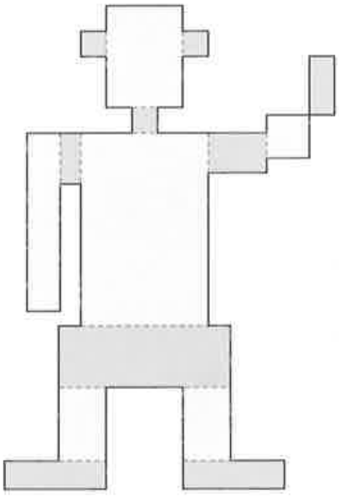
E Flächen von geradlinigen Figuren

E1 Flächen bestimmen – Flächen berechnen

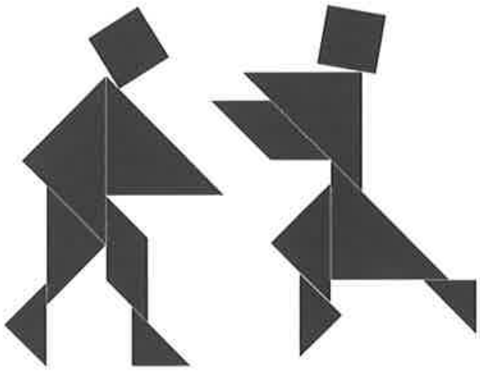
Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

E11



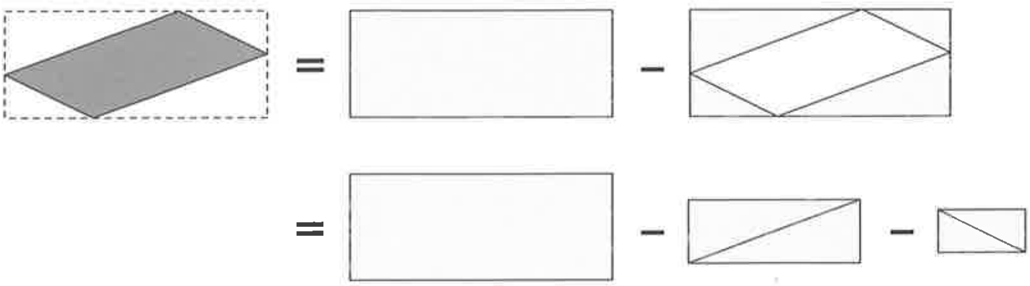
Fläche in Rechtecke (Quadrate) zerlegen
Das Männchen lässt sich problemlos (auf verschiedene Arten) in Rechtecke zerlegen. Misst man die Seiten dieser Rechtecke, so lässt sich die Gesamtfläche des Männchens als Summe aller Rechtecksflächen berechnen.

In Einzelteile zerlegen und zu einem Rechteck (Quadrat) zusammensetzen
Die beiden tanzenden Figuren sind typische Tangramfiguren.
Zerschneidet man eine solche Figur in die einzelnen Tangramteile, so können diese zum Quadrat zusammengefügt werden.



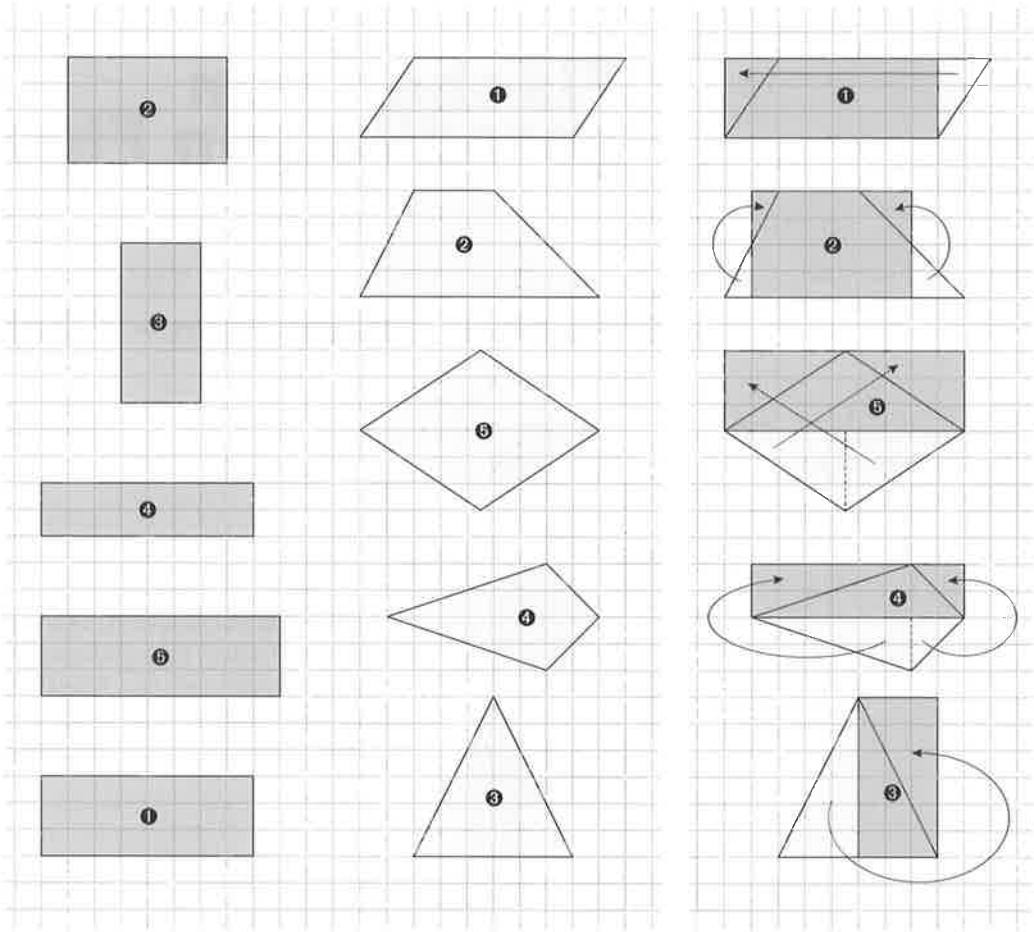
Die Quadratfläche – und somit auch die ursprüngliche Fläche der tanzenden Person – lässt sich jetzt problemlos berechnen.

In ein umgebendes Rechteck (Quadrat) einbetten und die zusätzlichen Teile bestimmen
Das abgebildete Rhomboid ist in ein Rechteck eingebettet. Dessen Grösse lässt sich berechnen. Die Grösse der überzähligen Teile lässt sich ebenfalls berechnen, indem man jeweils zwei Dreiecke wieder zu einem Rechteck zusammenfügt.



Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

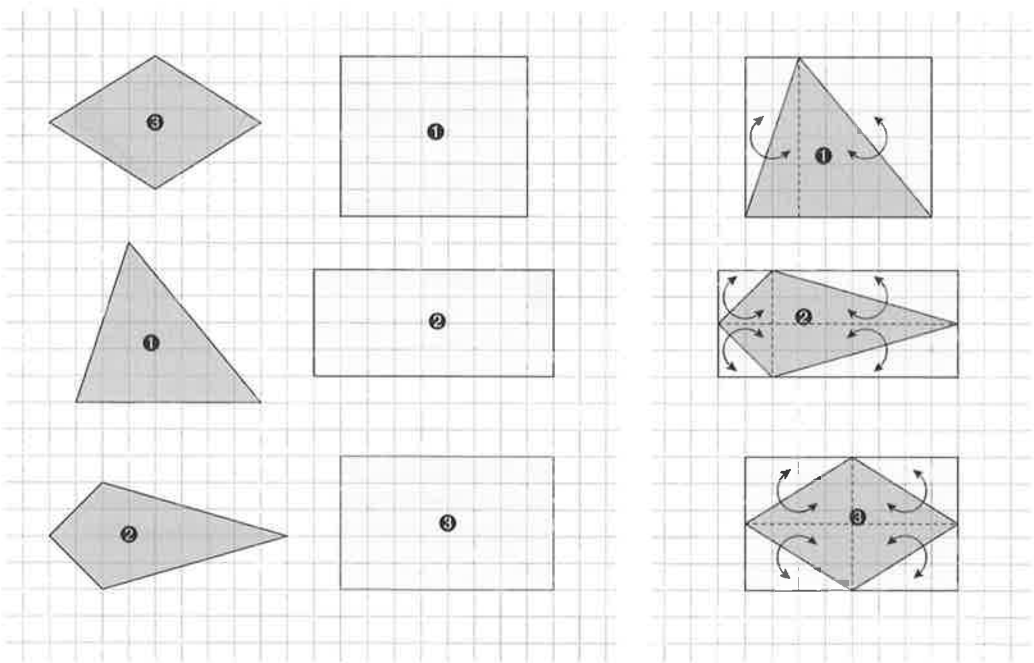
E12



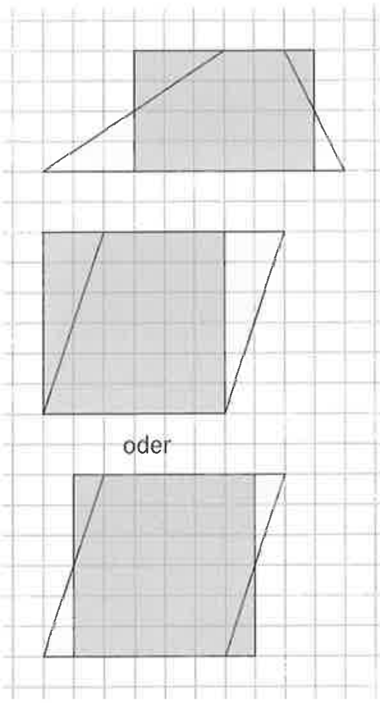
E13 –

Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

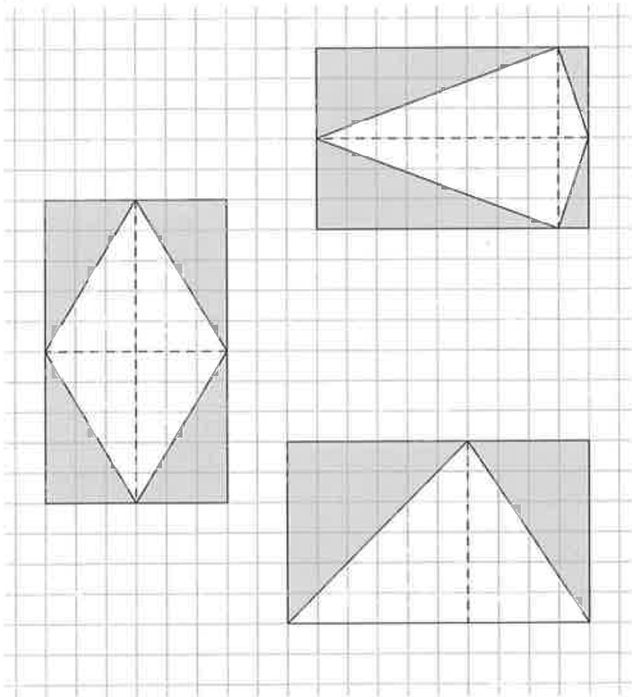
E14



E15 a



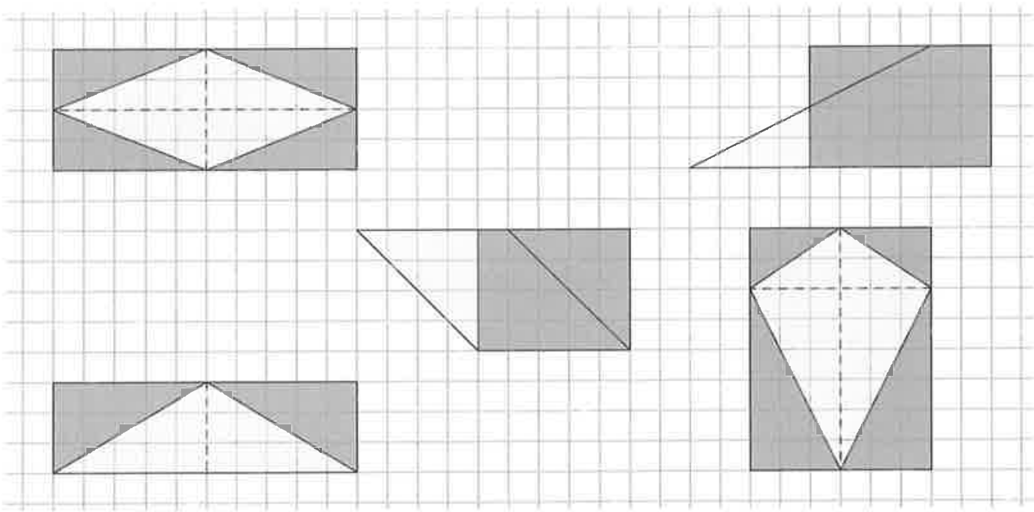
b



c Flächeninhalte:

a	Trapez:	6·4 Karofelder = 24 Karofelder
	Rhomboid:	6·6 Karofelder = 36 Karofelder
b	Drachenviereck:	9·6:2 Karofelder = 27 Karofelder
	Rhombus:	6·10:2 Karofelder = 30 Karofelder
	Dreieck:	10·6:2 Karofelder = 30 Karofelder

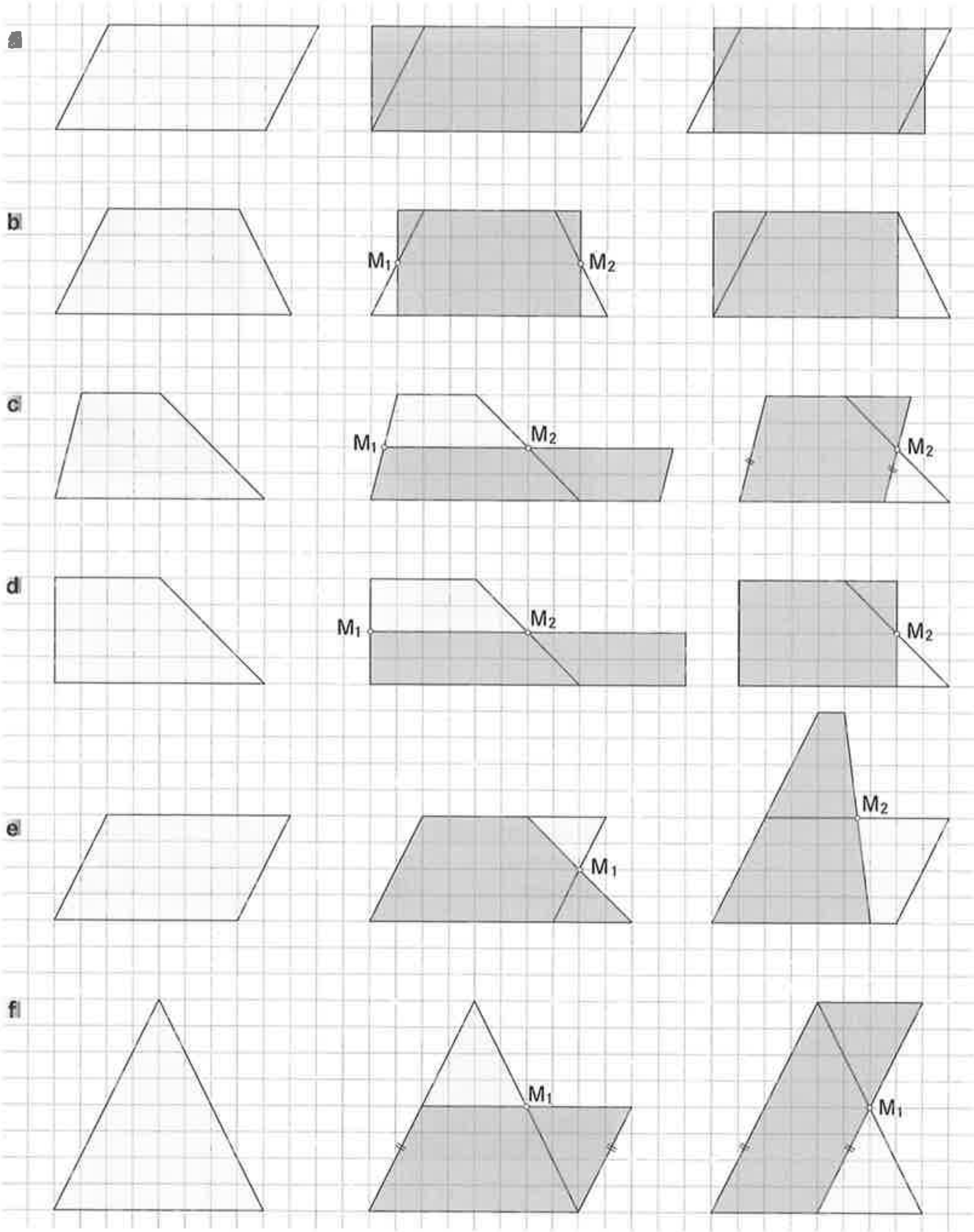
E16



Rhombus:	10·4:2	Karofelder	= 20 Karofelder
Trapez:	6·4	Karofelder	= 24 Karofelder
Rhomboid:	5·4	Karofelder	= 20 Karofelder
Dreieck:	10·3:2	Karofelder	= 15 Karofelder
Drachenviereck:	6·8:2	Karofelder	= 24 Karofelder

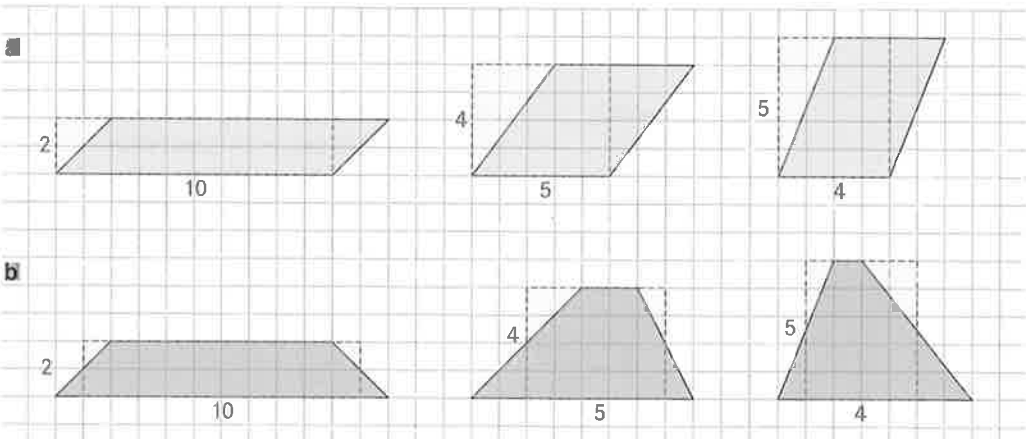
E17 –

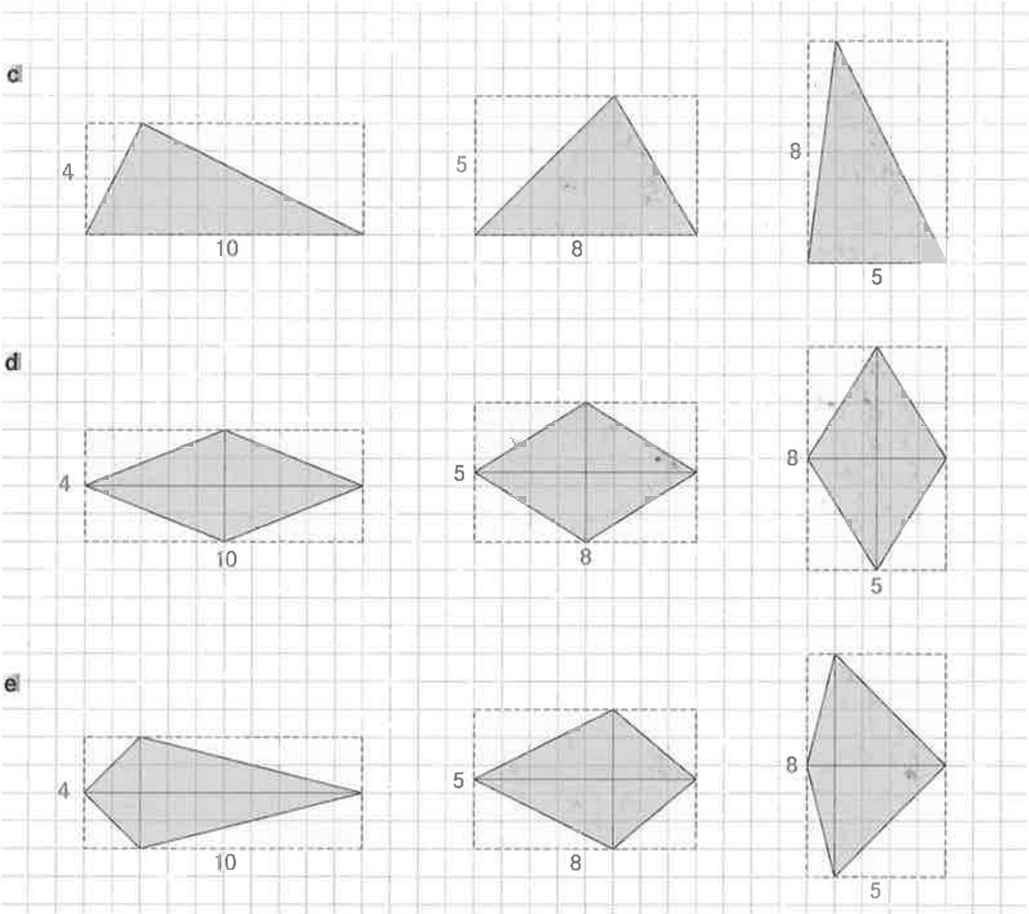
E18 Beispiele:



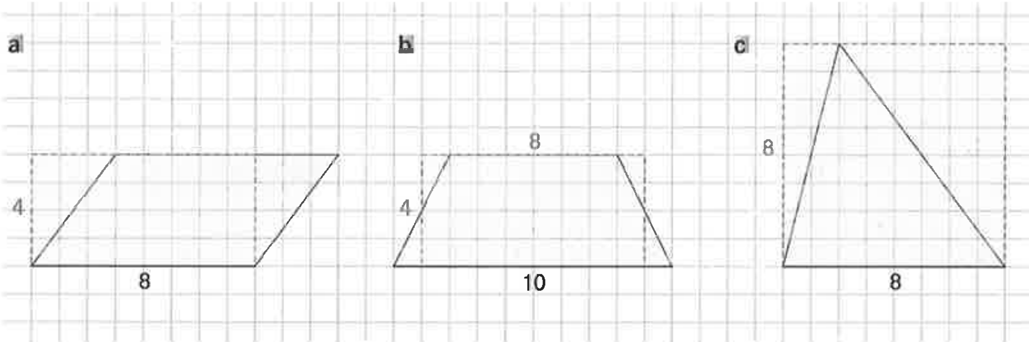
E19 Am einfachsten geht es, wenn du jeweils mit einem Rechteck startest, das bei a und b 20 und bei c, d und e 40 Karofelder enthält.

Beispiele:

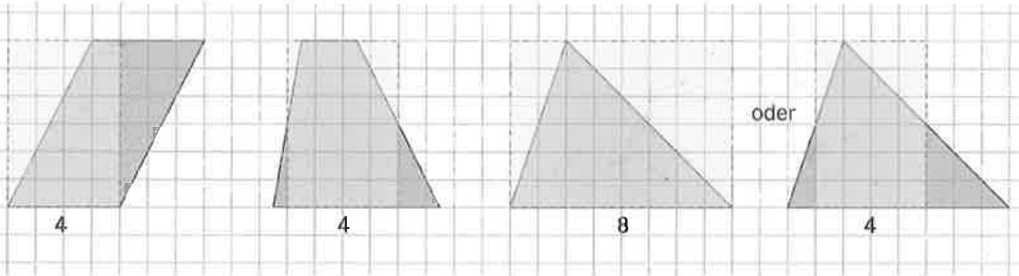




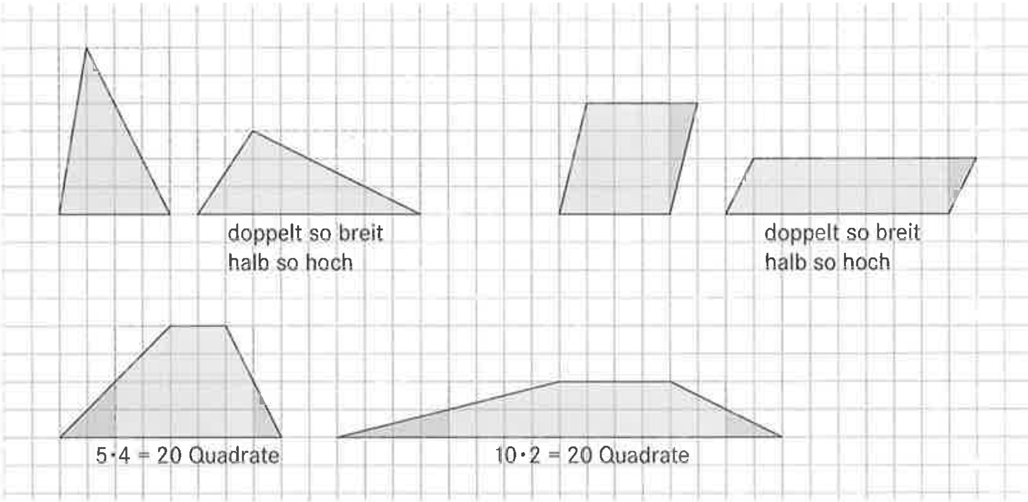
E110 Beispiele:



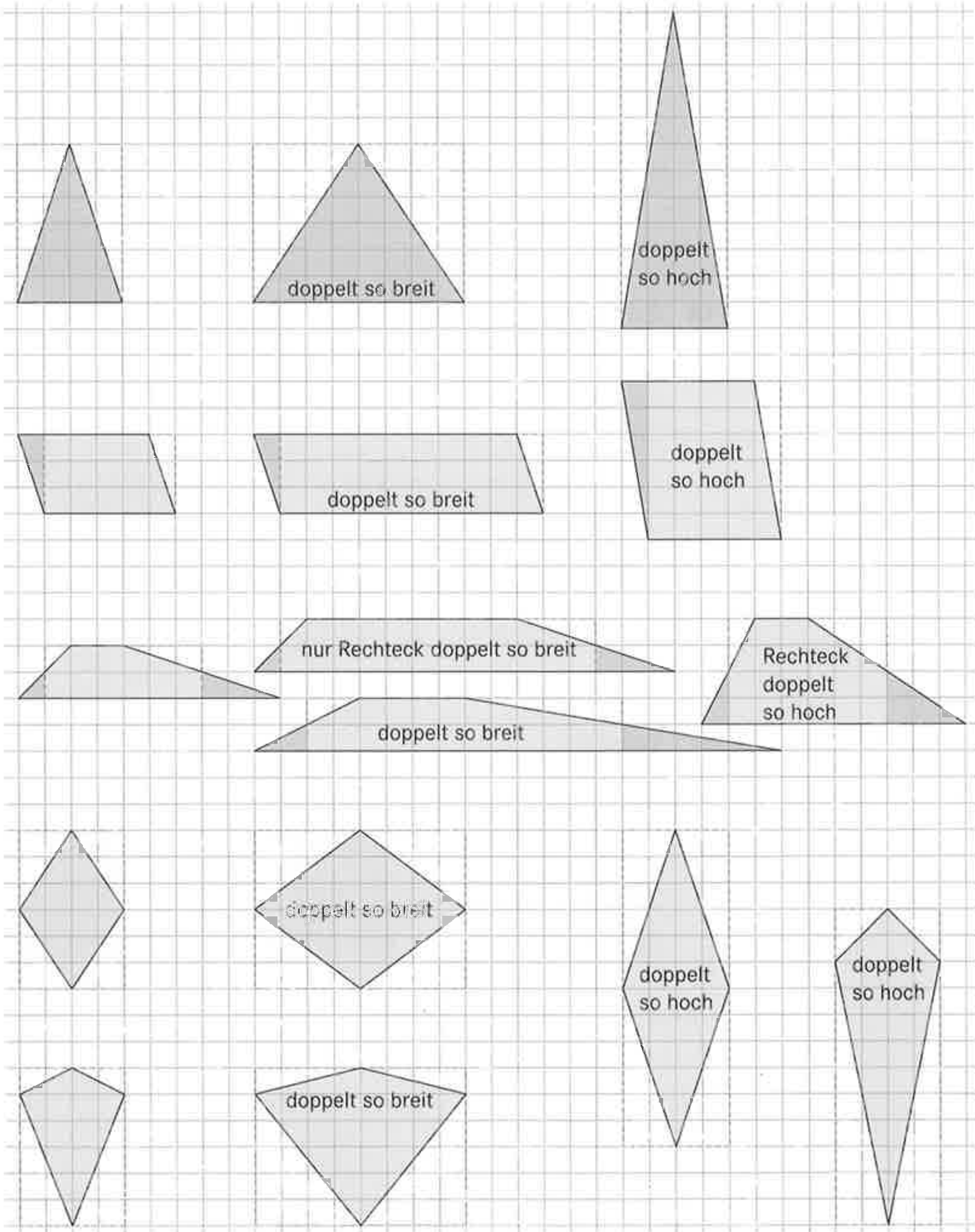
E111 Beispiele:



