid.

Pythagoras war nicht Mathematiker im heutigen Sinne. Er war Musiker, Philosoph, Astronom und Mathematiker in einem und versuchte vor allem, Gesetzmässigkeiten der Natur zu begründen. Er war der Überzeugung, dass sich alles auf einfache Beziehungen zwischen ganzen Zahlen zurückführen lässt. Sein Motto: «Alles ist Zahl».
Der Satz des Pythagoras steht dazu in krassem Widerspruch, denn er führt direkt zu den irrationalen Zahlen. Wie Pythagoras mit diesen umgegangen ist, ist nicht überliefert. Einige Geschichts-Wissenschaftler schreiben ihm trotzdem die «Entdeckung» der irrationalen Zahlen zu.
Heute ist allerdings bekannt, dass die Babylonier bereits Verfahren kannten, um $\sqrt{2}$ zu bestimmen – und auch die Inder in ihren Sulbasutras Näherungswerte für $\sqrt{2}$ benutzten.

F411 **a**

Diese griechische Marke erschien am 20. August 1955 zum Pythagoräer Kongress.

Beispiel:	**3/4/5**	$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$
Doppeltes:	**6/8/10**	$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$
Dreifaches:	**9/12/15**	$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$
Vierfaches:	**12/16/20**	$12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 = 20^2$

Allgemein: **a/b/c** mit $a^2 + b^2 = c^2$

n-faches: **na/nb/nc**

$$(na)^2 + (nb)^2 = n^2a^2 + n^2b^2 = n^2(a^2 + b^2) = n^2c^2 = (nc)^2 \quad ✓$$

Ja, ein Vielfaches eines pythagoräischen Tripels ist wieder pythagoräisch.

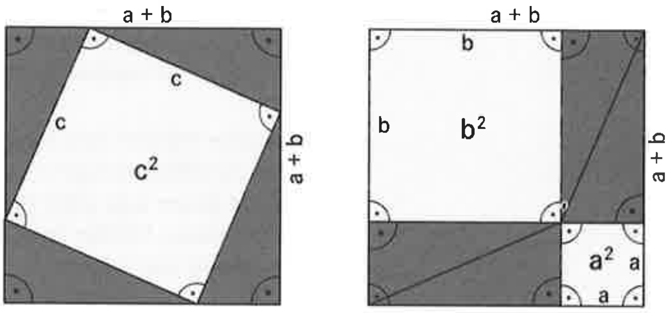
b **1**

p	q	a	b	c	$a^2 + b^2$		c^2
2	1	3	4	5	9 + 16	=	25
3	2	5	12	13	25 + 144	=	169
4	1	15	8	17	225 + 64	=	289
4	2	12	16	20	49 + 576	=	625
4	3	7	24	25	49 + 576	=	625
5	2	21	20	29	441 + 400	=	841
5	4	9	40	41	81 + 1600	=	1681
...	...	...					

2 Nein, so lassen sich nicht alle pythagoräischen Tripel finden.
Das Doppelte von 3/4/5, also 6/8/10 kommt nirgends vor.
Entweder 6 oder 8 müsste sich als 2pq darstellen lassen.
Für 6 kommt dabei nur p = 3 und q = 1 in Frage, was nicht erlaubt ist (beide ungerade)
Für 8 kommt nur p = 4 und q = 1 in Frage, was ein anderes Tripel ergibt.

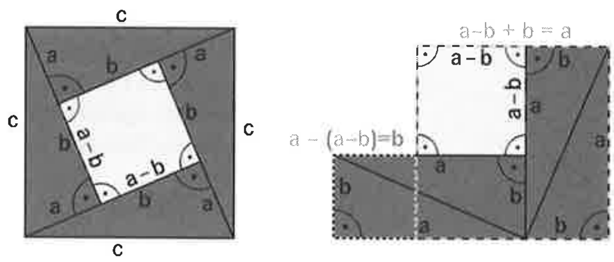
F412 Der Schritt vom Rechnen zur Mathematik gilt als das Verdienst der Griechen. Sie haben angefangen, nach Begründungen der vorliegenden Beobachtungen zu suchen die Mathematik streng logisch und axiomatisch aufzubauen. Den griechischen Denkern war die Ausführung praktischer Arbeiten nebensächlich, ihnen war wichtig, das Denken zu entwikkeln. Die Anschauung spielte dabei eine wichtige Rolle. Man versuchte möglichst alles geometrisch mit anschaulichen Figuren zu beweisen.