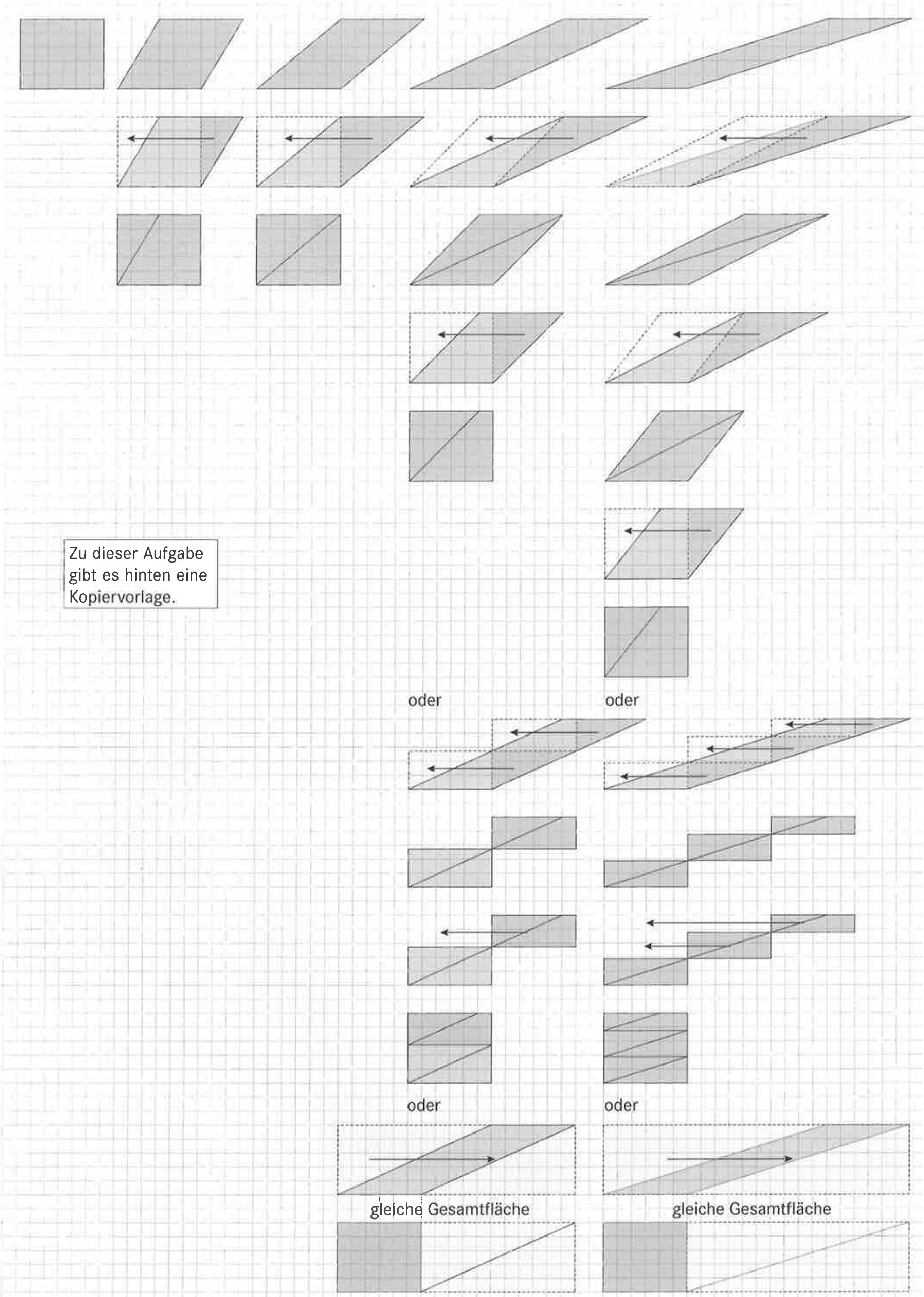
E112 Beispiele:



E113 Eine doppelt so grosse Fläche erhält man beispielsweise durch Verdoppeln der Breite oder der Höhe:



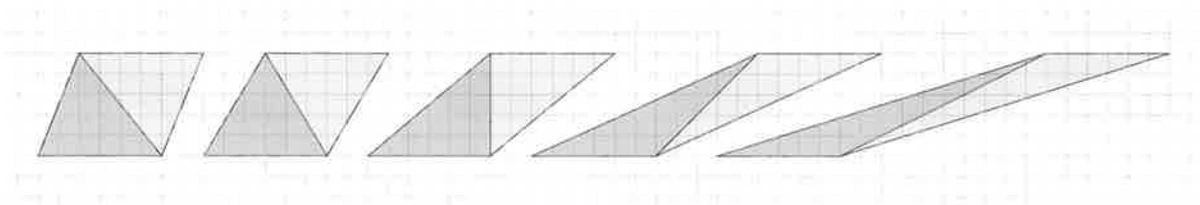
E114 Mögliche Wege, die Flächengleichheit durch Schneiden und Kleben zu zeigen.
Die Abläufe sind von oben nach unten dargestellt.



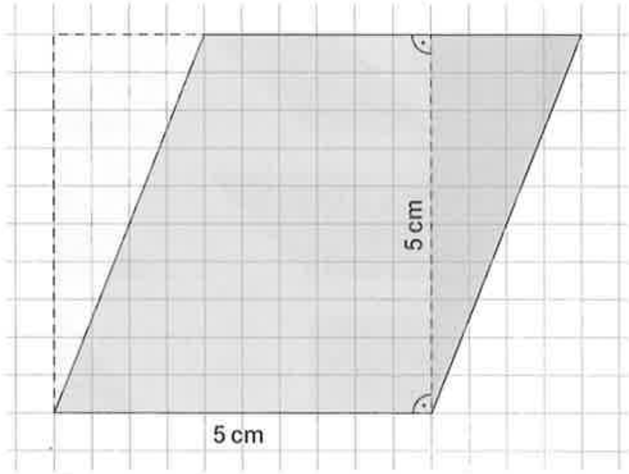
Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

E115 Indem man jedes Dreieck an einer Seitenmitte spiegelt, erhält man lauter flächengleiche Rhomboide, welche die doppelt so grosse Fläche haben wie die Dreiecke.

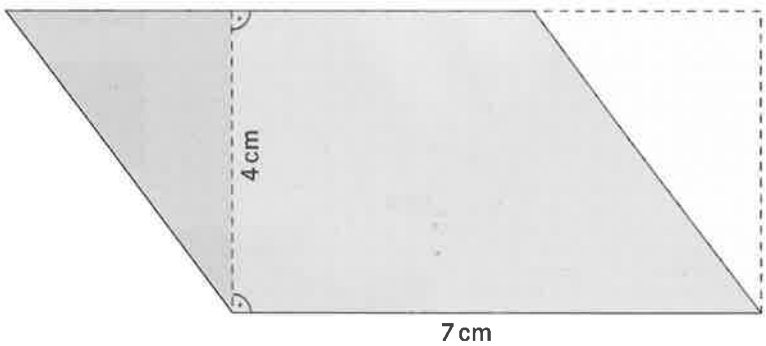


E116



Die Fläche des Rhomboids entspricht der Fläche eines Quadrates mit 5 cm Seitenlänge:

$A_{▱} = A_{□} = 5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 25\,\text{cm}^2$

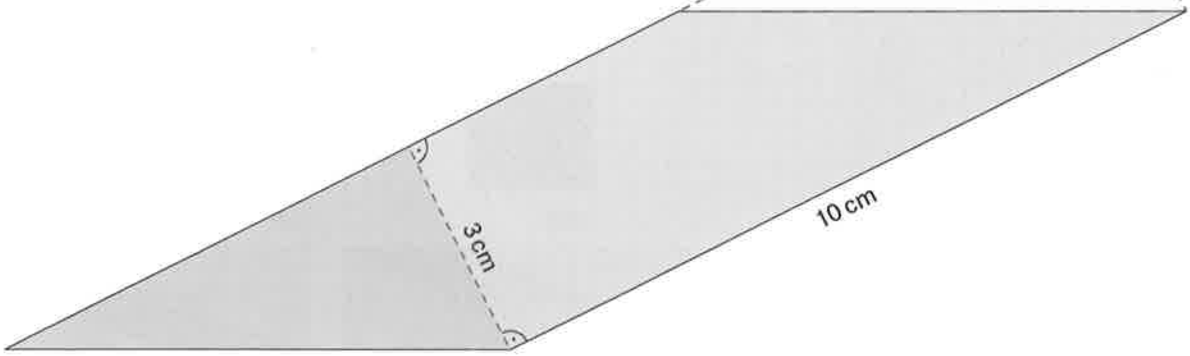


Die Fläche des Rhomboids entspricht der Fläche eines Rechtecks mit Seiten der Länge 7 cm und 4 cm:

$A_{▱} = A_{□}$
$= 7\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm}$
$= 28\,\text{cm}^2$

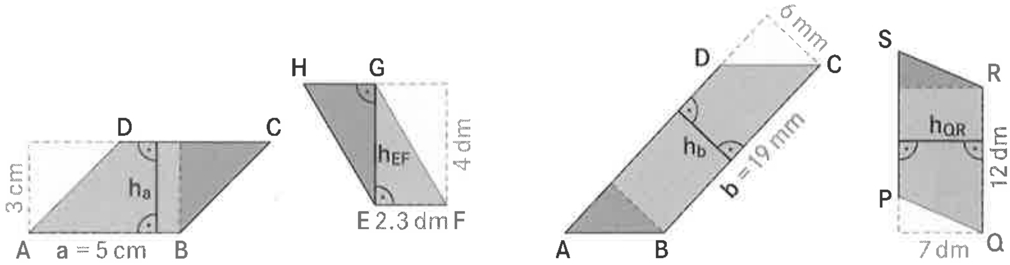
Die Fläche des Rhomboids entspricht der Fläche eines Rechtecks mit Seiten der Länge 10 cm und 3 cm:

$A_{▱} = A_{□} = 10\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = 30\,\text{cm}^2$



Vorgehen:
Passendes Rechteck einzeichnen und die fehlende Seite messen.
Es genügt auch, einfach die fehlende Rechteckseite zu messen – ohne das Rechteck selbst zu zeichnen.

E117 Die zweite Seite eines flächengleichen Rechtecks, das eine Seite mit dem Rhomboid gemeinsam hat, ist jeweils gleich lang wie die Höhe der Rhomboide.



a A_{ABCD} = 5 cm · 3 cm (= $a \cdot h_a$)
= **15 cm²**

b A_{EFGH} = 2.3 dm · 4 dm (= EF · h_{EF})
= **9.2 dm²**

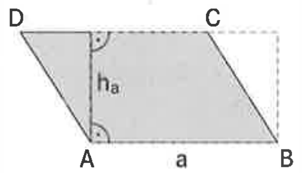
c A_{ABCD} = 19 mm · 6 mm (= $b \cdot h_b$)
= **114 mm²**

d A_{PQRS} = **12 dm** · 7 dm (= QR · h_{QR})
= **84 dm²**

A▱

e Berechnung einer Rhomboidfläche

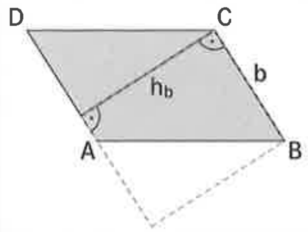
Die Fläche eines Rhomboids berechnen wir, indem wir die Grösse eines flächengleichen Rechtecks berechnen.



Fläche eines Rhomboids =
Seite mal zugehörige Höhe

$A_{▱} = a \cdot h_a$

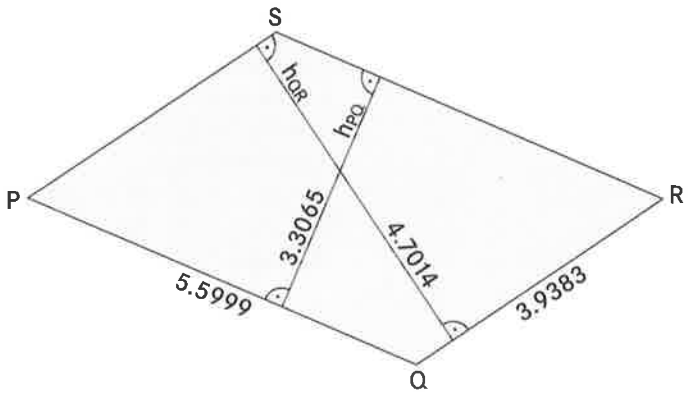
$A_{▱} = b \cdot h_b$



Seite und Höhe müssen in der gleichen Einheit benutzt werden.

E118 **a** PQ = 5.6 cm
h_{PQ} = 3.3 cm
A_{PQRS} = PQ · h_{PQ}
= 5.6 cm · 3.3 cm
= 18.48 cm²

b QR = 3.9 cm
h_{QR} = 4.7 cm
A_{PQRS} = QR · h_{QR}
= 3.9 cm · 4.7 cm
= 18.33 cm²



Die berechnete Fläche müsste natürlich bei **a** und bei **b** gleich gross sein. Es wird ja beide Male dieselbe Fläche berechnet.
Der Unterschied bei den Resultaten ist auf **Messungenauigkeit** zurückzuführen.

Führt man die Berechnungen mit den auf dem Computer gemessenen Werten durch, so erhält man:
PQ · h_{PQ} = 5.5999 cm · 3.3065 cm = 18.5161 cm²
QR · h_{QR} = 3.9383 cm · 4.7014 cm = 18.5155 cm²

E119 **a** A = 16.65 m² a = 4.5 m h_a = ?
$a \cdot h_a = A$
$\mathbf{h_a}$ = A : a
= 16.65 m² : 4.5 m = **3.7 m**

b A = 16.65 m² h_b = 1.5 m b = ?
$b \cdot h_b = A$
$\mathbf{h_b}$ = A : b
= 16.65 m² : 1.5 m = **11.1 m**

E120 **a** $a = 12\,cm$ $b = 9.6\,cm$ $h_b = 8\,cm$ $A = ?$ $h_a = ?$

$$\mathbf{A} = b \cdot h_b = 9.6\,cm \cdot 8\,cm = \mathbf{76.8\,cm^2}$$

$$a \cdot h_a = A$$
$$\mathbf{h_a} = A : a = 76.8\,cm^2 : 12\,cm = \mathbf{6.4\,cm}$$

b $a = 22\,dm$ $h_a = 21\,dm$ $h_b = 20\,dm$ $A = ?$ $b = ?$

$$\mathbf{A} = a \cdot h_a = 22\,dm \cdot 21\,dm = \mathbf{462\,dm^2}$$

$$b \cdot h_b = A$$
$$\mathbf{b} = A : h_b = 462\,dm^2 : 20\,dm = \mathbf{23.1\,dm}$$

E121 $EF = 7.8\,cm$ $h_{EF} = 3.4\,cm$ $h_{FG} = 2.6\,cm$ $FG = ?$

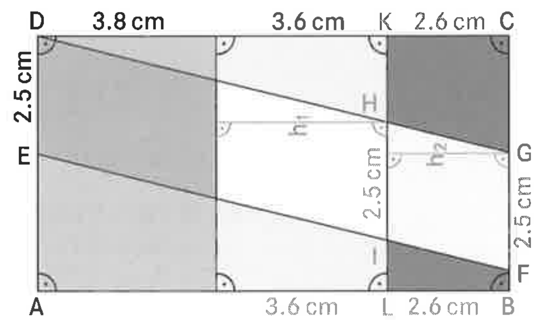
$$\mathbf{A_{EFGH}} = EF \cdot h_{EF} = 7.8\,cm \cdot 3.4\,cm = \mathbf{26.52\,cm^2}$$

$$FG \cdot h_{FG} = A_{EFGH}$$
$$\mathbf{FG} = A_{EFGH} : h_{FG} = 26.52\,cm^2 : 2.6\,cm = \mathbf{10.2\,cm}$$

kürzer:

$$FG \cdot h_{FG} = EF \cdot h_{EF}$$
$$\mathbf{FG} = EF \cdot h_{EF} : h_{FG} = 7.8\,cm \cdot 3.4\,cm : 2.6\,cm = \mathbf{10.2\,cm}$$

E122 **a** Vom gelben, mittleren Rhomboid sind bekannt:
Seite $HI = 2.5\,cm$
zugehörige Höhe $h_1 = 3.6\,cm$
demnach gilt:
$\mathbf{A_{gelbes\ Rhomboid}} = 2.5\,cm \cdot 3.6\,cm = \mathbf{9\,cm^2}$



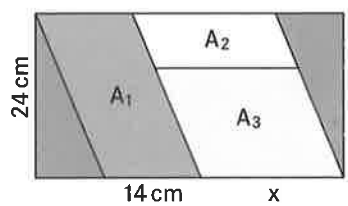
b Die dunkelgraue zweiteilige Fläche rechts lässt sich als Differenz der Rechtecksfläche BCKL und des Rhomboids FGHI berechnen:

$$A_{\square BCKL} = LB \cdot BC = 2.6\,cm \cdot 5.4\,cm = 14.04\,cm^2$$
$$A_{\text{▱}FGHI} = FG \cdot h_2 = 2.5\,cm \cdot 2.6\,cm = 6.50\,cm^2$$
$$\mathbf{A_{dunkelgrau}} = A_{\square BCKL} - A_{FGHI} = 14.04\,cm^2 - 6.50\,cm^2 = \mathbf{7.54\,cm^2}$$

E123 $\mathbf{A_1} = 14\,cm \cdot 24\,cm = \mathbf{336\,cm^2}$

A_1 und A_3 sind gleich gross: $\mathbf{A_3} = \mathbf{336\,cm^2}$

A_3 ist doppelt so gross wie A_2: $\mathbf{A_2} = 336\,cm^2 : 2 = \mathbf{168\,cm^2}$



Weil A_3 doppelt so gross ist wie A_2 aber gleich breit, muss A_3 auch doppelt so hoch sein wie A_2.
h_2 ist demnach ein Drittel der Rechteckshöhe und h_3 zwei Drittel:
$h_2 = 24\,cm : 3 = 8\,cm$
$h_3 = 24\,cm : 3 \cdot 2 = 16\,cm$

$A_3 = x \cdot h_3$
$\mathbf{x} = A_3 : h_3 = 336\,cm^2 : 16\,cm = \mathbf{21\,cm}$

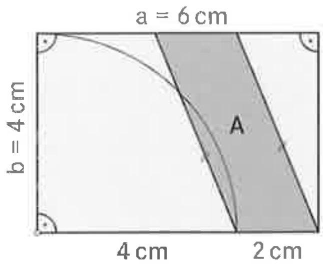
Oder einfacher:

Gesamtfläche $A_2 + A_3 = 504\,cm^2$
Gesamthöhe von A_2&$A_3 = 24\,cm$

$\mathbf{x} = 504\,cm^2 : 24\,cm = \mathbf{21\,cm}$

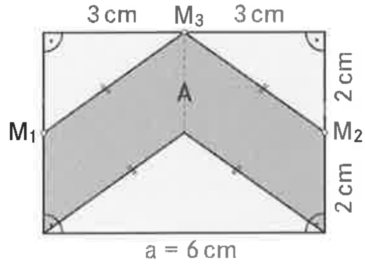
E124 a 1 Die gelbe Fläche ist ein Rhomboid mit
Seite = 2 cm
zugehörige Höhe = 4 cm

Fläche:
A = 2 cm · 4 cm = **8 cm²**



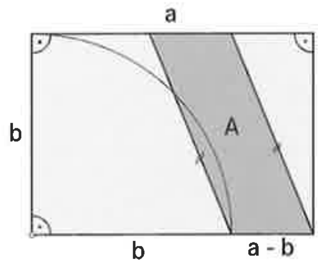
a 2 Die gelbe Fläche besteht aus zwei Rhomboiden
mit einer Seite von 2 cm
und der zugehörigen Höhe von 3 cm

Ganze Fläche:
A = **2** · 2 cm · 3 cm = **12 cm²**



b 1 Seite des Rhomboids: a – b
zugehörige Höhe: b

Fläche:
A = (a – b) · b = **ab – b²**

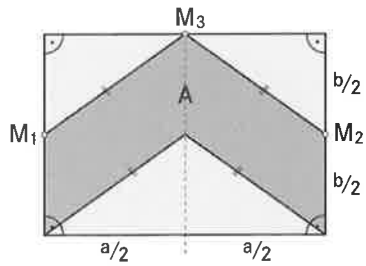


b 2 Halbe Fläche = Rhomboid

Seite diese Rhomboids: $\frac{b}{2}$

zugehörige Höhe: $\frac{a}{2}$

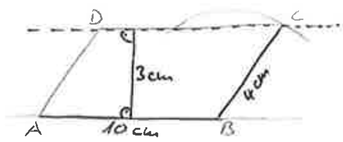
Ganze Fläche:
$\mathbf{A} = \mathbf{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} = 2 \cdot \frac{ab}{4} = \mathbf{\frac{ab}{2}}$



Hinweis für Lehrpersonen:
Wir fragen bei dieser Aufgabe absichtlich erst bei b nach der Höhe, um die für a wichtigen Gedanken nicht vorweg zu nehmen.

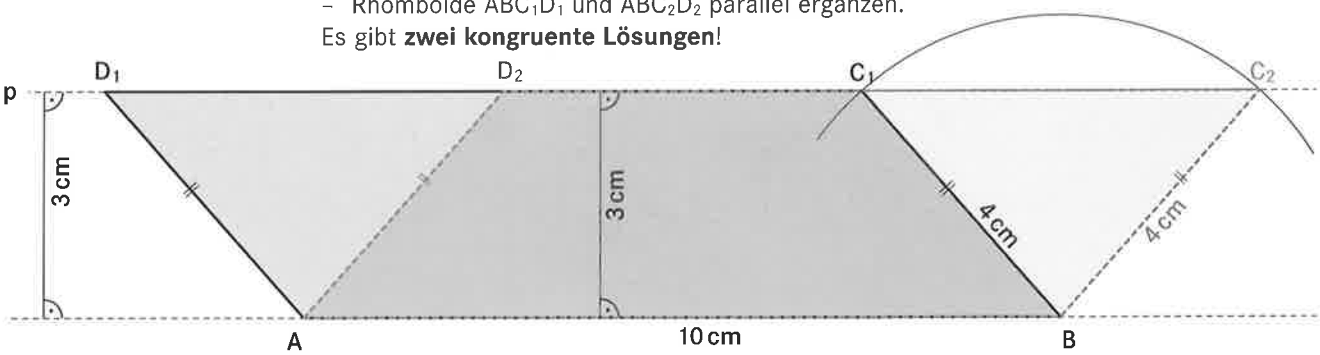
E125 a $A_{▱}$ = 30 cm² AB = 10 cm BC = 4 cm

Für die Konstruktion, benötigt man eine der beiden Höhen, beispielsweise:
h_{AB} = $A_{▱}$: AB = 30 cm² : 10 cm = 3 cm



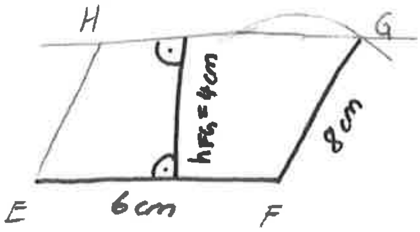
Konstruktionsbericht:
- AB = 10 cm
- Parallele p // AB im Abstand h_{AB} = 3 cm
- Kreis um B mit Radius BC = 4 cm schneiden mit p ⟶ C_1 und C_2
- Rhomboide ABC_1D_1 und ABC_2D_2 parallel ergänzen.

Es gibt **zwei kongruente Lösungen**!



b Das Rhomboid hat die eine (verwendete) Höhe $\mathbf{h_{AB}}$ **= 3 cm**
Die zweite Höhe h_{BC} lässt sich ebenfalls berechnen:
$\mathbf{h_{BC}}$ = $A_{▱}$: BC = 30 cm² : 4 cm = **7.5 cm**

E126 EF = 6 cm FG = 8 cm h_{FG} = 4 cm



Konstruktionsbericht:
- FG = 8 cm
- Parallele p // FG im Abstand h_{FG} = 4 cm
- Kreis um F mit Radius EF = 6 cm
  schneiden mit p → E_1 und E_2
- Rhomboide E_1FGH_1 und E_2FGH_2 parallel ergänzen.