a Das Quadrat mit der Seite c belegt zusammen mit den vier Dreiecken die genau gleich grosse Fläche wie die beiden Quadrate mit den Seiten a und b zusammen mit den gleichen Dreiecken.
Es muss somit gelten:
$c^2 = a^2 + b^2$



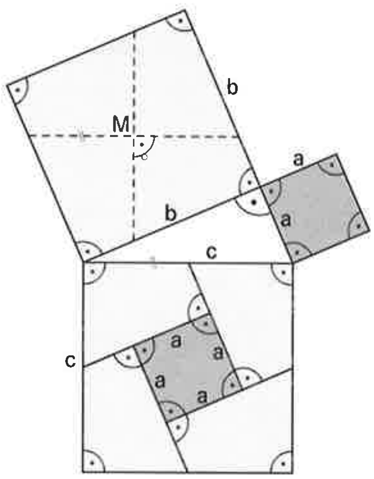
b Mit den genau gleichen Teilen wird einmal ein Quadrat mit der Seite c und das zweite Mal zwei Quadrate mit der Seite a bzw. b ausgefüllt.

Es muss somit gelten:
$c^2 = a^2 + b^2$

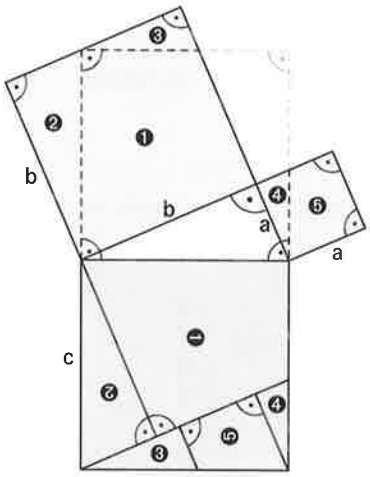


c Mit den vier kongruenten Teilen vom Quadrat mit der Seite b und dem ganzen Quadrat mit der Seite a lässt sich das Quadrat mit der Seite c vollständig belegen.