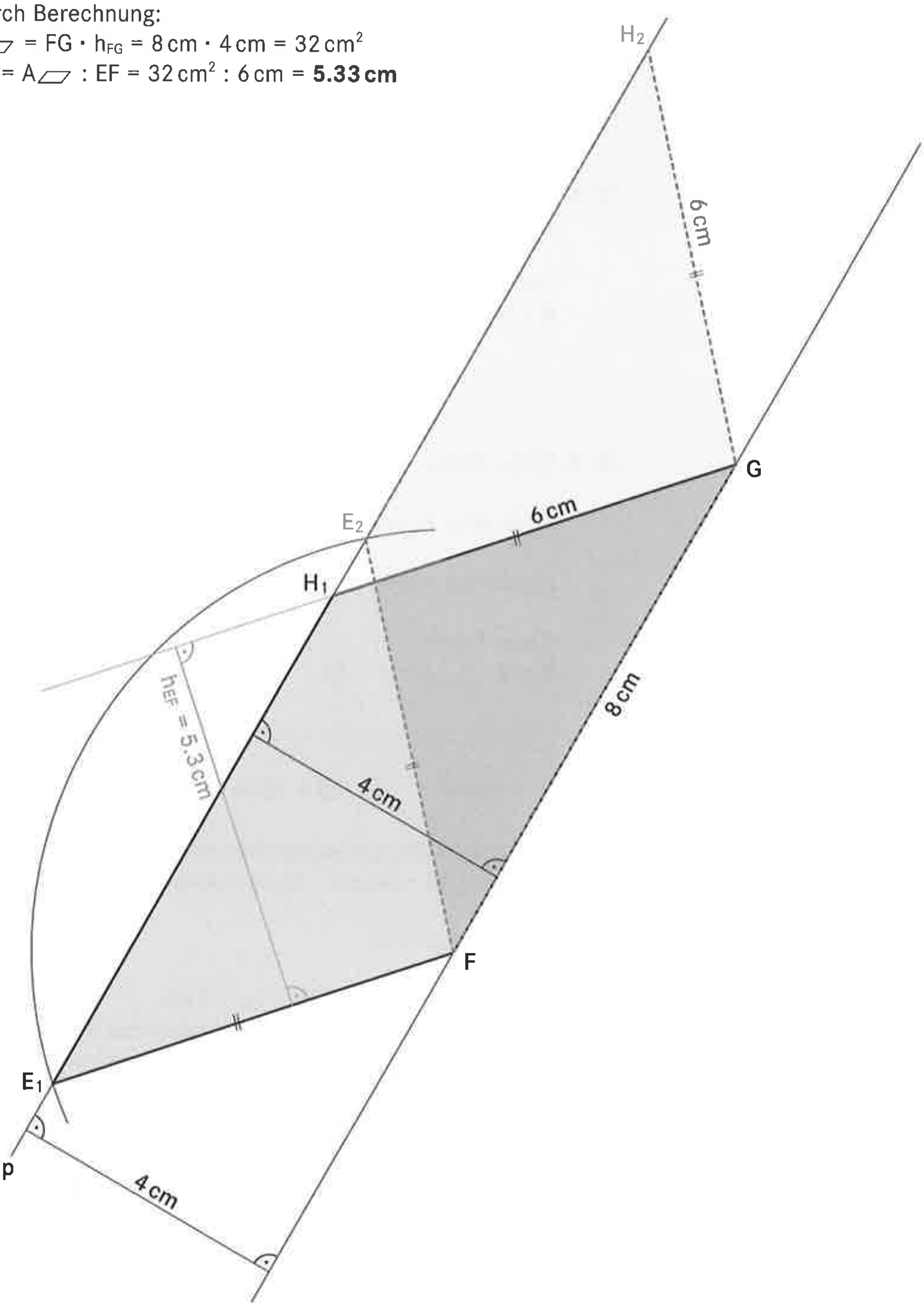
Es gibt **zwei kongruente Lösungen**!

h_{EF} misst 5.3 cm

Durch Berechnung:

$A_{▱}$ = FG · h_{FG} = 8 cm · 4 cm = 32 cm^2

h_{EF} = $A_{▱}$: EF = 32 cm^2 : 6 cm = **5.33 cm**



E127 **a** $A_{\text{▱}} = 20\,cm^2$ $AB = 5\,cm$

Für die Konstruktion eines solchen Rhomboids muss man dessen Höhe kennen:

$\mathbf{h_{AB}} = A_{\text{▱}} : AB = 20\,cm^2 : 5\,cm = \mathbf{4\,cm}$

In der Abbildung nebenan sind **fünf Beispiele** gezeichnet. Alle haben die Seite AB gemeinsam und eine Höhe von 4 cm.

b Es gibt unendlich viele Lösungen.

c Die in Frage kommenden Rhomboide haben zwar die gleiche Fläche, aber **verschiedene Umfänge**.

Für die gezeichneten Beispiele gilt:

$BC_1 = 5\,cm \rightarrow \mathbf{u_1} = 4 \cdot 5\,cm = \mathbf{20\,cm}$

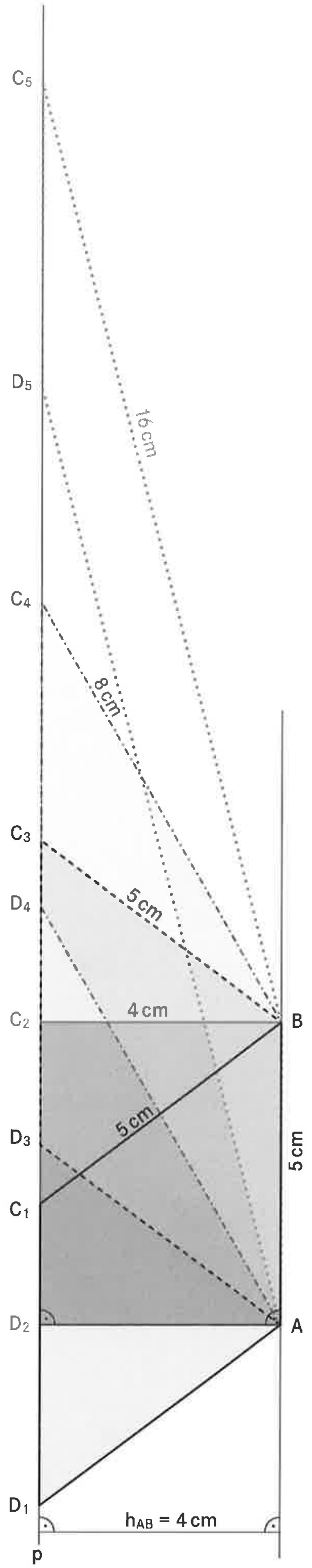
$BC_2 = 4\,cm \rightarrow \mathbf{u_2} = 2 \cdot 5\,cm + 2 \cdot 4\,cm = \mathbf{18\,cm}$

$BC_3 = 5\,cm \rightarrow \mathbf{u_3} = 4 \cdot 5\,cm = \mathbf{20\,cm}$

$BC_4 = 8\,cm \rightarrow \mathbf{u_4} = 2 \cdot 5\,cm + 2 \cdot 8\,cm = \mathbf{26\,cm}$

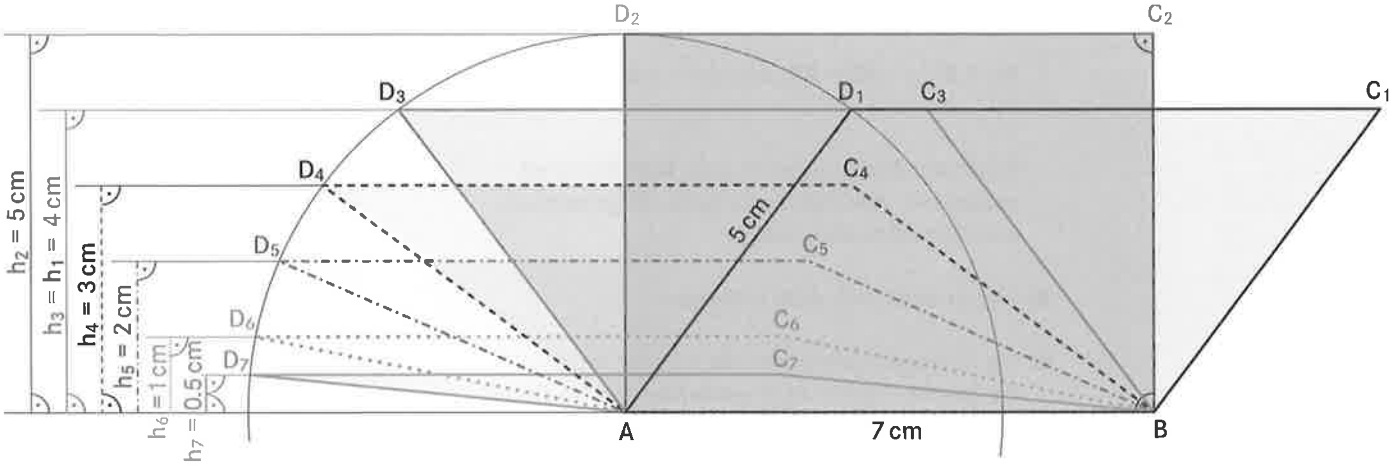
$BC_5 = 16\,cm \rightarrow \mathbf{u_5} = 2 \cdot 5\,cm + 2 \cdot 16\,cm = \mathbf{42\,cm}$

Das Rechteck über der Seite AB hat als spezielles Rhomboid minimalen Umfang.
Der Umfang wird umso grösser, je «schmäler» und «langgezogener» das Rhomboid ist.



E128 ■ $a = AB = 7\,cm$ $b = BC = 5\,cm$

Beispiele:



■ Für die oben gezeichneten Beispiele:

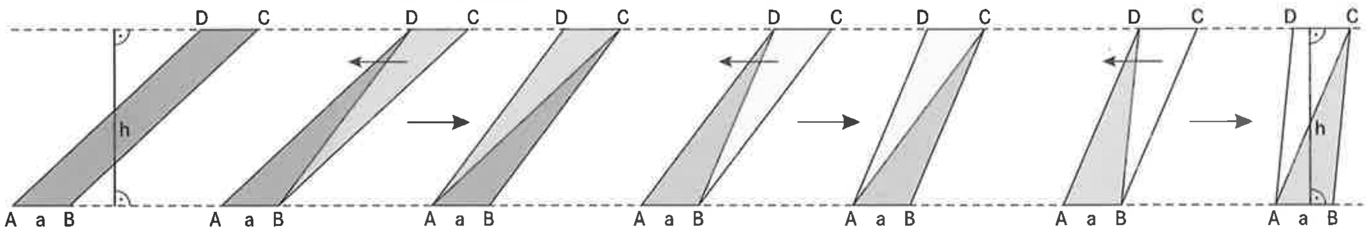
$A_1 = AB \cdot h_1 = 7\,cm \cdot 4\,cm = \mathbf{28\,cm^2}$
$A_2 = AB \cdot h_2 = 7\,cm \cdot 5\,cm = \mathbf{35\,cm^2}$
$A_3 = AB \cdot h_3 = 7\,cm \cdot 4\,cm = \mathbf{28\,cm^2}$
$A_4 = AB \cdot h_4 = 7\,cm \cdot 3\,cm = \mathbf{21\,cm^2}$
$A_5 = AB \cdot h_5 = 7\,cm \cdot 2\,cm = \mathbf{14\,cm^2}$
$A_6 = AB \cdot h_6 = 7\,cm \cdot 1\,cm = \mathbf{7\,cm^2}$
$A_7 = AB \cdot h_7 = 7\,cm \cdot 0.5\,cm = \mathbf{3.5\,cm^2}$

■ Es sind verschieden grosse Flächen möglich.
Die grösstmögliche Fläche ist die Rechtecksfläche.
Eine kleinstmögliche Fläche gibt es nicht. Je weiter nach unten die Ecke D auf dem Kreisbogen wandert, umso kleiner wird die Fläche. Kommt D auf die Gerade (AB) zu liegen, so ist die Fläche gleich Null, es handelt sich aber nicht mehr wirklich um ein Rhomboid; dieses ist zu einer Strecke zusammengefallen.

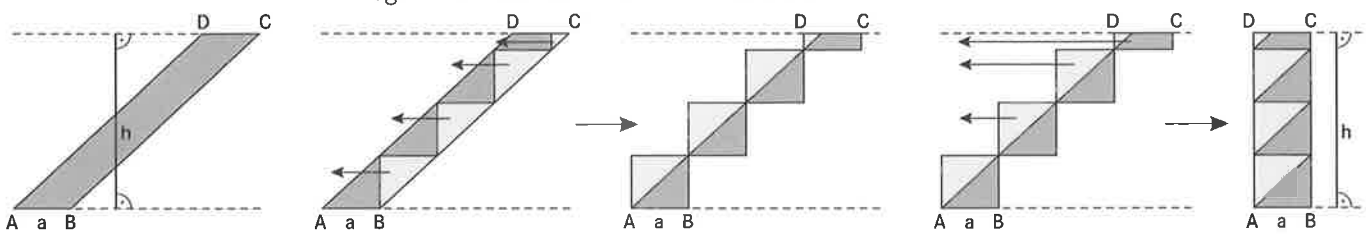
E129 Ja, die hergeleitete Formel gilt auch in diesem Fall.
Dies lässt sich beispielsweise zeigen, indem man ein solches «überhängendes» Rhomboid zerlegt und neu zusammensetzt, bis ein «normales» Rhomboid entsteht.

Zwei mögliche Wege dafür sind unten dargestellt, ein dritter Weg ist unter **E130** zu finden.

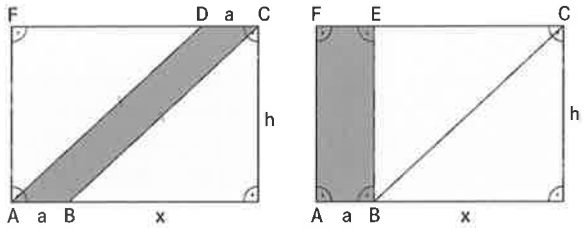
1. Rhomboid mit Hilfe der Diagonale jeweils in zwei kongruente Dreiecke zerlegen und eines davon verschieben:



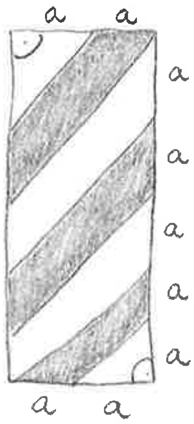
2. Rhomboid in rechtwinklige Dreiecke (hier zufällig fast rechtwinklich-gleichschenklig) zerlegen und diese zu einem Rechteck verschieben:



E130 - Ergänze das Rhomboid ABCD zu einem umgebenden Rechteck.
- Schneide das linke Dreieck in Gedanken weg und schiebe es zum rechten Dreieck hin.
- Links bleibt dabei die Rechtecksfläche ABEF frei.
- ABEF muss gleich gross sein, wie die ursprüngliche Rhomboidfläche ABCD, weil das gesamte Rechteck gleich gross bleibt:
  $A_{\square ABEF} = A_{\text{▱} ABCD} = a \cdot h$



E131

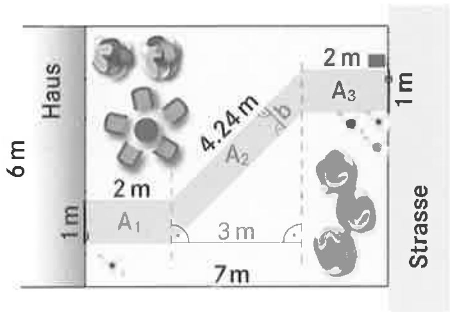


Ganze Rechtecksfläche: $5a \cdot 2a =$ $\mathbf{10a^2}$

Zwei rote Rhomboide: $2 \cdot a \cdot 2a = 2 \cdot 2a^2 = 4a^2$
Zwei rote Dreiecke (= Quadrat): a^2
Rote Fläche insgesamt: $4a^2 + a^2 =$ $\mathbf{5a^2}$
Schwarze Fläche insgesamt (= Ganze Rechtecksfläche - rote Fläche): $10a^2 - 5a^2 =$ $\mathbf{5a^2}$

Es hat gleich viel rote wie schwarze Farbe auf den Fensterläden!

E132 Der Gartenweg lässt sich zur Berechnung der Fläche in drei Teilstücke zerlegen:



A_1: Rechteck mit der Fläche $2\,m \cdot 1\,m = 2\,m^2$
A_2: Rhomboid mit der Fläche $1\,m \cdot 3\,m = 3\,m^2$
A_1: Rechteck mit der Fläche $2\,m \cdot 1\,m = 2\,m^2$

Fläche Gartenweg total: $7\,m^2$

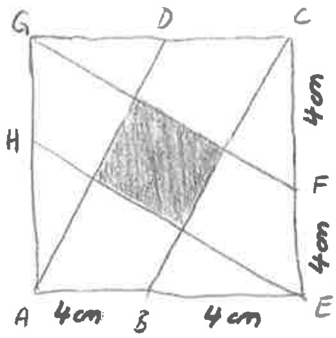
10 kg Kies reichen für $0.2\,m^2$
Für $1\,m^2$ braucht es demnach 5-mal soviel Kies, also 50 kg.
Für $7\,m^2$ braucht es $7 \cdot 50\,kg =$ **350 kg**

Familie Meier muss ca. 350 kg Kies kaufen, um den ganzen Weg zu bedecken.

Die Breite b des schrägen Wegstücks ist diejenige Höhe des Rhomboids, die zu 4.24 m gehört.
Es gilt somit: $4.24\,m \cdot b = 3\,m^2$
$b = 3\,m^2 : 4.24\,m = 0.708\,m = 71\,cm$

Der Weg hat eine Breite von ewas mehr als 70 cm. Dies dürfte für den Zwillingswagen der Schwägerin knapp ausreichen.

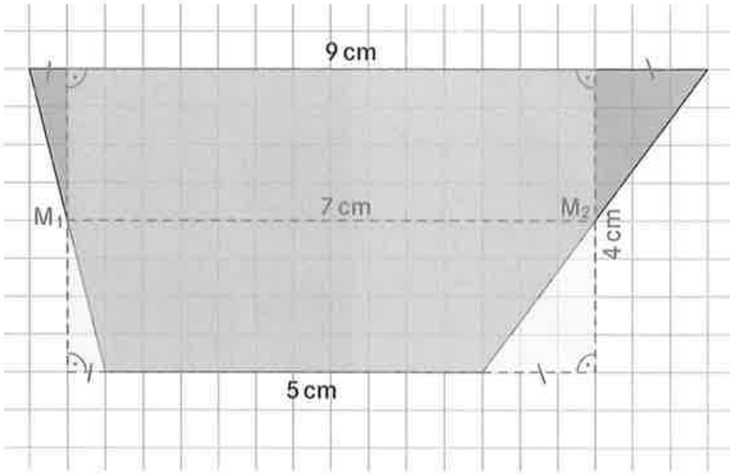
E133 Fläche des ganzen Quadrates: 8 cm · 8 cm = 64 cm²



Fläche des Rhomboids ABCD: 4 cm · 8 cm = 32 cm²
Fläche des Rhomboids EFGH: 4 cm · 8 cm = 32 cm²
Die Summe der beiden Rhomboidflächen wäre somit 64 cm², gleich viel wie die ganze Quadratfläche.

Da das mittlere doppelt schraffierte Quadrat durch beide Rhomboide überdeckt wird, muss dessen Fläche genau der Fläche der vier gelben bzw. weissen Dreiecken entsprechen.

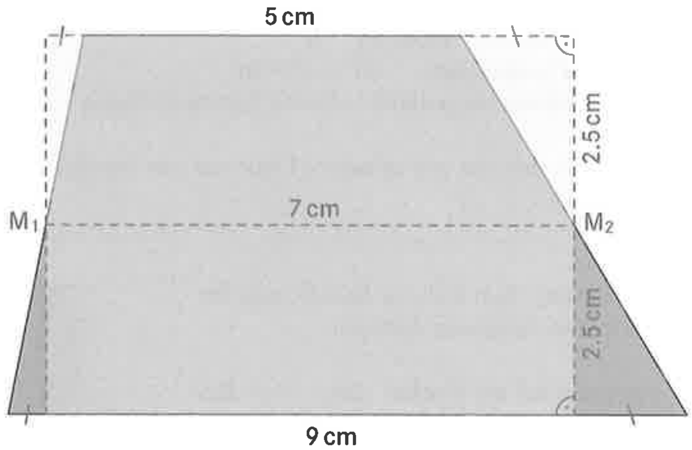
E134



Die Fläche des Trapezes entspricht der Fläche eines Rechtecks mit Seiten der Länge 7 cm und 4 cm:

A⏢ = A▭
= 7 cm · 4 cm
= **28 cm²**

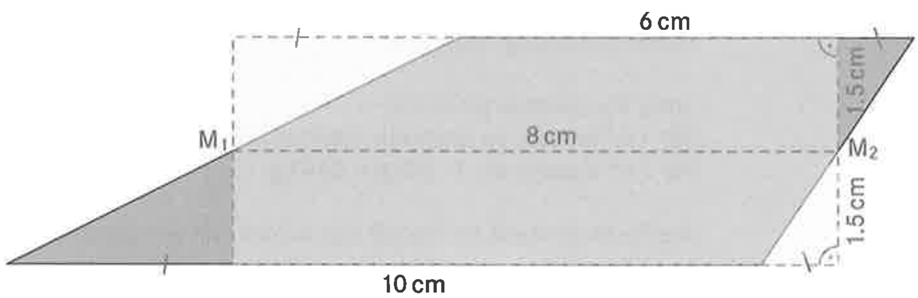
7 cm liegt dabei in der Mitte zwischen 5 cm und 9 cm.
4 cm ist der Abstand der beiden Parallelseiten.



Die Fläche des Trapezes entspricht der Fläche eines Rechtecks mit Seiten der Länge 7 cm und 5 cm:

A⏢ = A▭
= 7 cm · 5 cm
= **35 cm²**

7 cm liegt wiederum in der Mitte zwischen 5 cm und 9 cm.
5 cm ist der Abstand der beiden Parallelseiten.



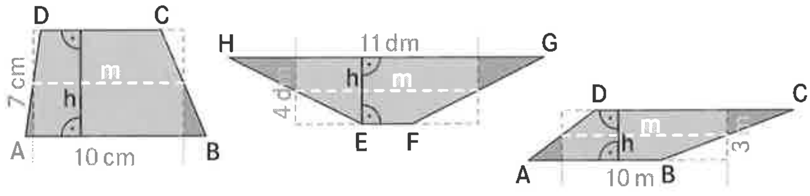
Die Fläche des Trapezes entspricht der Fläche eines Rechtecks mit Seiten der Länge 8 cm und 3 cm:

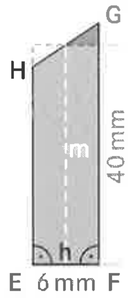
A⏢ = A▭ = 8 cm · 3 cm = **24 cm²**

8 cm liegt in der Mitte zwischen 10 cm und 6 cm. 3 cm ist der Abstand der Parallelseiten.

Vorgehen
Rechteck zeichnen, das durch die Seitenmitten verläuft und die gleiche Höhe hat.
Dieses ist flächengleich.

E135 Die eine Seite eines flächengleichen Rechtecks ist gleich lang wie die Mittellinie des Trapezes, die andere ist gleich lang, wie dessen Höhe.





a A_{ABCD} = 10 cm · 7 cm (= m · h)
= **70 cm²**

b A_{EFGH} = **11 dm** · 4 dm (= m · h)
= **44 dm²**

c A_{ABCD} = 10 m · 3 m (= m · h)
= **30 m²**

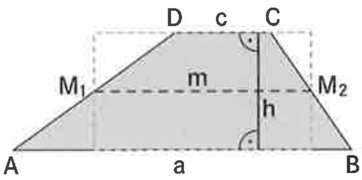
d A_{EFGH} = 40 mm · 6 mm (= m · h = m · EF)
= **240 mm²**

Berechnung einer Trapezfläche

Die Fläche eines Trapezes berechnen wir, indem wir die Grösse eines flächengleiches Rechtecks berechnen.

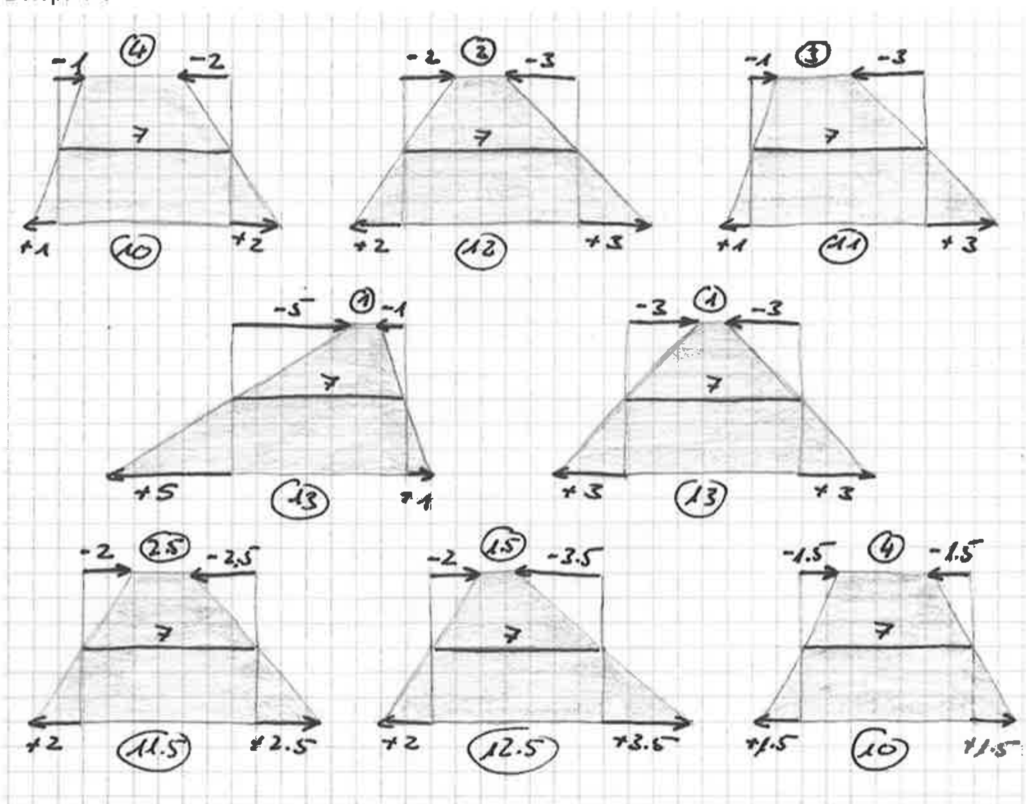
Fläche eines Trapezes = **Mittellinie mal Höhe**

$$A_{\triangle} = m \cdot h$$



Mittellinie und Höhe müssen in der gleichen Einheit benutzt werden.

E136 Beispiele:



Lesebeispiele:

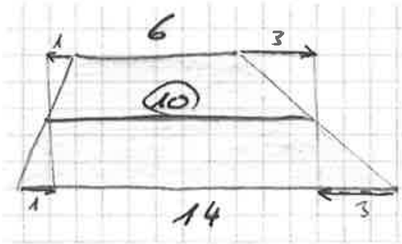
Mittellinie	7	7	7	
lange Parallelseite	7+1+2 = **10**	7+2+3 = **12**	7+1+3 = **11**	
kurze Parallelseite	7-1-2 = **4**	7-2-3 = **2**	7-1-3 = **3**	usw.

E137 **a** a = 14 cm c = 6 cm

Um die Mittellinie m zu erhalten muss die lange Parallelseite a um gleich viel verkürzt werden, wie die kurze Parallelseite c verlängert werden muss:

m = 14 cm − **4** cm = 6 cm **+ 4** cm = **10 cm**

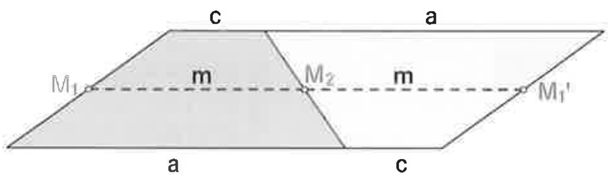
m liegt genau **in der Mitte zwischen a und c.** m entspricht somit dem **arithmetischen Mittel** (= **Durchschnitt**) der beiden Werte a und c:



4 cm ist die halbe Differenz von 6 cm und 14 cm: (14 cm − 6 cm) : 2 = 4 cm

m = (a+c) : 2 = (14 cm + 6 cm) : 2 = **10 cm** oder **m** = $\frac{a+c}{2}$ = $\frac{14\,cm + 6\,cm}{2}$ = **10 cm**

Anders ausgedrückt:
a und c sind zusammen zweimal so lang wie die Mittellinie. Dies lässt sich auch zeigen, indem man das Trapez an der Mitte eines Schenkels spiegelt:



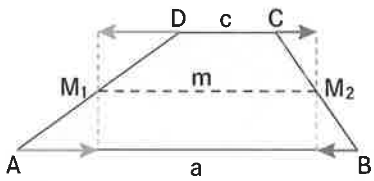
b c = 7 dm		**c** c = 6 m		**d** c = 17 mm		**e** c = 8.8 m	
m = **10 dm**		m = **9 m**		m = **22 mm**		m = **7.2 m**	
a = 13 dm		a = 12 m		a = 27 mm		a = 5.6 m	

m

f **Mittellinie**

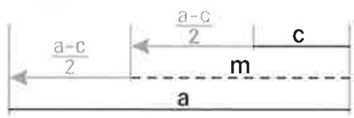
Die Mittellinie lässt sich als **arithmetisches Mittel** (= **Durchschnitt**) der beiden Parallelseiten berechnen.

m = (a+c) : 2 oder **m** = $\frac{a+c}{2}$



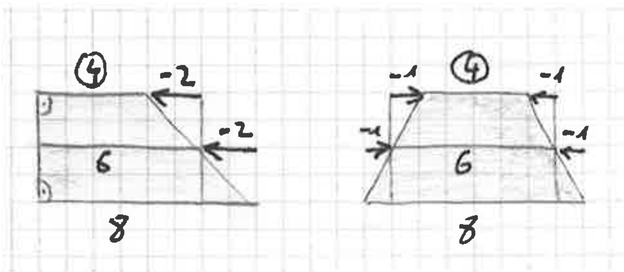
Die Mittellinie unterscheidet sich in der Länge gleich viel von a wie von c: **a − m = m − c**

Man erhält sie auch, indem man die halbe Differenz von a und c zur kürzeren Seite zählt.



E138 **a** a = 8 cm m = 6 cm

Da die Mittellinie m um 2 cm kleiner ist als die angegebene Parallelseite a, muss die zweite Parallelseite c nochmals um 2 cm kleiner sein (Die Länge von m liegt ja in der Mitte von a und c!):
a − m = 8 cm − 6 cm = 2 cm
c = 6 cm − 2 cm = **4 cm**



b **c = 16 mm** (−12 mm)
m = 28 mm (−12 mm)
a = 40 mm

c c = 2 m (+0.4 m)
m = 2.4 m (+0.4 m)
a = 2.8 m

d c = 3.1 dm (−1.2 dm)
m = 1.9 dm (−1.2 dm)
a = 0.7 dm

e **c = nicht möglich**
m = 3 cm (−7 cm)
a = 10 cm (−7 cm)

E139 **a** a = 14 cm c = 8 cm h = 5 cm m = ? A = ?

m = (a + c) : 2
= (14 cm + 8 cm) : 2 = **11 cm**

A = m · h
= 11 cm · 5 cm = **55 cm²**

b a = 12 mm m = 21 mm h = 13 cm c = ? A = ?

von a zu m: + 9 mm
c = m + 9 mm = **30 mm**

A = m · h
= 21 mm · 13 mm = **273 mm²**

c c = 12.2 dm m = 28.1 dm h = 13.6 dm a = ? A = ?

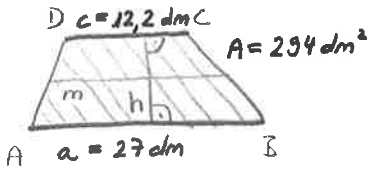
von c zu m: + 15.9 dm
a = m + 15.9 dm = **44 dm**

A = m · h
= 28.1 dm · 13.6 dm = **382.16 dm²**

E140 **a** a = 27 dm c = 12.2 dm A = 294 dm² m = ? h = ?

m = (a + c) : 2
= (27 dm + 12.2 dm) : 2 = **19.6 dm**

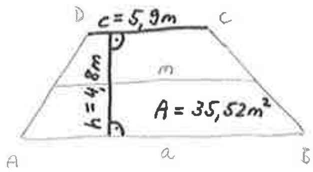
A = m · h
h = A : m
= 294 dm² : 19.6 dm = **15 dm**



b c = 5.9 m h = 4.8 m A = 35.52 m² a = ? m = ?

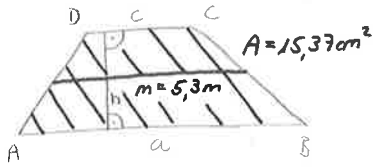
A = m · h
m = A : h
= 35.52 m² : 4.8 m = **7.4 m**

von c zu m: + 1.5 m
a = m + 1.5 m = **8.9 m**



c m = 5.3 cm A = 15.37 cm² a = ? c = ? h = ?

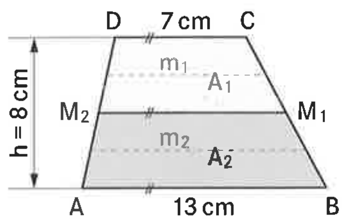
A = m · h
h = A : m
= 15.37 cm² : 5.3 cm = **2.9 cm**



für a und c gibt es beliebig viele Möglichkeiten.
Beispiele:

a = m + 1 cm = **6.3 cm** **c** = m − 1 cm = **4.3 cm**
a = m + 3.1 cm = **8.4 cm** **c** = m − 3.1 cm = **2.2 cm**
a = m − 4.4 cm = **0.9 cm** **c** = m + 4.4 cm = **9.7 cm**

E141 M_1M_2 ist Mittellinie des Trapezes ABCD:
M_1M_2 = (13 cm + 7 cm) : 2 = 10 cm

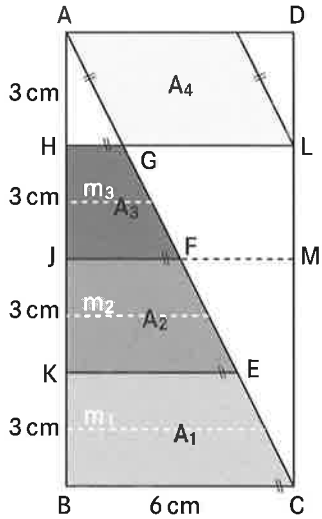


Mittellinie des oberen Teiltrapezes: m_1 = (10 cm + 7 cm) : 2
= 8.5 cm
Höhe des oberen Teiltrapezes: h_1 = h : 2 = 4 cm

Fläche des oberen Teiltrapezes: A_1 = $m_1 \cdot h_1$ = 8.5 cm · 4 cm = **34 cm²**

Mittellinie des unteren Teiltrapezes: m_2 = (13 cm + 10 cm) : 2 = 11.5 cm
Höhe des unteren Teiltrapezes: h_2 = h : 2 = 4 cm
Fläche des unteren Teiltrapezes: A_2 = $m_2 \cdot h_2$ = 11.5 cm · 4 cm = **46 cm²**

E142 JF ist Mittellinie des Dreiecks BCA und damit halb so lang wie BC.
JF = BC : 2 = 6 cm : 2 = **3 cm**



Dies lässt sich auf zwei Arten begründen:

1. Betrachten wir das Dreieck als entartetes Trapez, dessen eine Parallelseite zu einem Punkt «geschrumpft» ist, so lässt sich deren Länge gemäss Formel berechnen:
   JF = (BC + AA) : 2 = (6 cm + 0 cm) : 2 = **3 cm**
2. Das Dreieck BCA und das Dreieck DAC sind punktsymmetrisch zueinander bezüglich F.
   Zusammen ergeben sie das Rechteck BCDA. JF ergänzt sich dabei mit FM zur Breite des Rechtecks.

KE ist Mittellinie des Trapezes BCFJ:
KE = (BC + JF) : 2 = (6 cm + 3 cm) : 2 = **4.5 cm**

HG ist Mittellinie des Dreiecks JFA:
HG = (JF + AA) : 2 = (3 cm + 0 cm) : 2 = **1.5 cm**

Trapez BCEK
Mittellinie m_1 = (BC + KE) : 2 = (6 cm + 4.5 cm) : 2 = **5.25 cm**
Fläche $\mathbf{A_1} = m_1 \cdot h_1$ = 5.25 cm · 3 cm = **15.75 cm²**

Trapez KEFJ
Mittellinie m_2 = (KE + JF) : 2 = (4.5 cm + 3 cm) : 2 = **3.75 cm**
Fläche $\mathbf{A_2} = m_2 \cdot h_2$ = 3.75 cm · 3 cm = **11.25 cm²**

Trapez JFGH
Mittellinie m_3 = (JF + HG) : 2 = (3 cm + 1.5 cm) : 2 = **2.25 cm**
Fläche $\mathbf{A_3} = m_3 \cdot h_3$ = 2.25 cm · 3 cm = **6.75 cm²**

Rhomboid GLDA
Seite GL = (BC – HG) = 6 cm – 1.5 cm = **4.5 cm**
Fläche $\mathbf{A_4} = GL \cdot h_4$ = 4.5 cm · 3 cm = **13.5 cm²**

E143 **Andrea, Doris** und **Ernesto** haben die Aufgabe richtig gelöst.

Aus der Formel für die Fläche «Fläche = Mittellinie · Höhe» kann nämlich leicht abgeleitet werden, dass das Verdoppeln der Mittelllinie oder der Höhe zu einer doppelt so grossen Fläche führt.

Andrea hat die Höhe verdoppelt und gleichzeitig die Mittellinie in der ursprünglichen Länge belassen, da die beiden Parallelseiten gleich lang bleiben.

Beat hat die Höhe zwar auch verdoppelt, aber CD als neue Mittellinie gewählt. Diese ist kleiner als die ursprüngliche.

Claudio: Durch ein alleiniges Verdoppeln der langen Parallelseite wird die Mittellinie nicht verdoppelt, die Fläche also auch nicht.

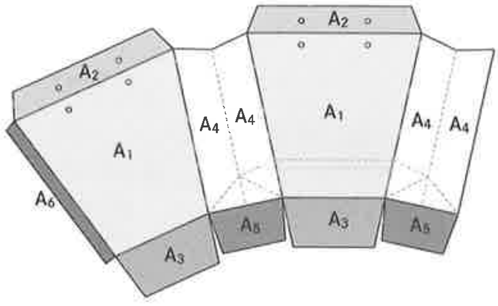
Doris: Ein Verdoppeln sowohl der kurzen wie auch der langen Parallelseite bewirkt ein Verdoppeln der Mittellinie:

$$\frac{2a + 2c}{2} = \frac{2 \cdot (a+c)}{2} = 2 \cdot \frac{(a+c)}{2} = 2 \cdot m$$

oder: $(2a + 2c) : 2 = 2 \cdot \big((a+c)\big) : 2 = 2 \cdot m$

Ernesto hat nur die Mittellinie verdoppelt und die Höhe belassen. Dies führt zu einer Verdoppelung der Fläche.

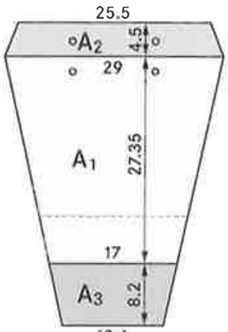
E144 Die Gesamtfläche A der Tasche setzt sich aus folgenden Teilen zusammen:



$A = 2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3 + 4 \cdot A_4 + 2 \cdot A_5 + A_6$

Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

Wir berechnen die Teile einzeln:

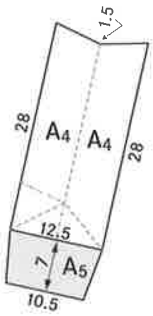


alle Angaben in cm

A_1:
Höhe = 27.35 cm
Mittellinie = (29 cm + 17 cm) : 2 = 23 cm
Fläche = 23 cm · 27.35 cm = **629.05 cm²**

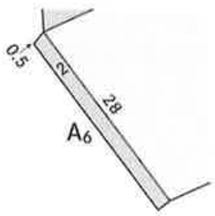
A_2:
Höhe = 4.5 cm
Mittellinie = (29 cm + 25.5 cm) : 2 = 27.25 cm
Fläche = 27.25 cm · 4.5 cm = **122.625 cm²**

A_3:
Höhe = 8.2 cm
Mittellinie = (17 cm + 13.4 cm) : 2 = 15.2 cm
Fläche = 15.2 cm · 8.2 cm = **124.64 cm²**



A_4:
Höhe = 12.5 cm : 2 = 6.25 cm
kurze Parallelseite = 28 cm − 1.5 cm = 26.5 cm
Mittellinie = (28 cm + 26.5 cm) : 2 = 27.25 cm
Fläche = 27.25 cm · 6.25 cm = **170.3125 cm²**

A_5:
Höhe = 7 cm
Mittellinie = (12.5 cm + 10.5 cm) : 2 = 11.5 cm
Fläche = 11.5 cm · 7 cm = **80.5 cm²**



A_6:
Höhe = 2 cm
kurze Parallelseite = 28 cm − 0.5 cm = 27.5 cm
Mittellinie = (28 cm + 27.5 cm) : 2 = 27.75 cm
Fläche = 27.75 cm · 2 cm = **55.5 cm²**

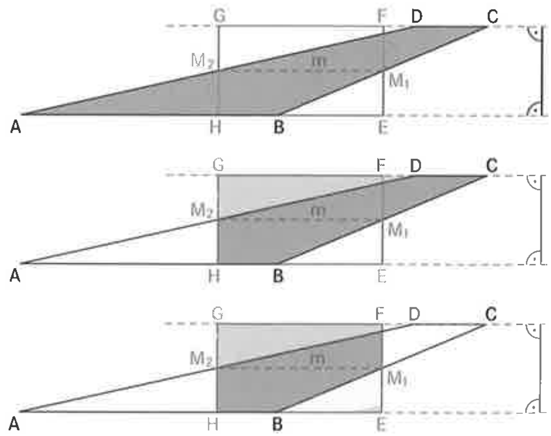
Papieranteil Tasche:

$A_{Tasche} = 2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3 + 4 \cdot A_4 + 2 \cdot A_5 + A_6 = \mathbf{2\,650.38\,cm^2}$

$A_{Papier} = 85\,cm \cdot 50\,cm = 4\,250\,cm^2$

Anteil Tasche: $\frac{2\,650}{4\,250} = \frac{53}{85} \approx \mathbf{\frac{3}{5}}$

E145 Ja, die Formel gilt auch für ein so schiefes Trapez!

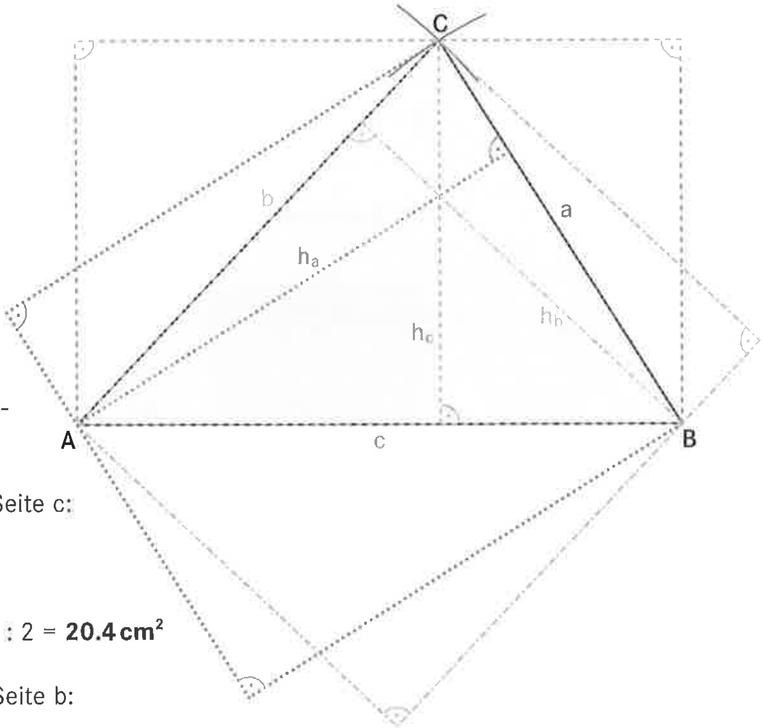


Dies lässt sich beispielsweise zeigen, indem man das Trapez ABCD in Stücke schneidet, die sich zum Rechteck HEFG zusammenfügen lassen:

$\triangle AHM_2$ abschneiden und an M_2 gespiegelt anfügen → $\triangle M_2DG$.
$\triangle M_1CF$ abschneiden und an M_1 gespiegelt anfügen → $\triangle BEM_1$.

Diese Aufgabe ist gut geeignet für den Computereinsatz.

E146 **a** Konstruktion des Dreiecks gemäss SSS.



b Die Dreiecksfläche entspricht der Hälfte eines Rechtecks über einer Dreiecksseite, dessen zweite Seite der zugehörigen Dreieckshöhe entspricht.

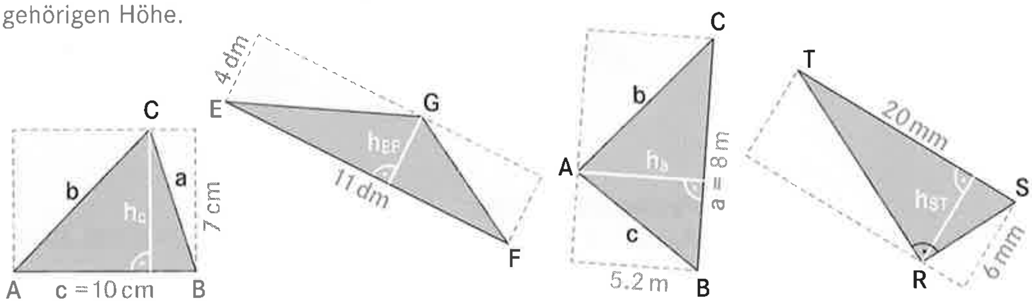
Fläche mit Hilfe der Seite c:
c $= 8\,\text{cm}$
h_c $= 5.1\,\text{cm}$
$\mathbf{A_c}$ $= c \cdot h_c : 2$
$= 8\,\text{cm} \cdot 5.1\,\text{cm} : 2 = \mathbf{20.4\,cm^2}$

Fläche mit Hilfe der Seite b:
b $= 7\,\text{cm}$
h_b $= 5.8\,\text{cm}$
$\mathbf{A_b}$ $= b \cdot h_b : 2 = 7\,\text{cm} \cdot 5.8\,\text{cm} : 2 = \mathbf{20.3\,cm^2}$

Fläche mit Hilfe der Seite a:
a $= 6\,\text{cm}$
h_a $= 6.8\,\text{cm}$
$\mathbf{A_a}$ $= a \cdot h_a : 2 = 6\,\text{cm} \cdot 6.8\,\text{cm} : 2 = \mathbf{20.4\,cm^2}$

Alle drei Berechnungen sollten zum gleichen Resultat führen. Unterschiede resultieren aus **Zeichen-** und **Messungenauigkeiten**.

E147 Die Fläche eines Dreiecks ist **halb so gross**, wie die Fläche eines umgebenden Rechecks, das eine Seite mit dem Dreieck gemeinsam hat. Die zweite Rechteckseite entspricht der zugehörigen Höhe.



a $\mathbf{A_{ABC}} = 10\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} : 2 \quad (= c \cdot h_c : 2)$
$= \mathbf{35\,cm^2}$

b $\mathbf{A_{EFG}} = \mathbf{11\,dm} \cdot 4\,\text{dm} : 2 \quad (= EF \cdot h_{EF} : 2)$
$= \mathbf{22\,dm^2}$

c $\mathbf{A_{ABC}} = 8\,\text{m} \cdot 5.2\,\text{m} : 2 \quad (= a \cdot h_a : 2)$
$= \mathbf{20.8\,m^2}$

d $\mathbf{A_{RST}} = 20\,\text{mm} \cdot 6\,\text{mm} : 2 \quad (= ST \cdot h_{ST} : 2)$
$= \mathbf{60\,mm^2}$

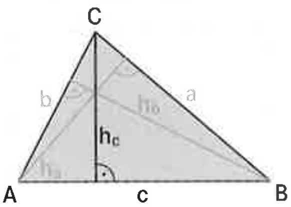
A△

e **Berechnung einer Dreiecksfläche**
Die Fläche eines Dreiecks ist halb so gross wie die Fläche ein umgebenden Rechtecks.

Fläche Dreieck = **Seite mal zugehörige Höhe durch 2**

$A_\triangle = \mathbf{c \cdot h_c : 2}$ $\quad A_\triangle = \mathbf{a \cdot h_a : 2}$ $\quad A_\triangle = \mathbf{b \cdot h_b : 2}$

$A_\triangle = \dfrac{c \cdot h_c}{2}$ $\quad A_\triangle = \dfrac{a \cdot h_a}{2}$ $\quad A_\triangle = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$



Seite und Höhe müssen in der gleichen Einheit benutzt werden.

E148 **a** $c = 12\,\text{cm}$ $h_c = 8\,\text{cm}$ $A = ?$

$\mathbf{A} = c \cdot h_c : 2$
$= 12\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} : 2 = \mathbf{48\,cm^2}$

oder $\mathbf{A} = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{12\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm}}{2} = \mathbf{48\,cm^2}$

b $h_a = 10\,\text{cm}$ $A = 48\,\text{cm}^2$ $a = ?$

$A = a \cdot h_a : 2$
$\mathbf{a} = 2 \cdot A : h_a$
$= 2 \cdot 48\,\text{cm}^2 : 10\,\text{cm} = \mathbf{9.6\,cm}$

oder
$$\frac{a \cdot h_a}{2} = A$$
$$a \cdot h_a = 2 \cdot A$$
$$\mathbf{a} = \frac{2 \cdot A}{h_a} = \frac{2 \cdot 48\,\text{cm}^2}{10\,\text{cm}} = \mathbf{9.6\,cm}$$

E149 **a** $b = 13.2\,\text{cm}$ $c = 16.5\,\text{cm}$ $h_c = 5.8\,\text{cm}$ $h_b = ?$ $A = ?$

$\mathbf{A} = c \cdot h_c : 2$
$= 16.5\,\text{cm} \cdot 5.8\,\text{cm} : 2 = \mathbf{47.85\,cm^2}$

oder $\mathbf{A} = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{16.5\,\text{cm} \cdot 5.8\,\text{cm}}{2} = \mathbf{47.85\,cm^2}$

$A = b \cdot h_b : 2$
$\mathbf{h_b} = 2 \cdot A : b$
$= 2 \cdot 47.85\,\text{cm}^2 : 13.2\,\text{cm} = \mathbf{7.25\,cm}$

$$\frac{b \cdot h_b}{2} = A$$
$$b \cdot h_b = 2 \cdot A$$
$$\mathbf{h_b} = \frac{2 \cdot A}{b} = \frac{2 \cdot 47.85\,\text{cm}^2}{13.2\,\text{cm}} = \mathbf{7.25\,cm}$$

b $a = 27\,\text{mm}$ $h_b = 40.5\,\text{mm}$ $A = 1926\,\text{mm}^2$ $h_a = ?$ $b = ?$

$A = a \cdot h_a : 2$
$\mathbf{h_a} = 2 \cdot A : a$
$= 2 \cdot 1926\,\text{mm}^2 : 27\,\text{mm} \approx \mathbf{142.7\,mm}$

oder
$$\frac{a \cdot h_a}{2} = A$$
$$a \cdot h_a = 2 \cdot A$$
$$\mathbf{h_a} = \frac{2 \cdot A}{a} = \frac{2 \cdot 1926\,\text{mm}^2}{27\,\text{mm}} \approx \mathbf{142.7\,mm}$$

$A = b \cdot h_b : 2$
$\mathbf{b} = 2 \cdot A : h_b$
$= 2 \cdot 1926\,\text{mm}^2 : 40.5\,\text{mm} \approx \mathbf{95.1\,mm}$

$$\frac{b \cdot h_b}{2} = A$$
$$b \cdot h_b = 2 \cdot A$$
$$\mathbf{b} = \frac{2 \cdot A}{h_b} = \frac{2 \cdot 1926\,\text{mm}^2}{40.5\,\text{mm}} \approx \mathbf{95.1\,mm}$$

c $h_c = 6.8\,\text{dm}$ $h_b = 12.4\,\text{dm}$ $A = 63.24\,\text{dm}^2$ $c = ?$ $b = ?$

$A = b \cdot h_b : 2$
$\mathbf{b} = 2 \cdot A : h_b$
$= 2 \cdot 63.24\,\text{dm}^2 : 12.4\,\text{dm} = \mathbf{10.2\,dm}$

oder
$$\frac{b \cdot h_b}{2} = A$$
$$b \cdot h_b = 2 \cdot A$$
$$\mathbf{b} = \frac{2 \cdot A}{h_b} = \frac{2 \cdot 63.24\,\text{dm}^2}{12.4\,\text{dm}} = \mathbf{10.2\,dm}$$

$A = c \cdot h_c : 2$
$\mathbf{c} = 2 \cdot A : h_c$
$= 2 \cdot 63.24\,\text{dm}^2 : 6.8\,\text{dm} = \mathbf{18.6\,dm}$

ebenso
$$\mathbf{c} = \frac{2 \cdot A}{h_c} = \frac{2 \cdot 63.24\,\text{dm}^2}{6.8\,\text{dm}} = \mathbf{18.6\,dm}$$

E150 $a = 5.4\,\text{cm}$ $\quad h_a = 3.5\,\text{cm}$ $\quad b = 4.5\,\text{cm}$ $\quad h_b = ?$

$A = a \cdot h_a : 2$
$\quad = 5.4\,\text{cm} \cdot 3.5\,\text{cm} : 2 = 9.45\,\text{cm}^2$

oder

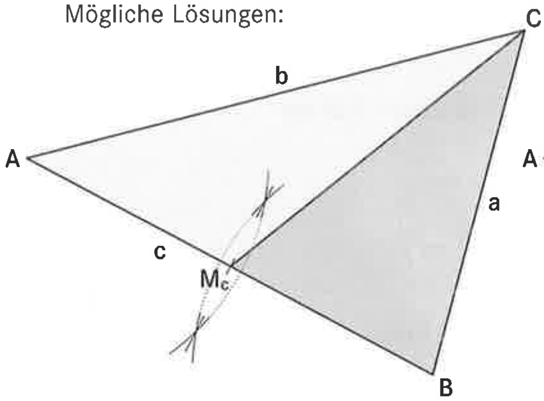
$A = \dfrac{a \cdot h_a}{2} = \dfrac{5.4\,\text{cm} \cdot 3.5\,\text{cm}}{2} = 9.45\,\text{cm}^2$

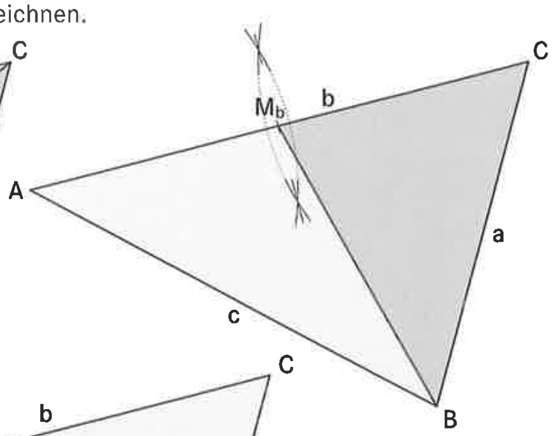
$A = b \cdot h_b : 2$
$\mathbf{h_b} = 2 \cdot A : b$
$\quad = 2 \cdot 9.45\,\text{cm}^2 : 4.5\,\text{cm} = \mathbf{4.2\,cm}$

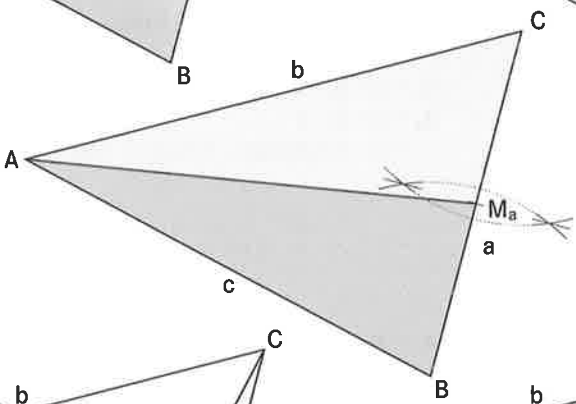
$$\frac{b \cdot h_b}{2} = A$$
$$b \cdot h_b = 2 \cdot A$$
$$\mathbf{h_b} = \frac{2 \cdot A}{b}$$
$$= \frac{2 \cdot 9.45\,\text{cm}^2}{4.5\,\text{cm}} \approx \mathbf{4.2\,cm}$$