Es muss somit gelten: $c^2 = a^2 + b^2$



d

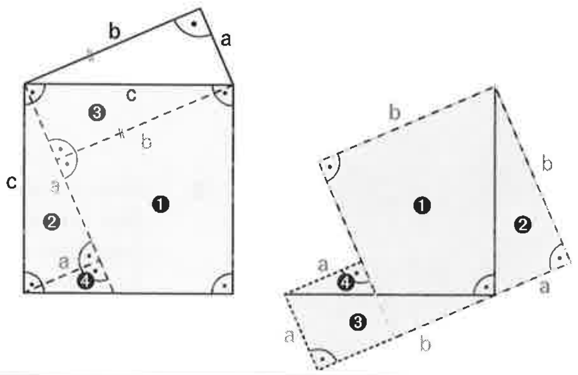


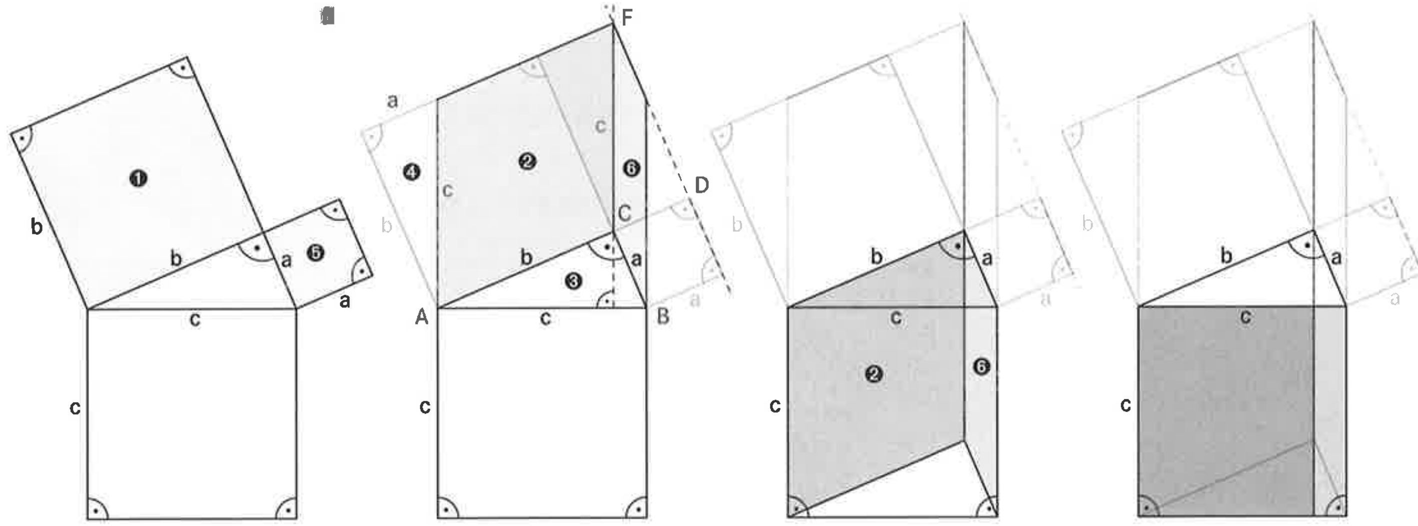
Mit den fünf Teilen der Quadrate mit der Seite a bzw. b lässt sich das Quadrat mit der Seite c vollständig belegen.

Es muss somit gelten: $c^2 = a^2 + b^2$

e Mit den vier Teilen vom Quadrat mit der Seite c lassen sich zwei Quadrate mit den Seiten a und b legen.

Es muss somit gelten: $c^2 = a^2 + b^2$





Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

- Das Rhomboid ❷ ist durch Verschieben der oberen Seite des Quadrates ❶ entstanden. Es hat immer noch gleiche Höhe und gleiche Grundseite und somit gleiche Fläche.
- Durch eine Drehung um A mit 90° im Gegenuhrzeigersinn lässt sich das Dreieck ❸ in das Dreick ❹ überführen. Damit ist gezeigt, dass die «neue Seite» des Rhomboids ❷ die Länge c hat.
- Das Rhomboid ❻ ist durch Verschieben der rechten Seite des Quadrates ❺ entstanden. Es «trifft» dabei genau auf die Ecke F, weil das Dreieck CDF kongruent zum Dreieck ABC ist (a, c, rechter Winkel).
- Im nächsten Schritt werden beide Rhomboide um c nach unten verschoben.
- Zum Schluss wird die gemeinsame Kante nach unten verschoben, bis die Ecke auf der Quadratseite liegt.

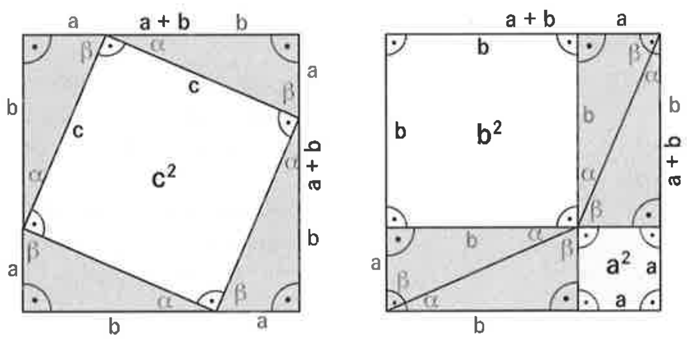
Die beiden Quadrate mit der Seite a bzw. b wurden durch flächenerhaltende Transformationen (Formveränderungen) und Verschiebungen so verändert, dass sie zusammen das ganze Quadrat mit der Seite c ausfüllen. Es gilt somit: $c^2 = a^2 + b^2$

■ Die Beweise lassen sich mit einer entsprechenden Suche leicht finden. Es hat hunderte von Seiten mit Beweisen im Netz.

Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

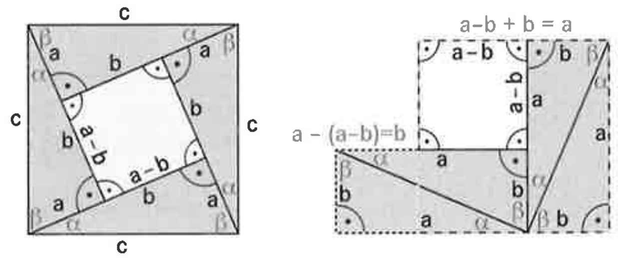
F413 Zu den beiden Dreiecken:
Die beiden Figuren sind keine Dreiecke sondern Fünfecke. Die Hypotenusen der grossen grünen Dreiecke haben eine andere Steigung als die Hypotenusen der kleinen gelben Dreiecke.

■ Alle Dreiecke haben die Seiten a und b und die Winkel α und β, wobei $\alpha + \beta = 90°$.



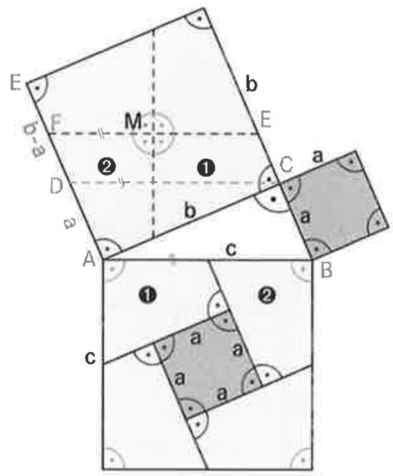
■ Alle Dreiecke haben die Seiten a und b und die Winkel α und β, wobei $\alpha + \beta = 90°$.

Es ist zudem: $a - (a - b) = b$
und $a - b + b = a$

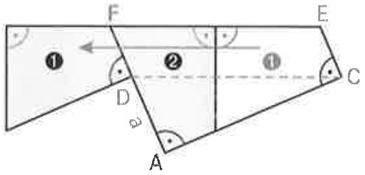


c Beispielsweise:

- Die vier Teile des Quadrates mit der Seite b sind kongruent:
  Sie lassen sich mit einer Drehung um M mit 90° ineinander Überführen.



- Die freibleibende Fläche ist ein Quadrat mit der Seitenlänge a:
  - Rechte Winkel ✓
  - Parallele zu AB durch C → D mit AD = a
    Beim Umlegen werden die Vierecke ❶ und ❷ vertauscht. AD = a bleibt «frei».



- Die entstehenden Seiten des grossen Quadrates sind genau gleich lang wie c:
  - ABEF ist ein Rhomboid, EF = c
  - Durch Vertauschen der beiden Teile ❶ und ❷ bleibt die Gesamtlänge erhalten.

d und **e** Analog wie in den vorgängigen Beispielen mit Winkeln, Verschiebungen und Drehungen arbeiten. Wir verzichten auf eine genauere Angabe, da diese in den Abbildungen in **F412** mit den Nummern bereits vorgespurt sind.

F414 Prüft man die Aussage eines Satzes anhand einiger Beispiele, so heisst das noch lange nicht, dass sie auch für beliebige andere Beispiele gilt. Es könnte gut sein, dass sie nur zufällig bei den gewählten Grössen richtig war.

F415 Winkelsumme im Dreieck, (Viereck, regelmässigen Vieleck)
Kongruenzsätze
Satz des Thales (Thaleskreis)
...

F416

a Voraussetzung: Es regnet.
Behauptung: Die Wiese wird nass.
Wenn es regnet, dann wird die Wiese nass.

b Voraussetzung: Du hast kein Geld. / Es ist kein Geld da.
Behauptung: Du kannst nicht ins Kino.
Wenn du kein Geld hast, dann kannst du nicht ins Kino.

c Voraussetzung: Jemand fährt zu schnell.
Behauptung: Er wird gebüsst.
Wenn jemand zu schnell fährt, dann wird er gebüsst.

d Voraussetzung: Du übst kein Englisch.
Behauptung: Du lernst kein Englisch. / Du kannst kein Englisch lernen.
Wenn du nicht übst, dann lernst du kein Englisch/..., dann kannst du kein Englisch lernen.

e Voraussetzung: Es hagelt stark.
Behauptung: Die Ernte wird vermindert und die Kirschen verteuert.
Wenn es stark hagelt, dann wird die Ernte vermindert und die Kirschen werden teurer.

f Voraussetzung: Man bewegt sich.
Behauptung: Man lebt gesünder.
Wenn man sich bewegt, dann lebt man gesünder.

f) Voraussetzung: Das Angebot ist gross.
Behauptung: Die Preise fallen.
Wenn das Angebot gross ist, dann fallen die Preise.