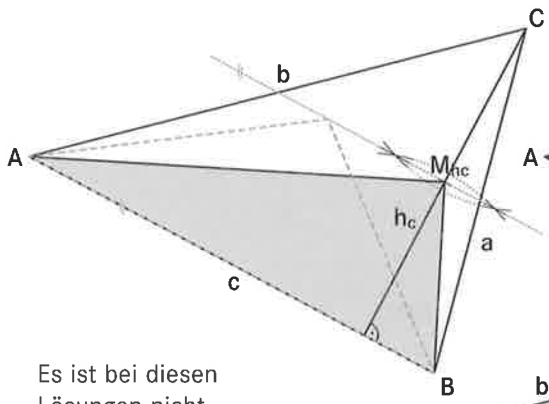
formal: $\quad a \cdot h_a : 2 = b \cdot h_b : 2 \quad | \cdot 2$
also auch $\quad a \cdot h_a = b \cdot h_b$
und $\quad h_b = \dfrac{a \cdot h_a}{b}$

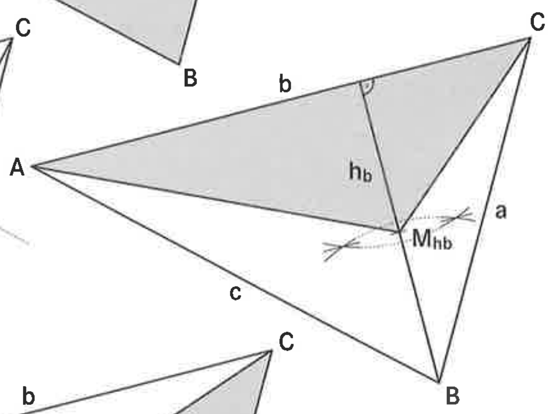
E151 Ein Dreieck mit **halb so grosser Fläche** lässt sich am einfachsten durch Halbieren einer Seite oder durch Halbieren einer Höhe zeichnen.
Mögliche Lösungen:



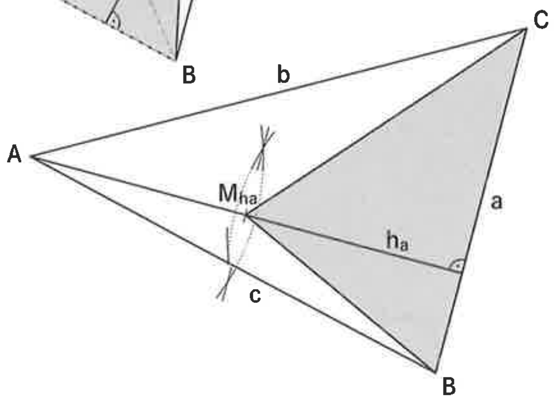




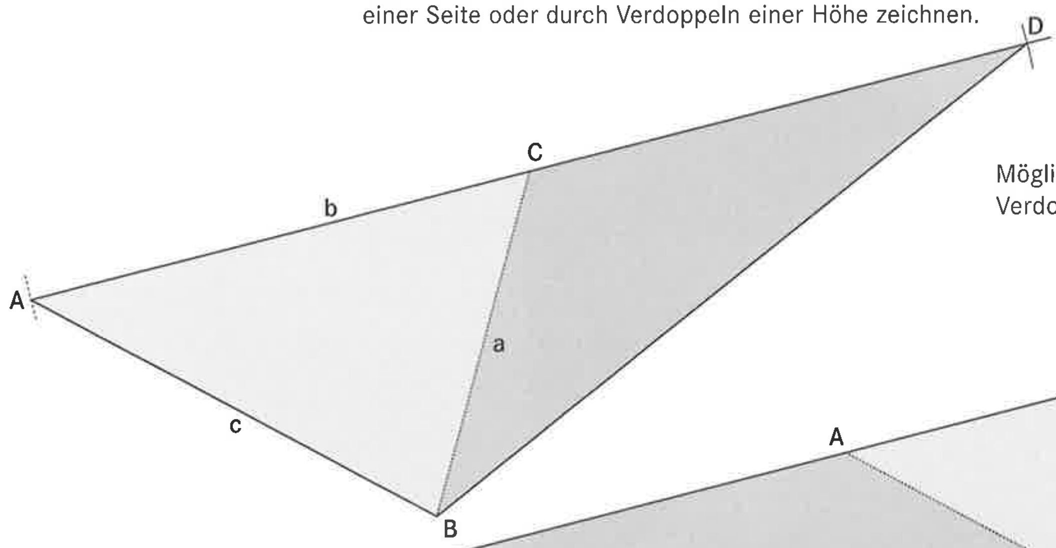




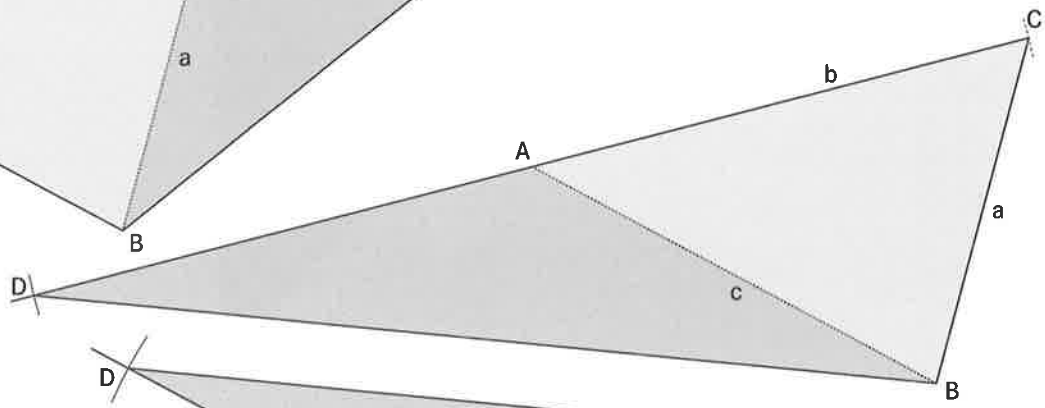
Es ist bei diesen Lösungen nicht zwingend, dass die dritte Ecke genau im Höhenmittelpunkt liegt. Sie muss einfach irgendwo auf halber Höhe liegen.

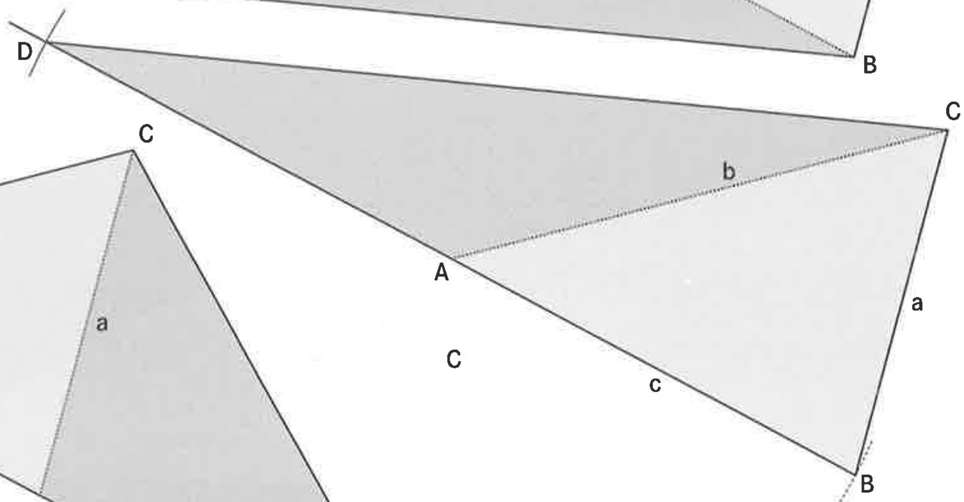


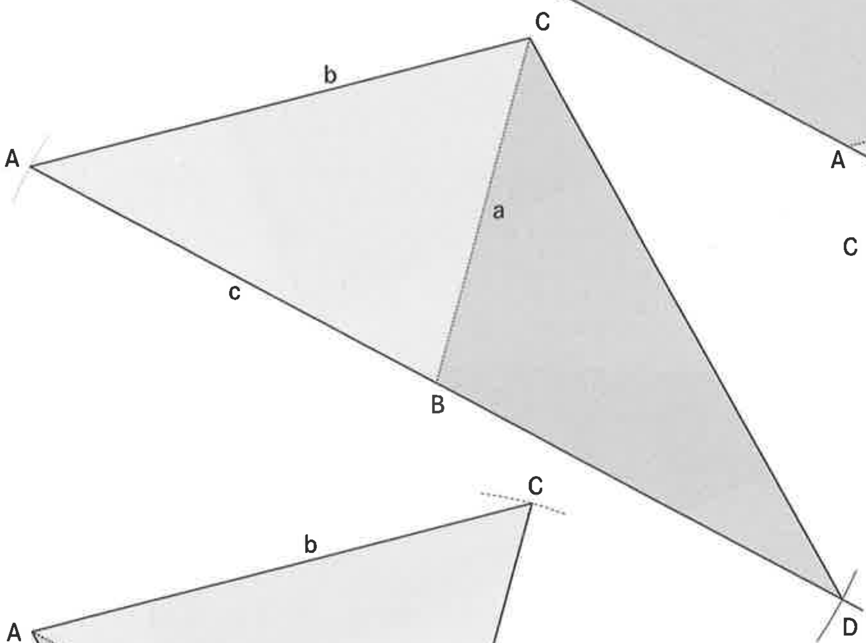
5 Ein Dreieck mit **doppelt so grosser Fläche** lässt sich am einfachsten durch Verdoppeln einer Seite oder durch Verdoppeln einer Höhe zeichnen.

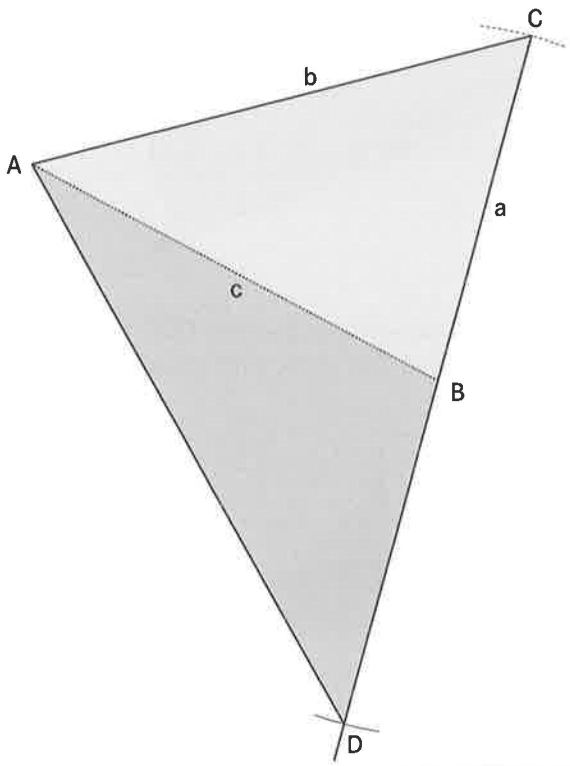


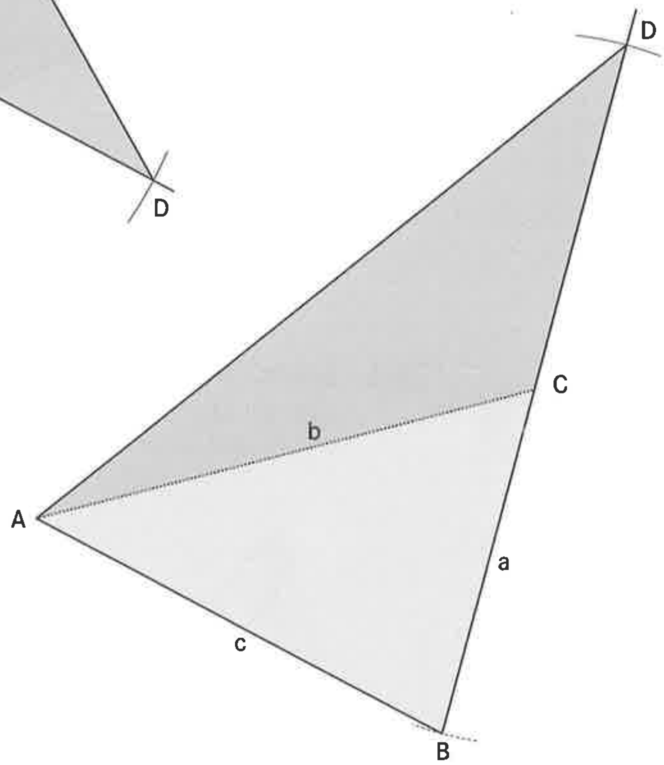
Mögliche Lösungen durch Verdoppeln einer Seite:





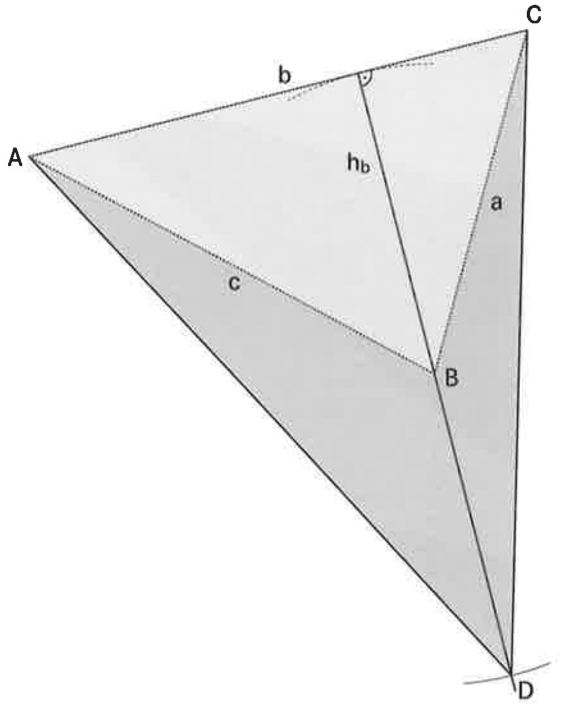




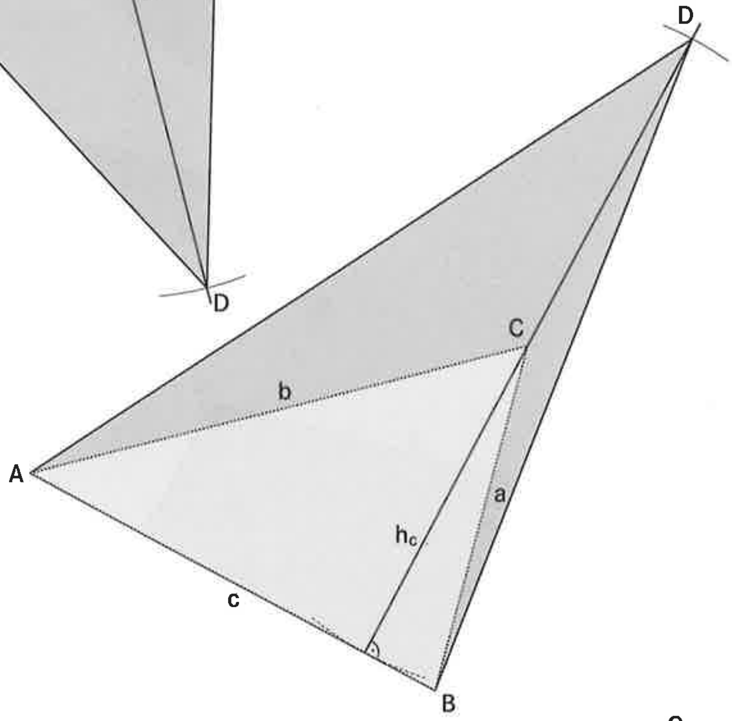


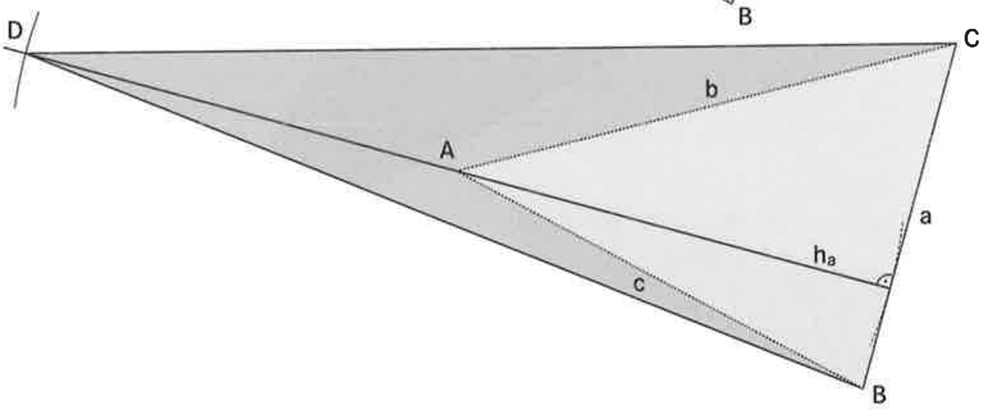
→

→

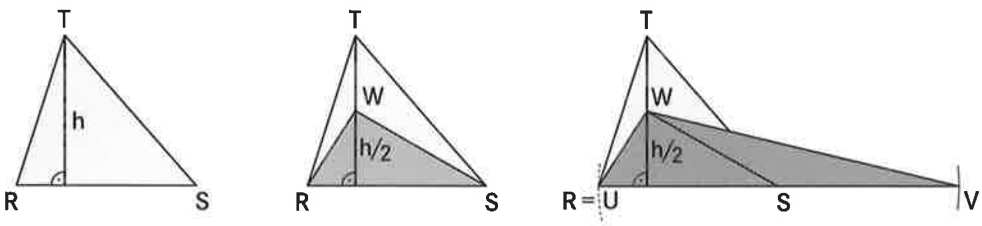


Mögliche Lösungen durch Verdoppeln einer Höhe:





E152 **Die Fläche bleibt gleich**: Wird die Höhe halbiert, so halbiert sich auch die Fläche. Wird danach die Grundseite verdoppelt, so verdoppelt sich auch die Fläche, nimmt also wieder den ursprünglichen Wert an.

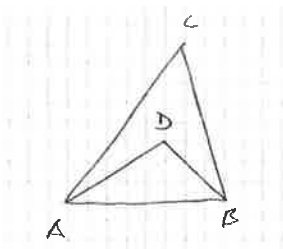


In Formeln:

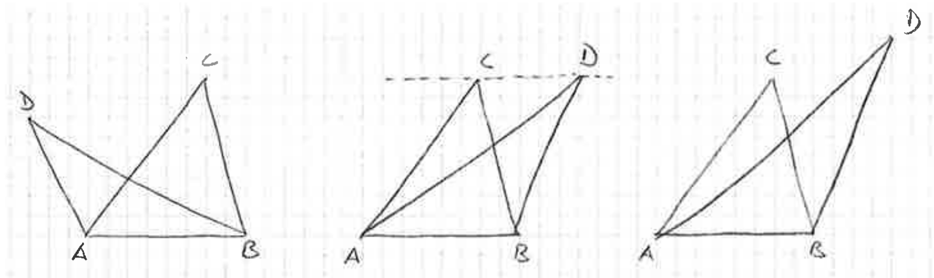
$A_{RST} = RS \cdot h : 2 = \frac{RS \cdot h}{2}$

$\mathbf{A_{UVW}} = (2 \cdot RS) \cdot (h:2) : 2 = RS \cdot h : 2 = \mathbf{A_{RST}}$

E153 **a, b** Ist der stumpfe Winkel bei D, so hat das spitzwinklige Dreieck ABC offensichtlich die grössere Fläche und den grösseren Umfang als das stumpfwinklige Dreieck ABD.

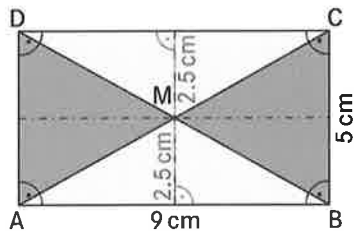


Ist der stumpfe Winkel bei A oder bei B, so lässt sich nicht sagen, welche Fläche grösser ist. Es sind alle Fälle möglich:
$A_{ABC} > A_{ABD}$, $A_{ABC} = A_{ABD}$, $A_{ABC} < A_{ABD}$
Bei gleicher Fläche (Höhe) ist aber der Umfang des stumpfwinkligen Dreiecks immer grösser.



E154 **a** $A_{\square} = 9\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 45\,\text{cm}^2$

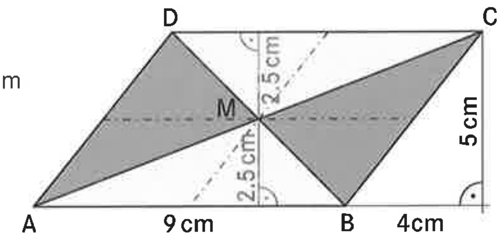
Gelbe Dreiecke: Seite = 9 cm, Höhe = 2.5 cm
$\mathbf{A_{gelb}} = 2 \cdot 9\,\text{cm} \cdot 2.5\,\text{cm} : 2$
$= 9\,\text{cm} \cdot 2.5\,\text{cm}$
$= \mathbf{22.5\,cm^2}$



Die gelben Dreiecke belegen zusammen die **halbe Rechtecksfläche**.
Dies erstaunt nicht. Zeichnet man nämlich die Symmetrieachsen ein, so ist dies sofort ersichtlich. Es braucht die Rechnung gar nicht.

b $A_{\text{▱}} = 9\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 45\,\text{cm}^2$

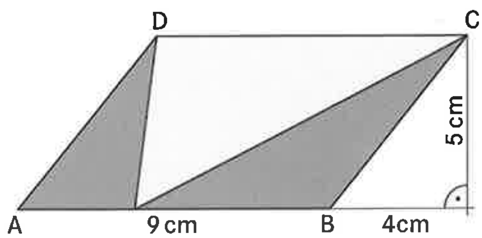
Gelbe Dreiecke: Seite = 9 cm, Höhe = 2.5 cm
$\mathbf{A_{gelb}} = 2 \cdot 9\,\text{cm} \cdot 2.5\,\text{cm} : 2$
$= 9\,\text{cm} \cdot 2.5\,\text{cm}$
$= \mathbf{22.5\,cm^2}$



Die gelben Dreiecke belegen zusammen die **halbe Rhomboidfläche.**
Auch dies erstaunt nicht. Zeichnet man die Mittelparallelen ein, so erhält man 4 kleine Rhomboide, die je zur Hälfte hell bzw. dunkel sind (punktsymmetrisch).
Es hätte die Rechnung also auch hier nicht gebraucht.

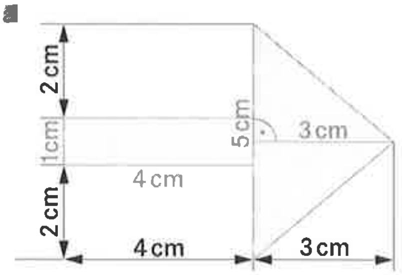
c $A_{\text{▱}} = 9\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 45\,\text{cm}^2$

Gelbes Dreieck: Seite = 9 cm, Höhe = 5 cm
$\mathbf{A_{gelb}} = 9\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} : 2$
$= \mathbf{22.5\,cm^2}$



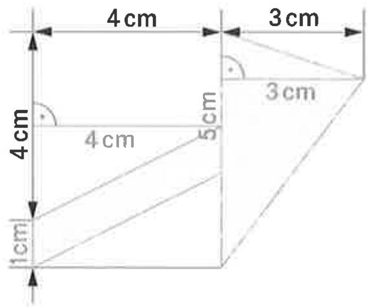
Das gelbe Dreiecke füllt auch hier die **Hälfte des Rhomboids.** Es hat ja mit diesem eine Seite und die Höhe gemeinsam. Auf die Rechnung hätte man auch in diesem Fall verzichten können.

E155 a



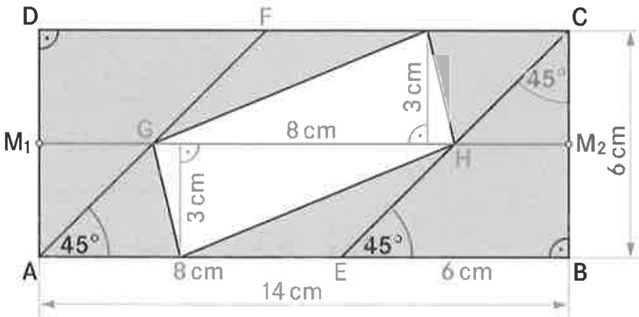
$$
\begin{aligned}
A_{\text{Pfeil}} &= A_{\square} &&+ A_{\triangle}\\
&= 4\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} &&+ 5\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} : 2\\
&= 4\,\text{cm}^2 &&+ 7.5\,\text{cm}^2\\
&= \mathbf{11.5\,cm^2}
\end{aligned}
$$

b



$$
\begin{aligned}
A_{\text{Pfeil}} &= A_{\text{Rhomboid}} &&+ A_{\triangle}\\
&= 4\,\text{cm} \cdot 1\,\text{cm} &&+ 5\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} : 2\\
&= 4\,\text{cm}^2 &&+ 7.5\,\text{cm}^2\\
&= \mathbf{11.5\,cm^2}
\end{aligned}
$$

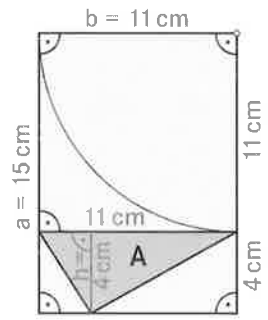
E156 AB = 14 cm
BC = 6 cm



Das Dreieck EBC ist rechtwinklig-gleichschenklig. Somit gilt:
EB = BC = 6 cm
AE = AB − EB
= 14 cm − 6 cm = 8 cm

Die gelbe (hier: weisse) Fläche besteht aus zwei Dreiecken mit der gemeinsamen Seite GH und je der halben Rechteckshöhe von 3 cm.
Also:
$A_{\text{gelb}} = 2 \cdot 8\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} : 2 = 8\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} = \mathbf{24\,cm^2}$

E157 a 1 Das gelbe Dreieck hat
eine Seite von 11 cm
und eine zugehörigen Höhe von 4 cm.

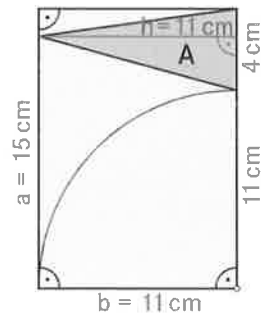


Fläche:
A = 11 cm · 4 cm : 2 = **22 cm²**

oder

$\mathbf{A} = \dfrac{11\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm}}{2} = \mathbf{22\,cm^2}$

a 2 Das gelbe Dreieck hat
eine Seite von 4 cm
und eine zugehörigen Höhe von 11 cm.



Fläche:
A = 4 cm · 11 cm : 2 = **22 cm²**

oder

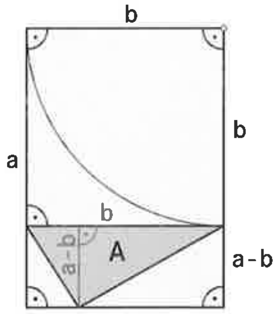
$\mathbf{A} = \dfrac{4\,\text{cm} \cdot 11\,\text{cm}}{2} = \mathbf{22\,cm^2}$

b **1** Seite des Dreiecks: b
zugehörige Höhe: a − b

Fläche:
A = b · (a − b) : 2 = **(ab − b²) : 2**

oder

$A = \frac{b \cdot (a-b)}{2} = \mathbf{\frac{ab-b^2}{2}}$

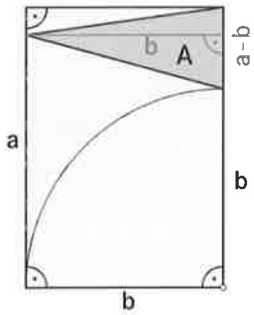


b **2** Seite des Dreiecks: a − b
zugehörige Höhe: b

Fläche:
A = (a − b) · b : 2 = **(ab − b²) : 2**

oder

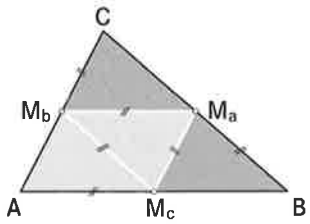
$A = \frac{(a-b) \cdot b}{2} = \mathbf{\frac{ab-b^2}{2}}$



E158 **a** Mögliche Begründungen:

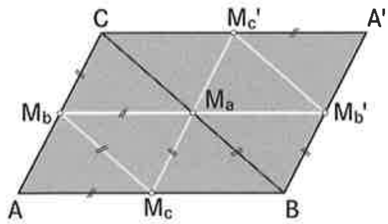
1. $AM_cM_aM_b$ ist ein Rhomboid.
Folglich gilt: $M_aM_b = AM_c = AB/2$.

Für die andern beiden Mittellinien lässt sich analog argumentieren.



2. Eine Punktspiegelung an M_a ergänzt das Dreieck ABC zum Rhomboid ABA'C. Jetzt ist sofort ersichtlich, dass
$M_bM_b' = 2 \cdot M_aM_b = AB$ und somit: $M_aM_b = AB/2$.

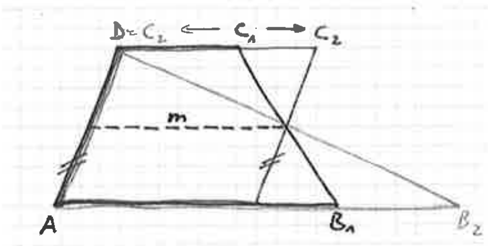
Für die andern beiden Mittellinien lässt sich auch hier analog argumentieren.



b AB = 12 cm, h_c = 7 cm

$A = M_aM_b \cdot \frac{h_c}{2} : 2 = \frac{AB}{2} \cdot \frac{h_c}{2} : 2 = 6\,\text{cm} \cdot 3.5\,\text{cm} : 2 = \mathbf{10.5\,cm^2}$

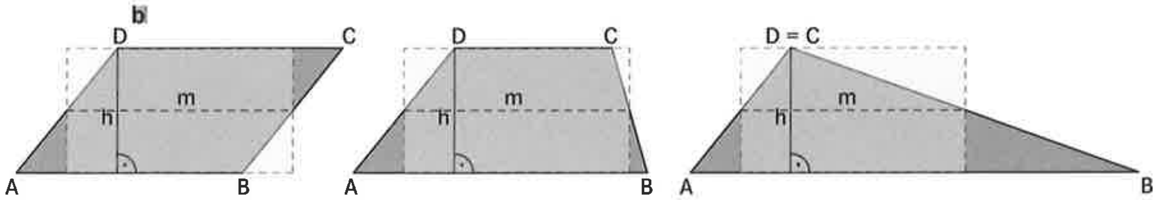
E159



Ein Rhomboid kann als Trapez betrachtet werden, dessen beide Parallelseiten AB und CD gleich lang und dessen Schenkel BC und AD gleich lang und parallel sind.

Ein Dreieck kann als Trapez betrachtet werden, dessen eine Parallelseite die Länge 0 hat. Zwei Ecken verschmelzen dabei zu einer einzigen.

b



→

→ Flächenformel für das Trapez: $A_{⏢} = m \cdot h$

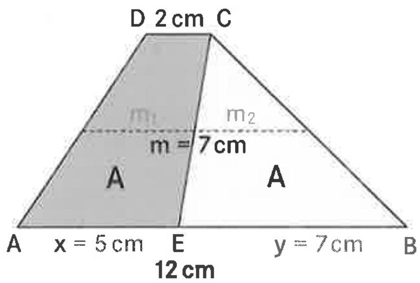
Flächenformel für das Rhomboid: $A_{▱} = AB \cdot h$
wegen AB = m gilt auch: $A_{▱} = m \cdot h$

Flächenformel für das Dreieck: $A_{\triangle} = AB \cdot h : 2 = AB : 2 \cdot h$ oder $A_{\triangle} = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{AB}{2} \cdot h$

wegen $m = {}^{AB}/_2$ gilt: $A_{\triangle} = m \cdot h$ $A_{\triangle} = m \cdot h$

Urs hat also Recht, die Trapezformel gilt auch für Dreiecke und Rhomboide.

E160 Weil die beiden gleich grossen Teilflächen ⏢AECD und △EBC die gleiche Höhe haben, müssen auch ihre beiden Mittellinien m_1 und m_2 gleich lang sein, je halb so lang wie die Mittellinie m des Trapezes ABCD.

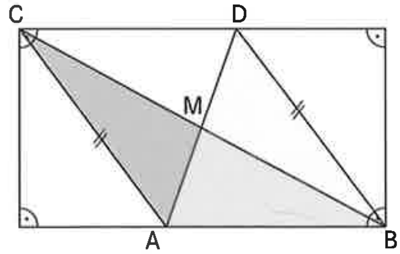


$m = (12\,cm + 2\,cm) : 2 = 7\,cm$
$m_1 = m_2 = {}^{m}/_2 = 3.5\,cm$

⏢AECD: $CD = 2\,cm$ $m_1 = 3.5\,cm$ ⇒ $\mathbf{x = 5\,cm}$
△EBC: $m_2 = 3.5\,cm$ $\mathbf{y} = 2 \cdot m_2 = \mathbf{7\,cm}$

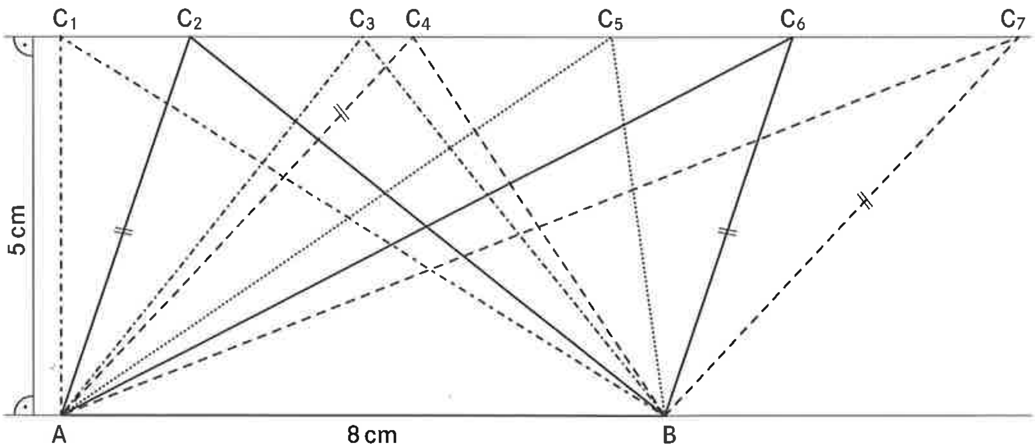
E161 Ja die Aussage stimmt. Es gibt verschiedene Wege, dies zu zeigen.
Beispielsweise:

- △ABM ist Teil von △ABC und auch von△ABD.
- △AMC ist kongruent zu △DMB.
  Mögliche Begründungen dafür:
  - Die beiden Dreiecke sind punktsymmetrisch zueinander.
  - Die beiden Dreiecke haben gleich lange Seiten und gleich grosse Winkel.



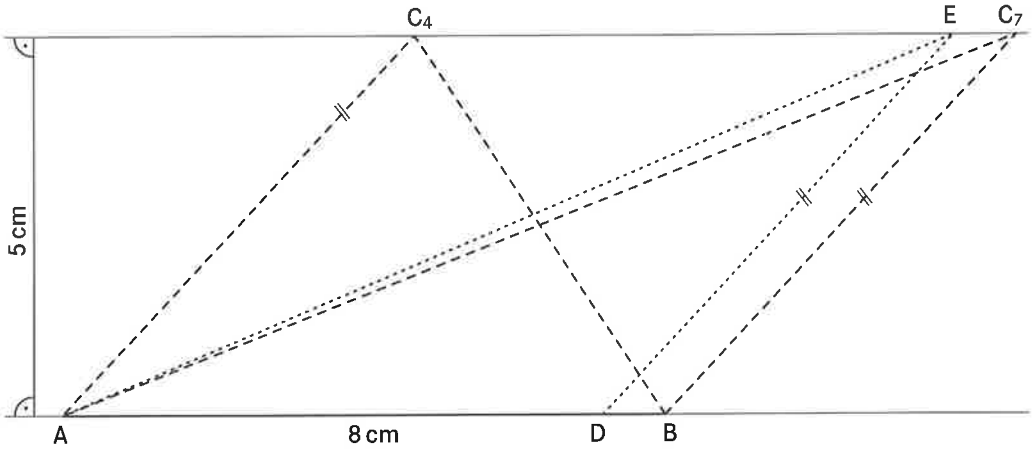
E162 Ein Dreieck mit einer Fläche von $20\,cm^2$ und einer Seite von 8 cm muss eine Höhe von 5 cm haben, denn $8\,cm \cdot 5\,cm : 2 = 20\,cm^2$.

Dafür gibt es unendlich viele Möglichkeiten: Die dritte Ecke C kann auf der Parallelen zu AB im Abstand 5 cm beliebig wandern.
Auch «überhängige» Dreiecke, wie $\triangle ABC_7$ oder $\triangle ABC_6$ sind möglich. Gemäss Aufgabe **E161** hat nämlich $\triangle ABC_7$ die gleich grosse Fläche wie $\triangle ABC_4$, und $\triangle ABC_6$ die gleich grosse Fläche wie $\triangle ABC_2$.



E163 Nein, diese Aussage stimmt nicht.
Das Dreieck ABC_7, hat beispielsweise den viel grösseren Umfang als das Dreieck ABC_4 ($AB = AB$, $AC_4 = BC_7$, $AC_7 > BC_4$) obwohl beide die gleich grosse Fläche haben.

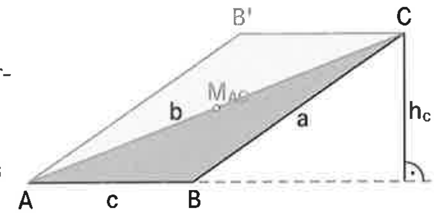
Es ist sogar möglich, dass ein Dreieck den grösseren Umfang hat als ein anderes aber die kleinere Fläche. Verschiebt man beispielsweise die Seite BC_7 leicht nach links, so entsteht das Dreieck ADE, dessen Umfang offensichtlich immer noch grösser ist als jener vom Dreieck ABC_4 (AE viel länger als BC_4). Die Fläche ist jetzt aber kleiner, da AD < AB ist.



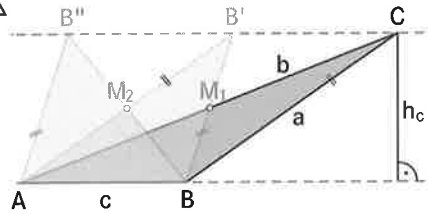
E164 Es gibt verschiedene Möglichkeiten zu zeigen, dass die Formel auch für ein «überhängendes» Dreieck gilt.

4 Beispiele:

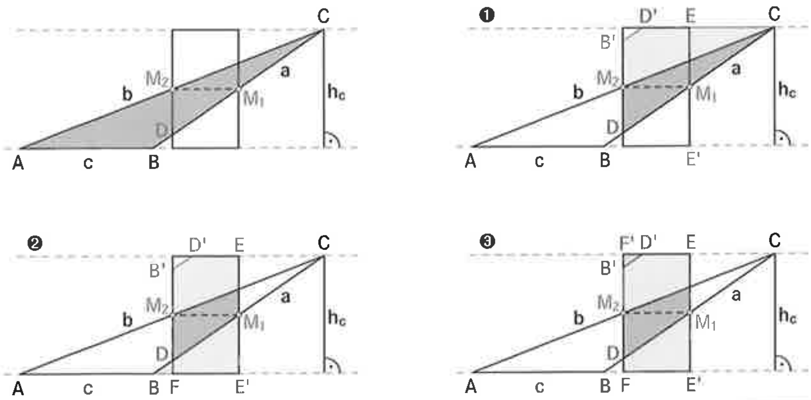
Verdoppelung zu einem Rhomboid
Spiegelt man das Dreieck an der Seitenmitte M_{AC} so erhält man das Rhomboid ABCB', das die **doppelt so grosse** Fläche hat. Seine Fläche lässt sich gemäss $A_{▱} = c \cdot h_c$ berechnen. Diese Berechnung gilt gemäss **E129** auch bei extrem schiefen Rhomboiden.



Schrittweises Zurückführen auf ein spitzwinkliges △
Das Dreieck ABB' mit AB' // BC hat die gleich grosse Fläche wie das Dreieck ABC, da die beiden Dreiecke BCM_1 und $B'AM_1$ kongruent sind (punktsymmetrisch zueinander bezüglich M_1 bzw. gleich lange Seiten und gleich grosse Winkel).
Analoges gilt für das Dreieck ABB' und ABB".



Schneiden und zu Rechteck über der Mittellinie zusammensetzen
❶ Viereck $ABDM_2$ abschneiden und an M_2 gespiegelt anfügen → $M_2CD'B'$.
❷ $\triangle M_1CE$ abschneiden und an M_1 gespiegelt anfügen → $\triangle BE'M_1$.
❸ $\triangle BFD$ abschneiden und an M_2 gespiegelt anfügen → $\triangle B'D'F'$.



→

→ **Als Differenz von zwei rechtwinkligen Dreiecken**

$A_{ABC} = A_{ADC} - A_{BDC}$

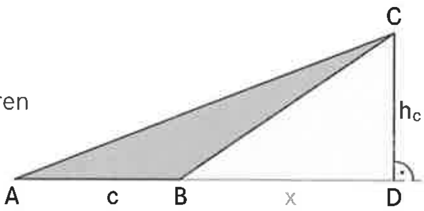
$A_{ABC} = (c+x) \cdot h_c : 2 - x \cdot h_c : 2$

$= [(c+x) \cdot h_c] : 2 - x \cdot h_c : 2$ | ausmultiplizieren

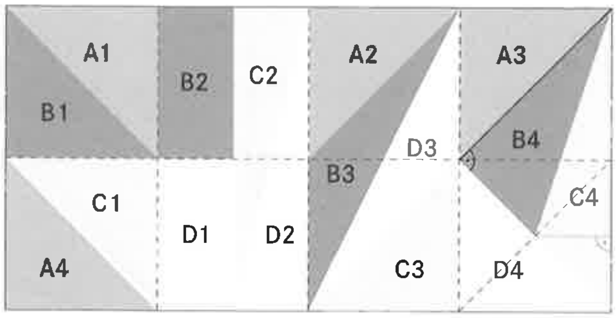
$= (c \cdot h_c + x \cdot h_c) : 2 - x \cdot h_c : 2$ | ausdividieren

$= c \cdot h_c : 2 + x \cdot h_c : 2 - x \cdot h_c : 2$ | vereinfachen

$= c \cdot h_c : 2$



E165 Das gesamte Rechteck lässt sich in 8 gleich grosse Quadrate einteilen.



Die **pinkfarbenen Dreiecke** A1 bis A4 beanspruchen je eine halbe Quadratfläche.

Grüne Flächen

B1 = halbes Quadrat

B2 = Rechteck = halbes Quadrat

B3 = Dreieck, Seite: Quadratseite (senkrecht), Höhe: Quadrathöhe (obere waagrechte Seite von A2) ⇒ halbes Quadrat

B4 = Dreieck, das zusammen mit C4 zwei halbe Quadratflächen beansprucht. B4 und C4 haben die halbe Quadratdiagonale als Seite und die gleiche zugehörige Höhe (eingezeichnet), sind also flächengleich. ⇒ Sie beanspruchen je ein halbes Quadrat.

Orange Flächen

C1 = C3 = halbes Quadrat

C2 = Dreieck, halbe Quadratbreite, doppelte Quadrathöhe ⇒ halbes Quadrat

C4 = siehe B4 ⇒ halbes Quadrat

oder: Dreieck der doppelten Breite (senkrecht) und der halben Höhe (waagrecht) eines Quadrates

oder: 2 gleichflächige Teildreiecke, die je einen Viertel der Quadratfläche ausmachen

Weisse Flächen

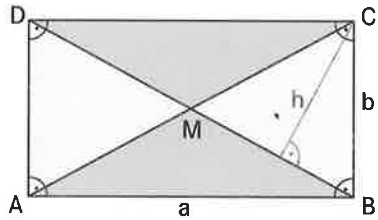
D1 = Rechteck = halbes Quadrat

D2 = C2 = Dreieck, halbe Quadratbreite, doppelte Quadrathöhe ⇒ halbes Quadrat

D3 = B3 = halbes Quadrat

D4 = halbes Quadrat

E166 Es gibt verschieden Wege dies zu zeigen. Beispielsweise:



Mit Hilfe der Punktsymmetrie

Die Dreiecke ABM und CDM sind punktsymmetrisch zueinander, also kongruent: $\triangle ABM \cong \triangle CDM$

Ebenso die Dreiecke AMD und CMB: $\triangle AMD \cong \triangle CMB$

Die beiden Dreiecke DMC und MBC haben die gleiche Höhe h über der Seite DM bzw. MB.
Zudem ist die Seite DM gleich lang wie die Seite MB: DM = MB
Die Fläche der beiden Dreiecke ist somit gleich gross: $DM \cdot h : 2 = MB \cdot h : 2$

Wegen der Punktsymmetrie haben auch die beiden andern Dreiecke die gleich grosse Fläche.

Algebraisch

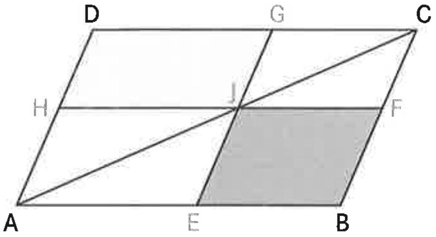
$A_{\square} = a \cdot b = \mathbf{ab}$

$A_{\text{dunkles}\triangle} = a \cdot \frac{b}{2} : 2 = a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{ab}{4}}$

$A_{\text{helles}\triangle} = b \cdot \frac{a}{2} : 2 = b \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{ab}{4}}$

E167 Es gibt verschiedene Wege, die Flächengleichheit zu zeigen. Am einfachsten ist es, **mit Hilfe der Kongruenz:**

Die Dreiecke ABC und ACD sind kongruent (SSS): $\triangle ABC \cong \triangle ACD$. Sie haben also die gleiche Fläche.



Ebenso die Dreiecke AEJ und AJH: $\triangle AEJ \cong \triangle AJH$, sowie die Dreiecke JFC und JCG: $\triangle JFC \cong \triangle JCG$.

Es gilt demnach:

$\mathbf{A_{EBFJ}} = A_{ABC} - A_{AEJ} - A_{JFC}$
$= A_{ACD} - A_{AJH} - A_{JCG} = \mathbf{A_{HJGD}}$

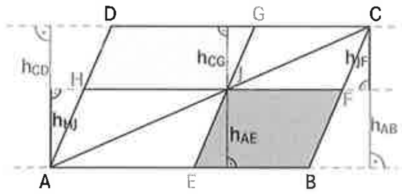
Die **Flächengleichheit der Dreiecke** ABC und ACD, AEJ und AJH sowie JFC und JCG lässt sich auch **ohne Kongruenz** zeigen. Beispielsweise:

$AB = CD,\ h_{AB} = h_{CD} \Rightarrow A_{ABC} = \frac{AB \cdot h_{AB}}{2} = \frac{CD \cdot h_{CD}}{2} = A_{ACD}$

ebenso:

$AE = JH,\ h_{AE} = h_{JH} \Rightarrow A_{AEJ} = \frac{AE \cdot h_{AE}}{2} = \frac{JH \cdot h_{JH}}{2} = A_{AJH}$

$JF = CG,\ h_{JF} = h_{CG} \Rightarrow A_{JFC} = \frac{JF \cdot h_{JF}}{2} = \frac{CG \cdot h_{CG}}{2} = A_{JCG}$

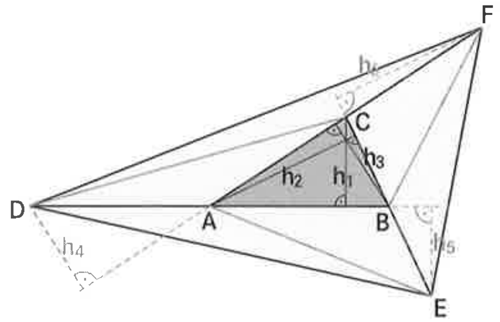


E168 Mögliche Begründung:

$A_{ABC} = A_{DAC}$ AB = DA, gemeinsame Höhe h_1
$A_{DAC} = A_{DCF}$ AC = CF, gemeinsame Höhe h_4

$A_{ABC} = A_{AEB}$ CB = BE, gemeinsame Höhe h_2
$A_{AEB} = A_{DAE}$ DA = AB, gemeinsame Höhe h_5

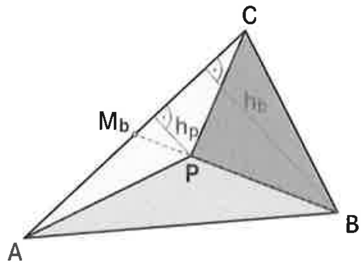
$A_{ABC} = A_{CBF}$ AC = CF, gemeinsame Höhe h_3
$A_{CBF} = A_{BEF}$ CB = BE, gemeinsame Höhe h_6



Die 7 oben genannten Teildreiecke sind demnach alle gleich gross und das Dreieck DEF ist 7-mal so gross wie das Teildreieck ABC.

E169 Die Schwerlinie BM_b teilt das Dreieck ABC in zwei flächengleiche Hälften $\triangle ABM_b$ und $\triangle M_bBC$. Beide Dreiecke haben nämlich eine gleich lange Seite $AM_b = M_bC$ und die gleiche Höhe h_b.

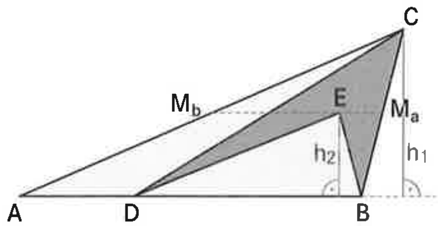
Das Dreieck APC wird durch die Schwerlinie ebenfalls in zwei flächengleiche Hälften $\triangle APM_b$ und $\triangle M_bPC$ zerlegt.



Nun gilt: $A_{\triangle ABP} = A_{\triangle ABM_b} - A_{\triangle APM_b} = A_{\triangle M_bBC} - A_{\triangle M_bPC} = A_{\triangle BCP}$

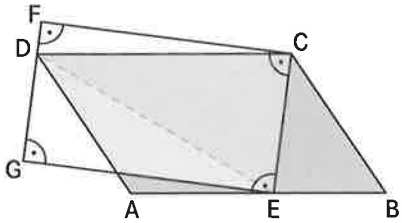
E170 Die Höhe h_2 des niedrigen Dreiecks DBE ist halb so hoch wie die Höhe h_1 des hohen Dreiecks ADC. Weil die beiden Flächen gleich gross sind, muss DB demnach doppelt so gross sein wie AD.

$h_2 = {}^{h_1}/_2 \quad \Rightarrow \quad DB = 2 \cdot AD$



Die Fläche des Dreiecks DBC ist doppelt so gross wie die Fläche des Dreiecks DBE (doppelte Höhe). Der grüne Teil muss demnach gleichflächig sein wie das Dreieck DBE.

E171 Das Dreieck CDE ist sowohl Teil des Rhomboids ABCD wie auch des Rechtecks GECF.

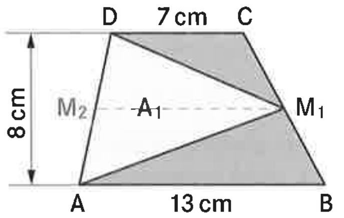


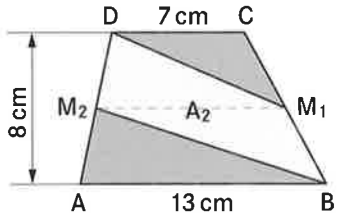
Zudem gilt:
$A_{CDE} = A_{ABCD} : 2$ (gemeinsame Seite CD, gleiche Höhe)
wie auch
$A_{CDE} = A_{GECF} : 2$ (gemeinsame Seite EC, gleiche Höhe)

Folglich muss auch gelten: $A_{ABCD} = A_{GECF}$

E172 a Die beiden Flächen A_1 und A_2 sind gleich gross: $A_1 = A_2$
Denn:

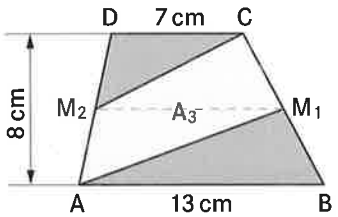
- Das Dreieck AM_1D lässt sich unterteilen in $\triangle M_2M_1D$ und $\triangle M_2M_1A$.

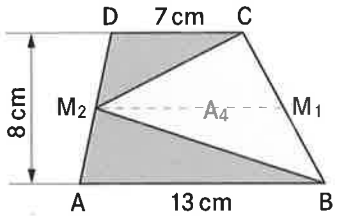




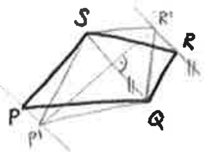
- Das Viereck BM_1DM_2 lässt sich unterteilen in $\triangle M_2M_1D$ und $\triangle M_2M_1B$.
- $\triangle M_2M_1A$ und $\triangle M_2M_1B$ haben aber die gleich grosse Fläche, da beide die gemeinsame Seite M_2M_1 und die gleiche Höhe von 4 cm haben.

b

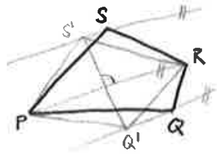




E173 a

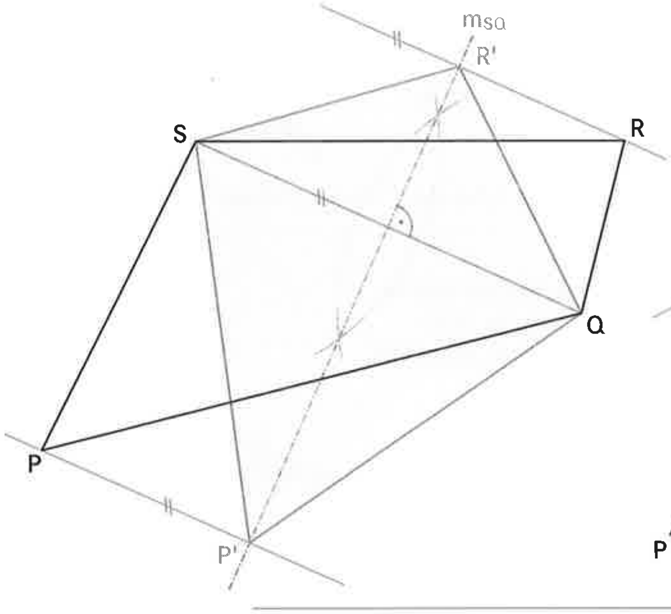


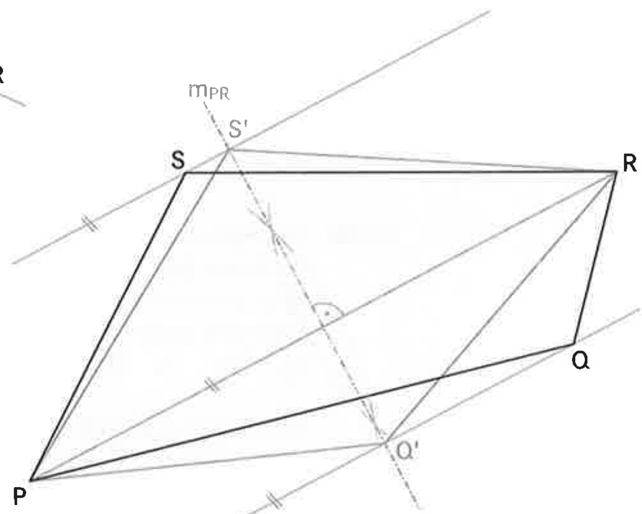
Die Diagonalen eines Drachenvierecks stehen senkrecht aufeinander.
Die Fläche eines Dreiecks bleibt gleich, wenn eine Ecke parallel zur gegenüberliegenden Seite verschoben wird. Teilt man das Viereck in zwei Dreiecke, so lassen sich zwei Ecken verschieben, ohne dass die Grösse der Fläche ändert.