F417 a) Wenn eine Seite eines Dreiecks Durchmesser des Umkreises ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

b) Wenn eine (ebene) Figur ein Dreieck ist, dann ist die Winkelsumme 180°.

c) Wenn eine (ebene) Figur ein Rhombus ist, dann halbieren sich die Diagonalen gegenseitig.
Wenn ein Viereck ein Rhombus ist, dann halbieren sich die Diagonalen gegenseitig.

d) Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen, dann sind sie kongruent.

F418 **Umkehrungen zu F416**

a) Wenn die Wiese nass ist, dann regnet es.
falsch Vielleicht läuft der Rasensprinkler...

b) Wenn du nicht ins Kino kannst, dann hast du kein Geld.
falsch Vielleicht bist du krank oder hast andere Verpflichtungen...

c) Wenn jemand gebüsst wird, dann ist er zu schnell gefahren.
falsch Vielleicht hat er ein Rotlicht überfahren...

d) Wenn du kein Englisch kannst (lernst), dann hast du nicht geübt.
falsch Vielleicht hast du schlecht geübt und alles wieder vergessen...

e) Wenn die Ernte vermindert und die Kirschen verteuert wurden, dann hat es stark gehagelt.
falsch Es ist auch möglich, dass die Ernte aus einem andern Grund vermindert wurde, beispielsweise, weil es wärend der Blütezeit Frost gab...

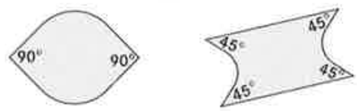
f) Wenn man gesund lebt, dann bewegt man sich.
richtig

g) Wenn die Preise fallen, dann ist das Angebot gross.
falsch Preise fallen beispielsweise auch dann, wenn die Ware durch neuere Modelle ersetzt wird (Restposten, Auslaufmodelle).

Umkehrungen zu F417

a) Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann ist eine Seite Durchmesser des Umkreises.
richtig

b) Wenn die Winkelsumme in einer (ebenen) Figur 180° ist, dann ist die Figur ein Dreieck.
richtig, falls man stillschweigend davon ausgeht, dass die Figur geradlinig begrenzt ist. Ohne diese Annahme muss die Aussage nicht richtig sein.

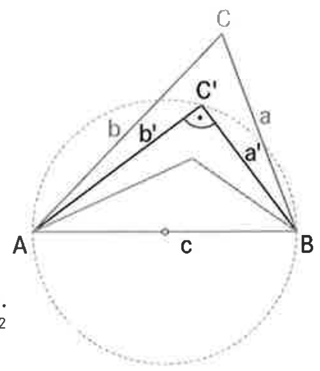


c) Wenn sich die Diagonalen in einer (ebenen) Figur gegenseitig halbieren, dann ist die Figur ein Rhombus.
falsch Im Rechteck beispielsweise, halbieren sich die Diagonalen auch.

d) Wenn zwei Dreiecke kongruent sind, dann stimmen sie in einer Seite und zwei Winkeln überein.
richtig Sie stimmen sogar in allen Seiten und Winkeln überein.

F419 a) Die Geometrie diente vor allem den täglichen Bedürfnissen und Tätigkeiten. Dabei spielte der rechte Winkel eine bedeutende Rolle (Feldvermessung, Altarbau, ...).
Mit Hilfe der Umkehrung des Satzes des Pythagoras, konnte der rechte Winkel mit einem Knotenseil «hergestellt» werden. →

b Voraussetzung:
Für die Seiten a, b und c eines Dreiecks gilt: $a^2 + b^2 = c^2$



Behauptung:
Das Dreieck ist rechtwinklig.