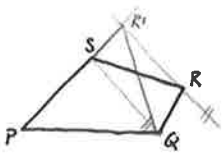


Es gibt zwei mögliche Lösungen:

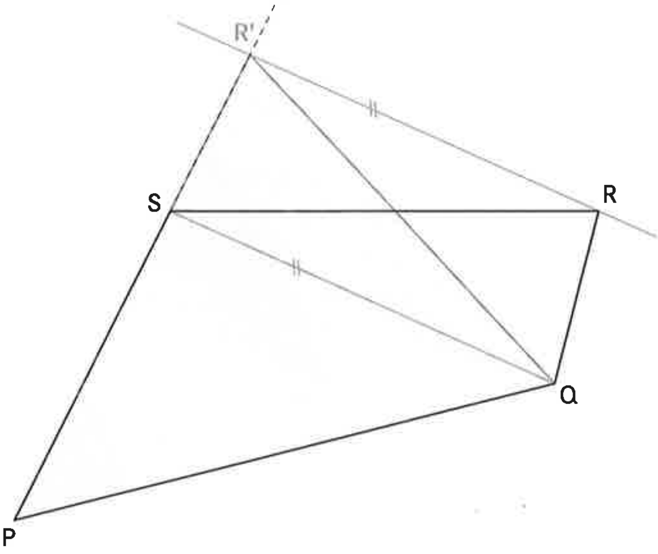
1. R und P parallel zu SQ verschieben, bis sie auf die Mittelsenkrechte m_{SQ} zu liegen kommen → <>P'QR'S.
2. S und Q parallel zu PR verschieben, bis sie auf die Mittelsenkrechte m_{PR} zu liegen kommen → <>PQ'RS'.

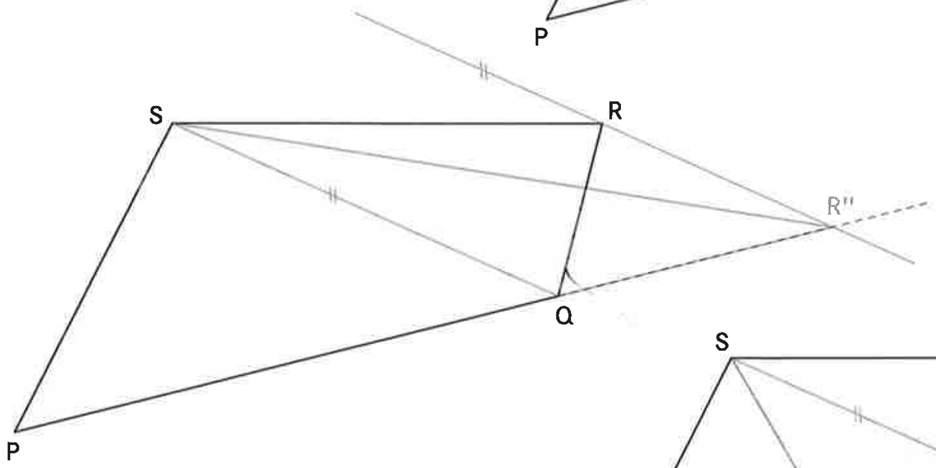


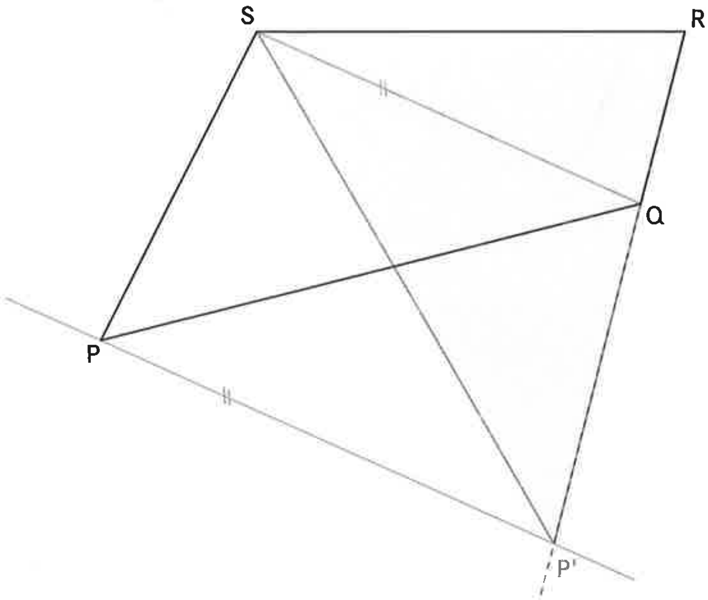


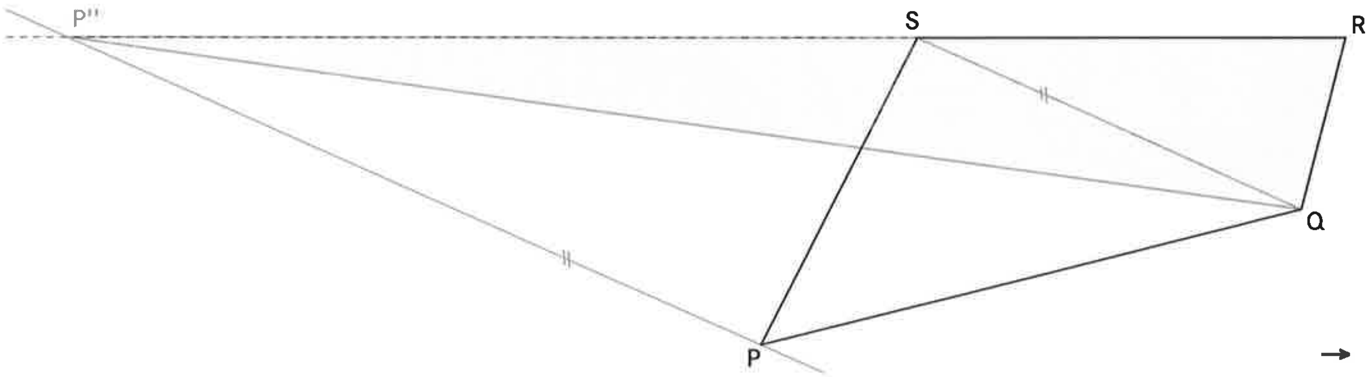


Um aus dem Viereck ein Dreieck zu erhalten, muss diesmal eine Ecke parallel zu einer Diagonale verschoben werden, bis sie auf die Verlängerung einer Vierecksseite zu liegen kommt.
Es gibt für jede Ecke zwei mögliche Verschieberichtungen, insgesamt also 8 verschiedene Lösungen.

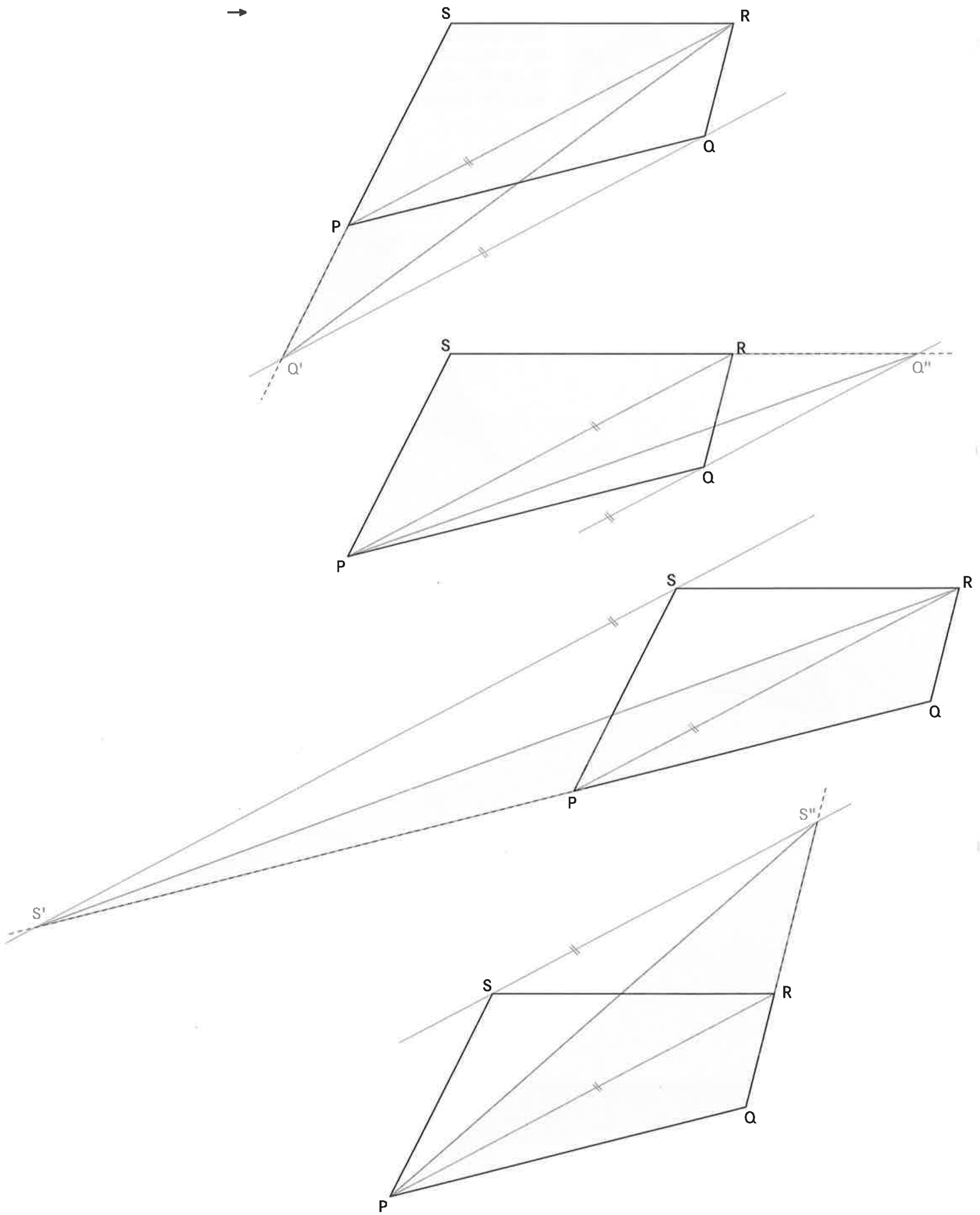






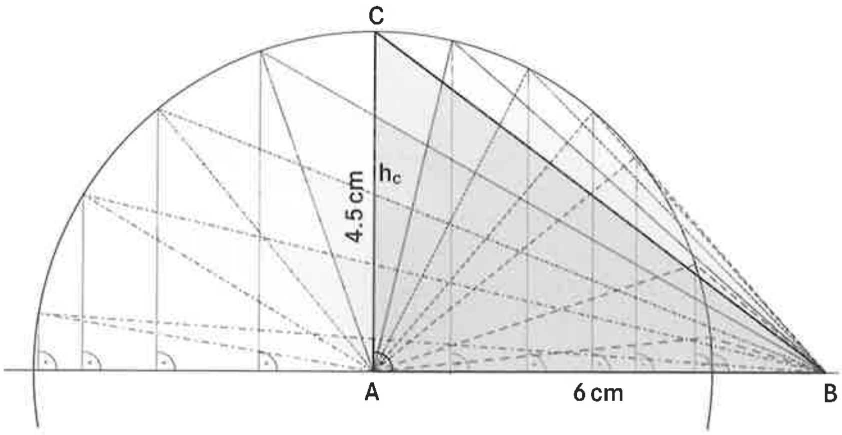


→

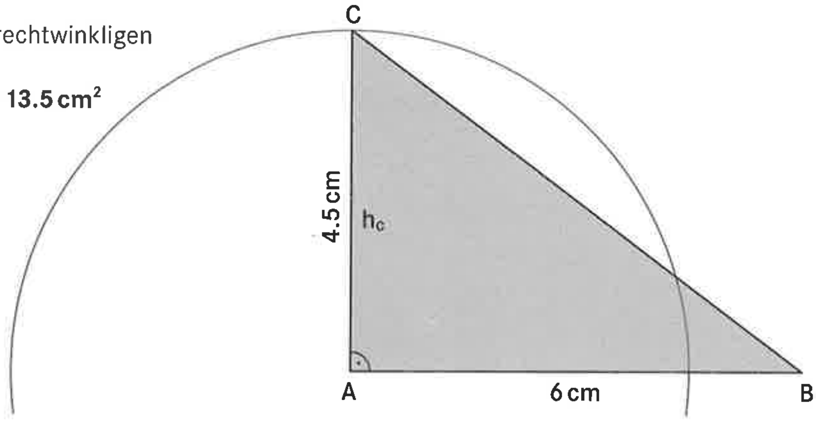


E174 Arbeitsblatt

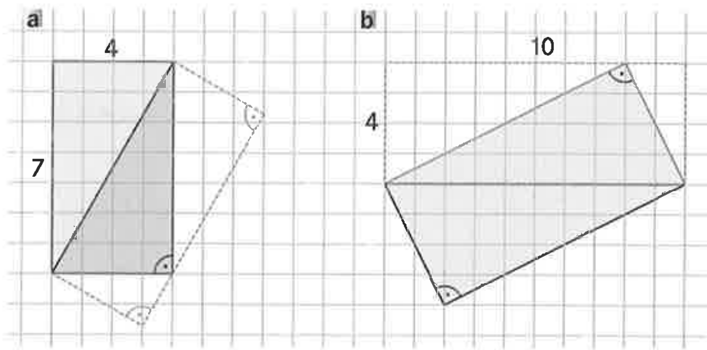
E175 Die Fläche ist dann am grössten, wenn die Höhe am grössten ist. Und dies ist dann der Fall, wenn die Seite AC rechtwinklig auf der Seite AB steht.



Die Fläche dieses rechtwinkligen Dreiecks beträgt
6 cm · 4.5 cm : 2 = **13.5 cm²**



E176 Ein rechtwinkliges Dreieck lässt sich
- durch Punktspiegelung an der längsten Seite zu einem Rechteck verdoppeln.
- durch Errichten eines Rechtecks über der längsten Seite zu einem doppelt so grossen Rechteck ergänzen.

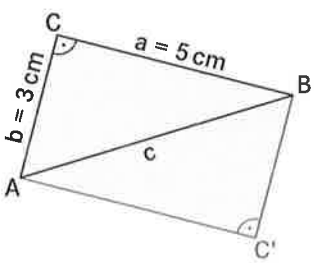


In den beiden Beispielen lässt sich jeweils an einem der beiden Rechtecke die Grösse der Fläche sofort ablesen:

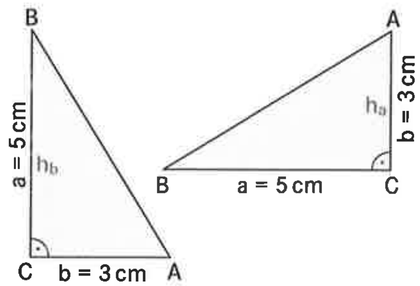
a Fläche Rechteck = 7 · 4 Karofelder = 28 Karofelder
Fläche Dreieck = 28 Karofelder : 2 = 14 Karofelder

b Fläche Rechteck = 10 · 4 Karofelder = 40 Karofelder
Fläche Dreieck = 40 Karofelder : 2 = 20 Karofelder

E177

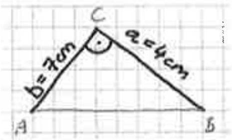


Jedes rechtwinklige Dreieck ist ein halbes Rechteck.
Es gilt somit:
A = 5 cm · 3 cm : 2
= 7.5 cm²



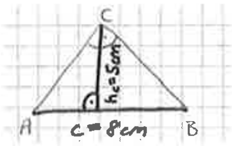
Dies entspricht im Übrigen der Flächenformel des Dreiecks, für h_b = a und h_a = b.

E178 **a** Um die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen sind nötig:



Die beiden rechtwinklig zueinander stehenden Seiten.

Beispiel: $a = 4\,\text{cm}$ und $b = 7\,\text{cm}$.
$A = 4\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} : 2 = 14\,\text{cm}^2$



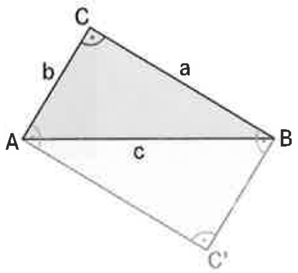
Die längste Seite (dem rechten Winkel gegenüberliegend) und die zugehörige Höhe.
Beispiel: $c = 8\,\text{cm}$ und $h_c = 5\,\text{cm}$.
$A = 8\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} : 2 = 20\,\text{cm}^2$

b **Flächenberechnung bei rechtwinkligen Dreiecken**

Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks lässt sich auf 2 verschiedene Arten berechnen:

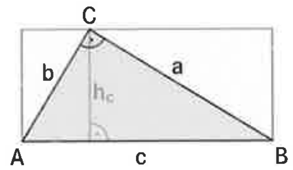
Mit Hilfe der beiden senkrecht zueinander stehenden Seiten.

$$\mathbf{A_{\triangle} = a \cdot b : 2 = \frac{a \cdot b}{2}}$$



Mit Hilfe der längsten Seite und der zugehörigen Höhe.

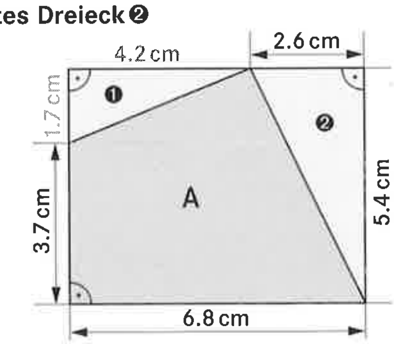
$$\mathbf{A_{\triangle} = c \cdot h_c : 2 = \frac{c \cdot h_c}{2}}$$



E179 **a** **Gelbe Fläche = Rechteck – linkes Dreieck ❶ – rechtes Dreieck ❷**

$A_{\square\,\text{ganz}} = 6.8\,\text{cm} \cdot 5.4\,\text{cm} = 36.72\,\text{cm}^2$
$A_{\triangle ❶} = 1.7\,\text{cm} \cdot 4.2\,\text{cm} : 2 = 3.57\,\text{cm}^2$
$A_{\triangle ❷} = 2.6\,\text{cm} \cdot 5.4\,\text{cm} : 2 = 7.02\,\text{cm}^2$

$\mathbf{A_{gelb}} = A_{\square\,\text{ganz}} - A_{\triangle ❶} - A_{\triangle ❷} = \mathbf{26.13\,cm^2}$



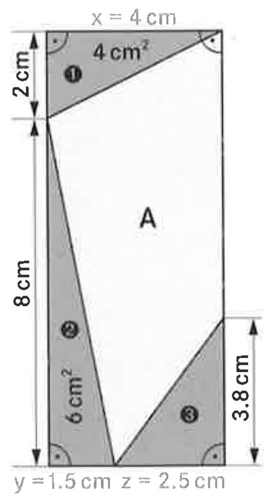
b **Gelbe Fläche = Rechteck – Dreieck ❶ – Dreieck ❷ – Dreieck ❸**
Zuerst müssen die Strecken x, y und z bestimmt werden:

x, △❶
$4\,\text{cm}^2 = x \cdot 2\,\text{cm} : 2 \quad |\cdot 2$
$8\,\text{cm}^2 = x \cdot 2\,\text{cm} \quad |: 2\,\text{cm}$
$\mathbf{x = 4\,cm}$

y, △❷
$6\,\text{cm}^2 = y \cdot 8\,\text{cm} : 2 \quad |\cdot 2$
$12\,\text{cm}^2 = y \cdot 8\,\text{cm} \quad |: 8\,\text{cm}$
$\mathbf{y = 1.5\,cm}$

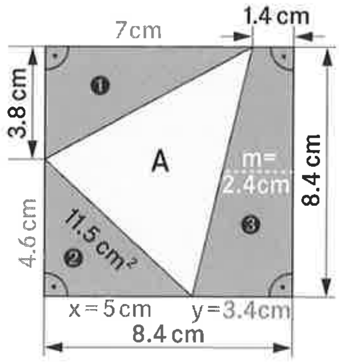
z
$\mathbf{z} = x - y = 4\,\text{cm} - 1.5\,\text{cm} = \mathbf{2.5\,cm}$

$A_{\square\,\text{ganz}} = 10\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 40\,\text{cm}^2$
$A_{\triangle ❶} = 4\,\text{cm}^2$
$A_{\triangle ❷} = 6\,\text{cm}^2$
$A_{\triangle ❸} = 2.5\,\text{cm} \cdot 3.8\,\text{cm} : 2 = 4.75\,\text{cm}^2$
$\mathbf{A_{gelb}} = A_{\square\,\text{ganz}} - A_{\triangle ❶} - A_{\triangle ❷} - A_{\triangle ❸} = \mathbf{25.25\,cm^2}$



d Gelbe Fläche = Quadrat – Dreieck ❶ – Dreieck ❷ – Trapez ❸

Zwei fehlende Strecken lassen sich «ablesen», x und y müssen berechnet werden:



x, △❷ $\quad 11.5\,cm^2 = x \cdot 4.6\,cm : 2$

$23\,cm^2 = x \cdot 4.6\,cm$

$\mathbf{x = 5\,cm}$

y $\quad \mathbf{y} = 8.4\,cm - 5\,cm = \mathbf{3.4\,cm}$

m, △❷ $\quad \mathbf{m} = (3.4\,cm + 1.4\,cm) : 2 = \mathbf{2.4\,cm}$

$A_{\square ganz} = 8.4\,cm \cdot 8.4\,cm = 70.56\,cm^2$

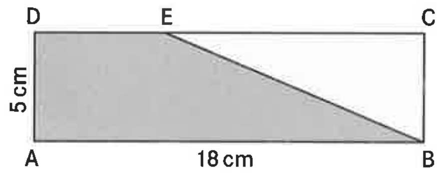
$A_{\triangle ❶} = 3.8\,cm \cdot 7\,cm : 2 = 13.30\,cm^2$

$A_{\triangle ❷} = 11.50\,cm^2$

$A_{⏢ ❸} = 2.4\,cm \cdot 8.4\,cm = 20.16\,cm^2$

$\mathbf{A_{gelb}} = A_{\square ganz} - A_{\triangle ❶} - A_{\triangle ❷} - A_{⏢ ❸} = \mathbf{25.60\,cm^2}$

E180 $A_{\square} = 18\,cm \cdot 5\,cm = 90\,cm^2$



Das Trapez ist doppelt so gross wie das Dreieck:

$A_{⏢} = 60\,cm^2 \qquad A_{\triangle} = 30\,cm^2$

DE mit Hilfe des Trapezes:

$A_{⏢} = m \cdot h$

$60\,cm^2 = m \cdot 5\,cm$

$m = 60\,cm^2 : 5\,cm = 12\,cm$

AB = 18 cm $\quad$ m = 12 cm $\quad$ **DE = 6 cm**

DE mit Hilfe des Dreiecks:

$A_{\triangle} = EC \cdot BC : 2$

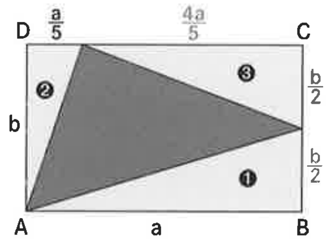
$30\,cm^2 = EC \cdot 5\,cm : 2$

$60\,cm^2 = EC \cdot 5\,cm$

$EC = 60\,cm^2 : 5\,cm = 12\,cm$

DE = 18 cm – 12 cm = **6 cm**

E181 Dunkles Dreieck = Rechteck – Dreieck ❶ – Dreieck ❷ – Dreieck ❸



$A_{\square ganz} = a \cdot b = ab$

$A_{\triangle ❶} = a \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{ab}{4}$

$A_{\triangle ❷} = b \cdot \frac{a}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{ab}{10}$

$A_{\triangle ❸} = \frac{4a}{5} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4ab}{20} = \frac{ab}{5}$

$\mathbf{A_{dunkel}} = A_{\square ganz} - A_{\triangle ❶} - A_{\triangle ❷} - A_{\triangle ❸}$

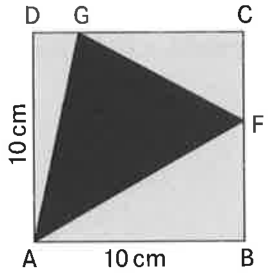
$= ab - \frac{ab}{4} - \frac{ab}{10} - \frac{ab}{5}$

$= \frac{20ab - 5ab - 2ab - 4ab}{20}$

$= \mathbf{\frac{9ab}{20}}$

Diese Aufgabe ist gut geeignet für den Computereinsatz.

E182



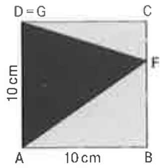
Die Fläche des Dreiecks AFG kann höchstens halb so gross werden wie das Quadrat (Begründung unten).

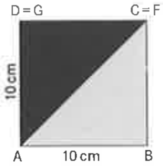
Halb so gross ist sie dann, wenn

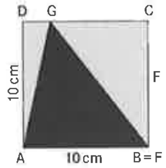
- G in der Ecke D und F irgendwo auf der Strecke BC liegt,

oder

- F in der Ecke B und G irgendwo auf der Strecke CD liegt.

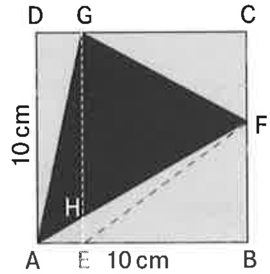






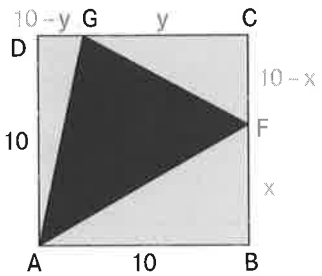
In allen andern Fällen beanspruchen die drei grauen Dreiecke mehr als die Hälfte der Gesamtfläche.

Eine mögliche anschauliche Begründung:



Im Rechteck AEGD nimmt das Dreieck AGD die Hälfte ein. Das Dreieck AEH unten ist überdies auch grau.
Im Rechtck EBCG beanspruchen die beiden Dreieck EBF und FCG zusammen die Hälfte. Überdies ist das Dreieck EFH grau.
Die graue Gesamtfläche ist somit immer um die beiden Dreiecke AEH und EFH grösser als die halbe Quadratfläche – egal wo G und F liegen.
Analog lässt sich mit einer Rechtecksunterteilung durch F argumentieren.

Eine algebraische Begründung: Alle Grössen in cm



$$A_{ABF} = \frac{10 \cdot x}{2} = \frac{10x}{2}$$

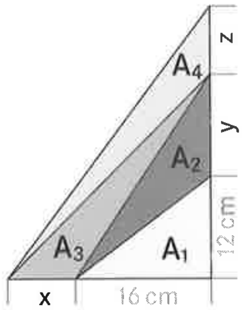
$$A_{FCG} = \frac{y \cdot (10 - x)}{2} = \frac{10y - xy}{2}$$

$$A_{GDA} = \frac{10 \cdot (10 - y)}{2} = \frac{100 - 10y}{2}$$

$$A_{\text{grau total}} = \frac{10x + 10y - xy + 100 - 10y}{2} = \frac{10x - xy + 100}{2}$$

Für $y = 0$, für $y = 10$ und für $x = 0$ ist im Zähler der Term $10x - xy = 0$ und die graue Gesamt fläche damit gleich $50\,cm^2$.
Für alle andern Grössen für y und x ist der Term $10x - xy = x(10 - y)$ grösser als Null und die graue Gesamtfläche damit grösser als $50\,cm^2$.