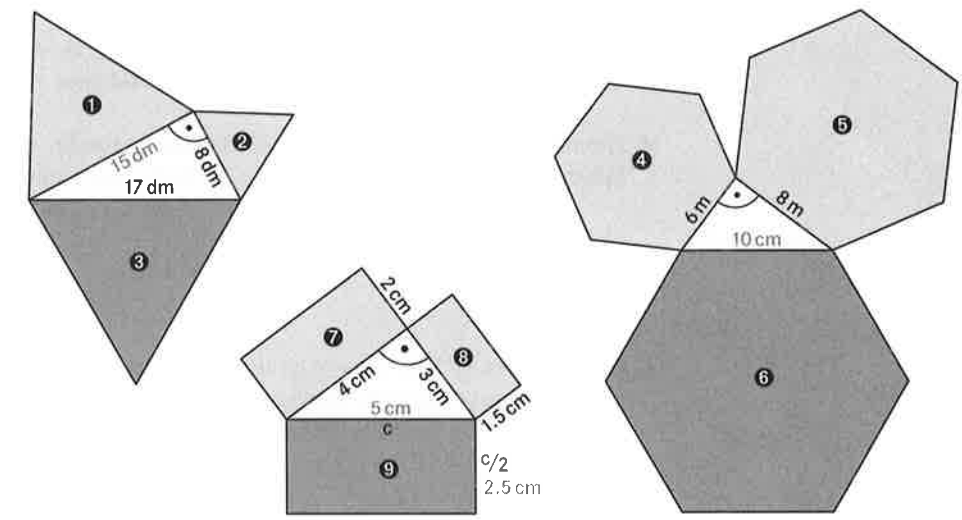
Beweis:
Wäre das Dreieck **nicht** rechtwinklig sondern beispielsweise spitzwinklig, wie in der Abbildung nebenan, so gäbe es über der Seite AB ein rechtwinkliges Dreieck, beispielsweise ABC'. Für dieses Dreieck gilt der Satz von Pythagoras: $a'^2 + b'^2 = c^2$
Weil aber sowohl a' als auch b' kleiner sind als a und b, ergibt sich hier ein Widerspruch zur Voraussetzung $a^2 + b^2 = c^2$.

Die **Annahme**, dass das Dreieck nicht rechtwinklig ist, muss somit falsch sein, denn die Voraussetzung gilt. Das Dreieck ist also rechtwinlig! Der Umkehrssatz ist richtig!

Genau gleich kann man mit der Annahme verfahren, dass das Dreieck stumpfwinkligen Dreieck ist. Man erhält wiederum eine Widerspruch zur Voraussetzung.

Diese Art von Beweis, bei dem die Annahme getroffen wird, dass der zu beweisende Satz nicht gilt - und diese Annahme dann auf einen Widerspruch führt, nennt man **Widerspruchsbeweis**.

F420 **a**



Für die angegebenen Figuren stimmt der Satz. Dies lässt sich durch Berechnung der Flächen zeigen:

A❶ = 97.427...cm^2 A❷ = 27.712...cm^2 A❸ = 125.140.712...cm^2 = A❶ + A❷ ✓

A❹ = 93.530...cm^2 A❺ = 166.276...cm^2 A❻ = 259.807...cm^2 = A❹ + A❺ ✓

A❼ = 8 cm^2 A❽ = 4.5 cm^2 A❾ = 12.5 cm^2 = A❼ + A❽ ✓

Allgemein: Für die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks a, b, c einsetzen und dann die Flächen der Figuren bestimmen. Die Breitseite des Rechtecks ist halb so gross wie Länge.

b Der Satz stimmt dann, wenn die Figuren ähnlich sind, wenn sie die gleiche Form in unterschiedlicher Grösse haben (gleiche Seitenverhältisse und gleiche Winkel).

F421 Bei spitzwinkligen Dreiecken gilt: $a^2 + b^2 > c^2$
Bei stumpfwinkligen Dreiecken gilt: $a^2 + b^2 < c^2$

Die Umkehrungen gelten für diese Aussagen auch.