E183 A_1: $A_1 = 16\,cm \cdot 12\,cm : 2 = 96\,cm^2$



A_2: Seite = y Höhe = 16 cm

$$\begin{aligned} A_2 &= \text{Seite} \cdot \text{Höhe} : 2 & \\ 96\,cm^2 &= y \cdot 16\,cm : 2 & |\cdot 2 \\ 192\,cm^2 &= y \cdot 16\,cm & |: 16\,cm \\ \mathbf{y} &= \mathbf{12\,cm} & \end{aligned}$$

A_3: Seite = x Höhe = 12 cm + y = 24 cm

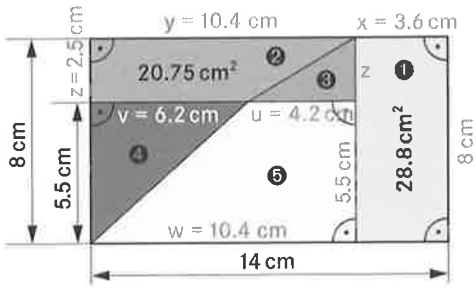
$$\begin{aligned} A_3 &= \text{Seite} \cdot \text{Höhe} : 2 & \\ 96\,cm^2 &= x \cdot 24\,cm : 2 & |\cdot 2 \\ 192\,cm^2 &= x \cdot 24\,cm & |: 24\,cm \\ \mathbf{x} &= \mathbf{8\,cm} & \end{aligned}$$

Andere Überlegung für A_3:
A_3 ist doppelt so hoch wie A_1, muss also halb so breit sein:
x = 16 cm : 2 = **8 cm**

A_4: Seite = z Höhe = 16 cm + x = 24 cm

gleiche Höhe wie A_3, also muss z = x sein: **z = 8 cm**

E184 **1. möglicher Lösungsweg: Mit Trapezberechnung**



Rechteck ❶ $8\,\text{cm} \cdot x = 28.8\,\text{cm}^2 \quad |: 8\,\text{cm}$
$\mathbf{x = 3.6\,cm}$

Trapez ❷ $\mathbf{y} = 14\,\text{cm} - x = \mathbf{10.4\,cm}$
Höhe: $\mathbf{z} = 8\,\text{cm} - 5.5\,\text{cm} = \mathbf{2.5\,cm}$

Mittellinie: A = Mittellinie · Höhe
m❷ = A : Höhe
$= 20.75\,\text{cm}^2 : 2.5\,\text{cm}$
$= 8.3\,\text{cm}$

v: $y = 10.4\,\text{cm}$, Mittellinie $= 8.3\,\text{cm}$, $\mathbf{v = 6.2\,cm}$

Dreieck ❸ $\mathbf{u} = y - v = 10.4\,\text{cm} - 6.2\,\text{cm} = \mathbf{4.2\,cm}$
A△❸ $= u \cdot z : 2 = 4.2\,\text{cm} \cdot 2.5\,\text{cm} : 2 = \mathbf{5.25\,cm^2}$

Kontrolle A□❷❸ $= 10.4\,\text{cm} \cdot 2.5\,\text{cm} = 26\,\text{cm}^2$
A⏢❷ + A△❸ $= 20.75\,\text{cm}^2 + 5.25\,\text{cm}^2 = 26\,\text{cm}^2$ ✓

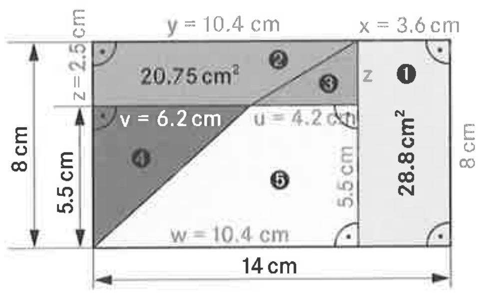
Dreieck ❹ **A△❹** $= 5.5\,\text{cm} \cdot v : 2 = 5.5\,\text{cm} \cdot 6.2\,\text{cm} : 2 = \mathbf{17.05\,cm^2}$

Trapez ❺ $\mathbf{w} = y = \mathbf{10.4\,cm}$
$u = 4.2\,\text{cm}$
Mittellinie: m❺ $= (w + u) : 2 = (10.4\,\text{cm} + 4.2\,\text{cm}) : 2 = 7.3\,\text{cm}$

A⏢❺ = Mittellinie · Höhe
$= 7.3\,\text{cm} \cdot 5.5\,\text{cm} = \mathbf{40.15\,cm^2}$

Kontrolle A□❹❺ $= 10.4\,\text{cm} \cdot 5.5\,\text{cm} = 57.2\,\text{cm}^2$
A⏢❺ + A△❹ $= 40.15\,\text{cm}^2 + 17.05\,\text{cm}^2 = 57.2\,\text{cm}^2$ ✓

2. möglicher Lösungsweg: ohne Trapezberechnung



Rechteck ❶ $8\,\text{cm} \cdot x = 28.8\,\text{cm}^2 \quad |: 8\,\text{cm}$
$\mathbf{x = 3.6\,cm}$

Rechteck ❷❸ $\mathbf{y} = 14\,\text{cm} - x = \mathbf{10.4\,cm}$
$\mathbf{z} = 8\,\text{cm} - 5.5\,\text{cm} = \mathbf{2.5\,cm}$

A□❷❸ $= y \cdot z$
$= 10.4\,\text{cm} \cdot 2.5\,\text{cm}$
$= 26\,\text{cm}^2$

Dreieck ❸ **A△❸** = A□❷❸ − A⏢❷
$= 26\,\text{cm}^2 - 20.75\,\text{cm}^2 = \mathbf{5.25\,cm^2}$

u: $u \cdot z : 2 = A$
$\mathbf{u} = 2 \cdot A : z$
$= 10.5\,\text{cm}^2 : 2.5\,\text{cm}$
$= \mathbf{4.2\,cm}$

v: $\mathbf{v} = y - u = 10.4\,\text{cm} - 4.2\,\text{cm} = \mathbf{6.2\,cm}$

Dreieck ❹ **A△❹** $= 5.5\,\text{cm} \cdot v : 2 = 5.5\,\text{cm} \cdot 6.2\,\text{cm} : 2 = \mathbf{17.05\,cm^2}$

Rechteck ❹❺ A□❹❺ $= 10.4\,\text{cm} \cdot 5.5\,\text{cm} = 57.2\,\text{cm}^2$

Trapez ❺ **A⏢❺ = A□❹❺ − A△❹**
$= 57.2\,\text{cm}^2 - 17.05\,\text{cm}^2 = \mathbf{40.15\,cm^2}$

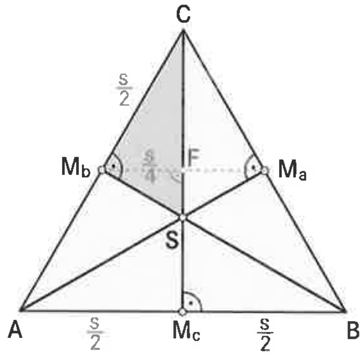
E185 Wir setzen s für die Seitenlänge des Dreiecks ABC und h für seine Höhe:

$AB = BC = AC = s \qquad M_cC = h$

Es ist dann: $A_{ABC} = s \cdot h : 2$

M_bM_a ist Mittellinie: $M_bM_a = \frac{s}{2}$ und somit $M_bF = \frac{s}{4}$

Die Fläche des Dreiecks SCM_b lässt sich deshalb darstellen als: $A_{SCM_b} = SC \cdot \frac{s}{4} : 2$



Die sechs kleinen Dreiecke sind kongruent.

Deshalb gilt: $A_{SCM_b} = \frac{1}{6} \cdot A_{ABC}$

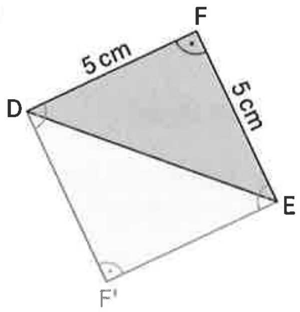
und somit: $SC \cdot \frac{s}{4} : 2 = \frac{1}{6} \cdot s \cdot h : 2 \qquad | \cdot 2$

$$\frac{SC \cdot s}{4} = \frac{s \cdot h}{6} \qquad | : s \cdot 4$$

$$SC = \frac{4}{6} \cdot h = \frac{2}{3} h$$

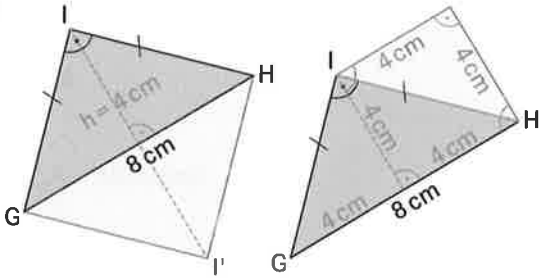
SC besteht demnach aus 2 Teilen von h, M_cS aus 1 Teil.

E186 **a**



Ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ist ein halbes Quadrat.
A_{DFE} = 5 cm · 5 cm : 2 = **12.5 cm²**

b



Es gibt 2 Wege:

1. Das Dreieck ist ein halbes Quadrat.
   Die Höhe des Dreiecks ist die halbe Quadratdiagonale: h = 4 cm
   A_{GHI} = GH · h : 2
   = 8 cm · 4 cm : 2 = **16 cm²**
2. Das Dreieck hat die Fläche eines kleinen Quadrates mit der Seitenlänge 4 cm
   A_{GHI} = 4 cm · 4 cm = **16 cm²**

E187 **a** a = 10 cm A = ?

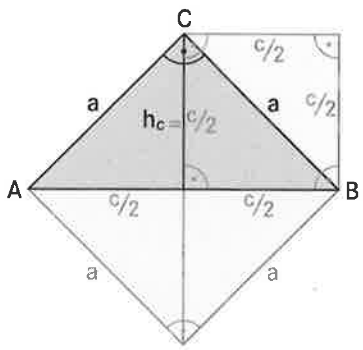
A = a · a : 2 = 10 cm · 10 cm : 2 = **50 cm²**

b c = 10 cm A = ?

h_c = 5 cm
A = c · h_c : 2 = 10 cm · 5 cm : 2 = **25 cm²**

c h_c = 10 cm A = ?

c = 20 cm
A = c · h_c : 2 = 20 cm · 10 cm : 2 = **100 cm²**



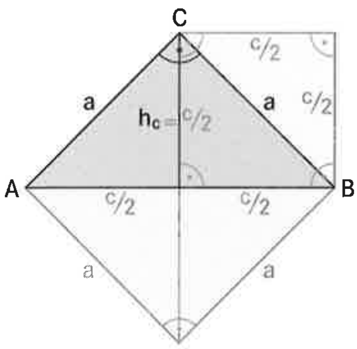
d) $A = 32\,cm^2$ $\quad a = ?$

$A = a \cdot a : 2 \quad |\cdot 2$

$2A = a \cdot a$

$64\,cm^2 = a \cdot a$

$\mathbf{a = 8\,cm}$



e) $A = 36\,cm^2$ $\quad c = ? \quad h_c = ?$

$A = c \cdot \frac{c}{2} : 2 \quad |\cdot 2$ $\qquad$ **oder** $\quad A = \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2}$

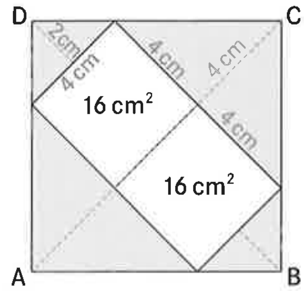
$2A = c \cdot \frac{c}{2} \quad |\cdot 2$ $\qquad 36\,cm^2 = \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2}$

$4A = c \cdot c$ $\qquad \frac{c}{2} = 6\,cm$

$144\,cm^2 = c \cdot c$

$\mathbf{c = 12\,cm} \quad \mathbf{h_c = 6\,cm}$ $\qquad \mathbf{c = 12\,cm} \quad \mathbf{h_c = 6\,cm}$

E188 **Lösungsweg 1:**



Seite eines kleinen Quadrates = 4 cm

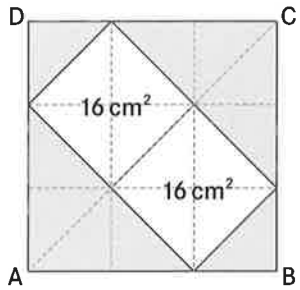
$\mathbf{A_{ABCD}} = 2 \cdot A_{grosses\triangle} + 2 \cdot A_{kleines\triangle} + 2 \cdot A_{kleines\square}$

$= 2 \cdot 8\,cm \cdot 4\,cm : 2 + 2 \cdot 4\,cm \cdot 2\,cm : 2 + 2 \cdot 16\,cm^2$

$= 32\,cm^2 + 8\,cm^2 + 32\,cm^2$

$= \mathbf{72\,cm^2}$

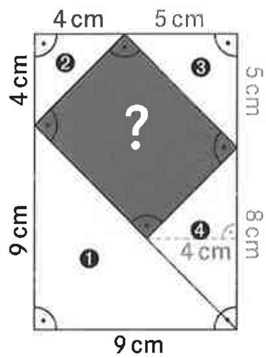
Lösungsweg 2:



Wir unterteilen ABCD in kleine Quadrate und Dreiecke. Ein Dreieck entspricht einem Viertel eines gegebenen Quadrates, hat also eine Fläche von $16\,cm^2 : 4 = 4\,cm^2$. Ein kleines Quadrat ist doppelt so gross $= 8\,cm^2$

Das Quadrat ABCD besteht aus 9 kleinen Quadraten:
$\mathbf{A_{ABCD}} = 9 \cdot 8\,cm^2 = \mathbf{72\,cm^2}$

E189 **?-Fläche = Rechteck – △❶ – △❷ – △❸ – △❹**

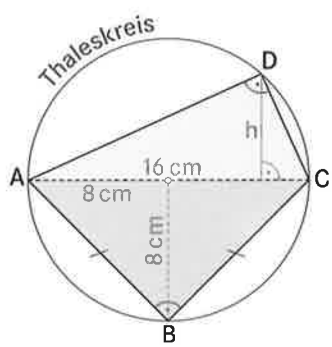


$A_{\square} = 9\,cm \cdot 13\,cm = 117\,cm^2$

$A_{\triangle❶} = 9\,cm \cdot 9\,cm : 2 = 40.5\,cm^2$
$A_{\triangle❷} = 4\,cm \cdot 4\,cm : 2 = 8\,cm^2$
$A_{\triangle❸} = 5\,cm \cdot 5\,cm : 2 = 12.5\,cm^2$
$A_{\triangle❹} = 8\,cm \cdot 4\,cm : 2 = 16\,cm^2$

$\mathbf{A_? = A_{\square} - A_{\triangle❶} - A_{\triangle❷} - A_{\triangle❸} - A_{\triangle❹} = 40\,cm^2}$

E190 $A_{ABCD} = 112\,cm^2 \qquad AC = 16\,cm$
Der Kreis ist ein Thaleskreis. Die beiden Dreiecke ABC und ACD sind demnach rechtwinklig; das Dreieck ABC sogar rechwinklig-gleichschenklig.

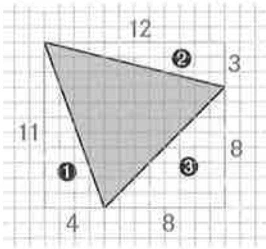


$A_{ABC} = 16\,cm \cdot 8\,cm : 2 = 64\,cm^2$
$A_{ACD} = A_{ABCD} - A_{ABC} = 112\,cm^2 - 64\,cm^2 = 48\,cm^2$

Es gilt folglich $\quad 16\,cm \cdot h : 2 = 48\,cm^2 \quad |\cdot 2$
$16\,cm \cdot h = 96\,cm^2 \quad |: 16\,cm$
$\mathbf{h = 6\,cm}$

Die Ecke D hat vom Durchmesser AC 6 cm Abstand.

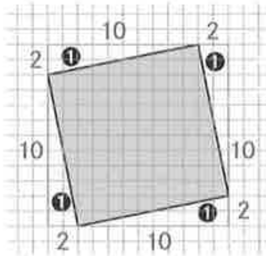
E191 △-Fläche = Rechteck – △❶ – △❷ – △❸



A▭	= 12 cm · 11 cm	= 132 cm^2
A△❶	= 4 cm · 11 cm : 2	= 22 cm^2
A△❷	= 12 cm · 3 cm : 2	= 18 cm^2
A△❸	= 8 cm · 8 cm : 2	= 32 cm^2

A△ = A▭ – A△❶ – A△❷ – A△❸ = **60 cm^2**

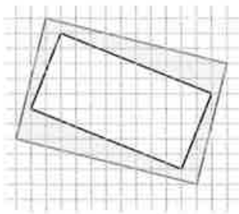
□-Fläche = grosses Quadrat – 4 · Dreieck❶

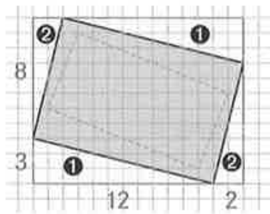


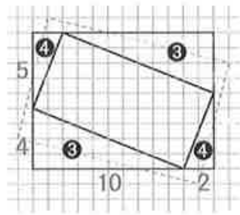
A□$_{gross}$	= 12 cm · 12 cm	= 144 cm^2
A△❶	= 2 cm · 10 cm : 2	= 10 cm^2

A□ = A□$_{gross}$ – 4 · A△❶ = **104 cm^2**

In dieser Aufgabe kann man in zwei Schritten vorwärts gehen:
Rahmen-Fläche = graues Rechteck – weisses Rechteck







graue ▭-Fläche = grosses Rechteck – 2·△❶ – 2·△❷

A▭	= 14 cm · 11 cm	= 154 cm^2
A△❶	= 12 cm · 3 cm : 2	= 18 cm^2
A△❷	= 8 cm · 2 cm : 2	= 8 cm^2

A▭$_{grau}$ = **A▭** – 2·A△❶ – 2·A△❷ = **102 cm^2**

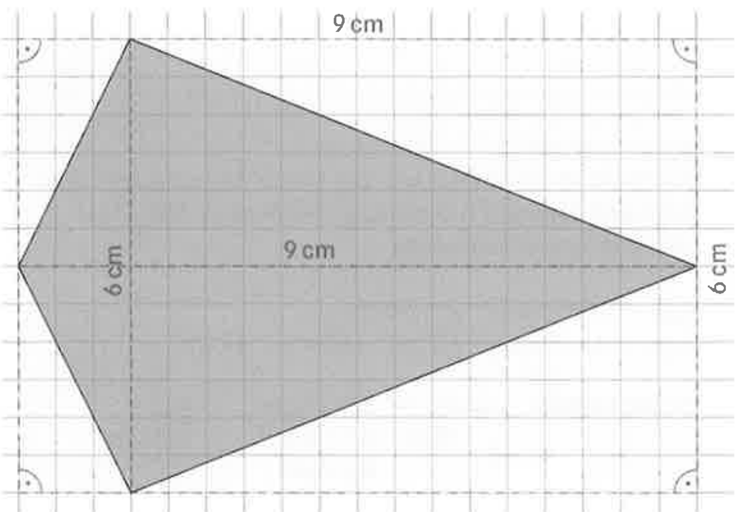
weisse ▭-Fläche = grosses Rechteck – 2·△❸ – 2·△❹

A▭	= 12 cm · 9 cm	= 108 cm^2
A△❸	= 10 cm · 4 cm : 2	= 20 cm^2
A△❹	= 5 cm · 2 cm : 2	= 5 cm^2

A▭$_{weiss}$ = **A▭** – 2·A△❸ – 2·A△❹ = **58 cm^2**

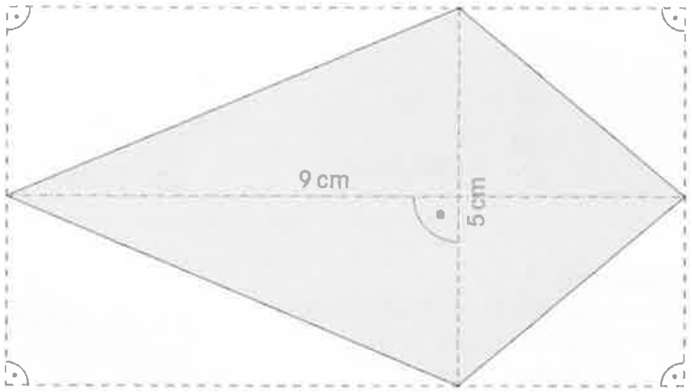
A$_{Rahmen}$ = A▭$_{grau}$ – A▭$_{weiss}$ = 102 cm^2 – 58 cm^2 = **44 cm^2**

E192



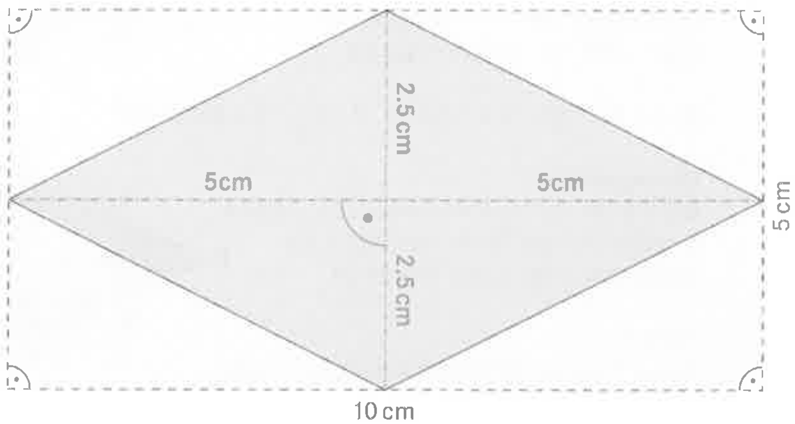
Das umgebende Rechteck hat die doppelt so grosse Fläche wie das Drachenviereck.
Seine Seiten sind genau gleich lang, wie die Diagonalen des Drachenvierecks.

A◇ = A▭ : 2
= 9 cm · 6 cm : 2
= **27 cm^2**



Das umgebende Rechteck hat wiederum die doppelt so grosse Fläche wie das Drachenviereck. Seine Seitenlängen entsprechen den Diagonalen des Drachenvierecks.

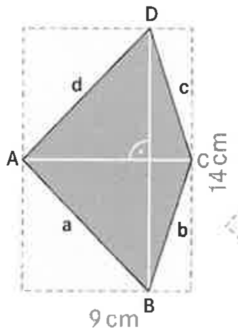
$A_{◇} = A_{□} : 2$
$= 9\,cm \cdot 5\,cm : 2$
$= \mathbf{22.5\,cm^2}$

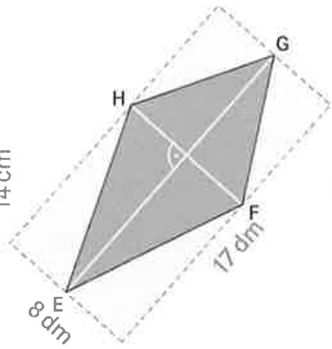


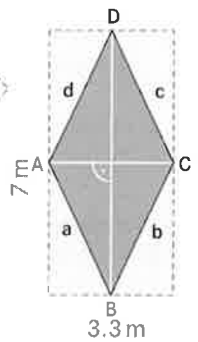
Es handelt sich hier um ein spezielles Drachenviereck, einen Rhombus.
Das umgebende Rechteck hat wiederum die doppelt so grosse Fläche.

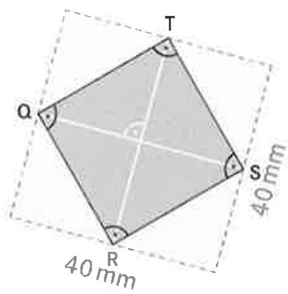
$A_{◇} = A_{□} : 2$
$= 10\,cm \cdot 5\,cm : 2$
$= \mathbf{25\,cm^2}$

E193 Die Seiten der umgebenden, doppelt so grossen Rechtecke entsprechen den Diagonalenlängen der Drachenvierecke.









a $A_{ABCD} = 9\,cm \cdot 14\,cm : 2$ (= AC · BD : 2)
$= \mathbf{63\,cm^2}$

c $A_{ABCD} = 3.3\,m \cdot 7\,m : 2$ (= AC · BD : 2)
$= \mathbf{11.55\,m^2}$

b $A_{EFGH} = 17\,dm \cdot 8\,dm : 2$ (= EG · HF : 2)
$= \mathbf{68\,dm^2}$

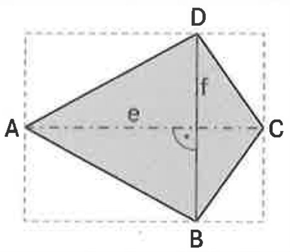
d $A_{QRST} = 40\,mm \cdot 40\,mm : 2$ (= QS · RT: 2)
$= \mathbf{800\,mm^2}$

$A_{◇}$

Flächenberechnung bei allg. Drachenvierecken und Rhomben

Die Fläche eines Drachenvierecks ist halb so gross, wie das umgebende Rechteck.

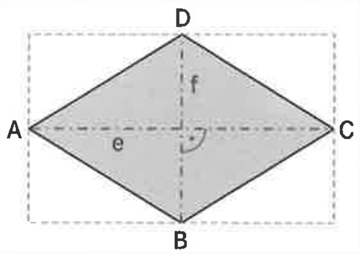
Fläche eines Drachenvierecks = **1. Diagonale mal 2. Diagonale durch 2**



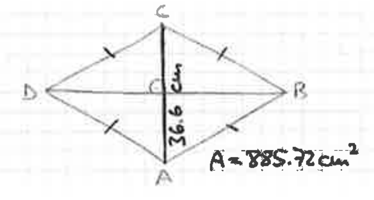
$A_{◇} = \mathbf{e \cdot f : 2}$

oder

$A_{◇} = \frac{e \cdot f}{2}$



E194

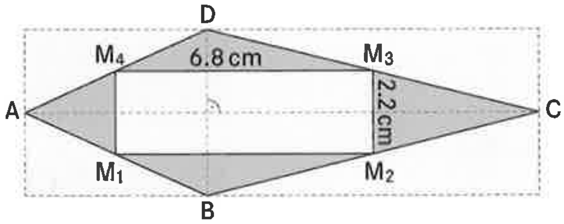


$A_{ABCD} = 885.72\,cm^2$ $\quad AC = 36.6\,cm$ $\quad BD = ?$

$$A_{ABCD} = AC \cdot BD : 2 \qquad |\cdot 2$$
$$2 \cdot A_{ABCD} = AC \cdot BD \qquad |: AC$$
$$BD = 2 \cdot A_{ABCD} : AC$$
$$\mathbf{BD} = 2 \cdot 885.72\,cm^2 : 36.6\,cm = \mathbf{48.4\,cm}$$

E195 **Lösungsweg 1**

M_4M_3 ist Mittellinie im Dreieck ACD.
AC ist demnach doppelt so lang:
AC = $2 \cdot 6.8\,cm$ = **13.6 cm**

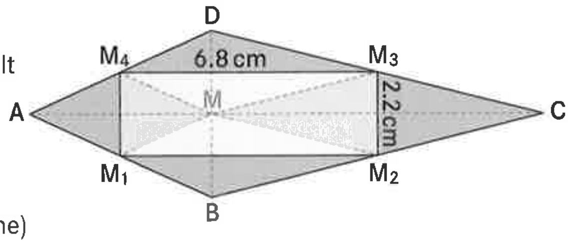


M_2M_3 ist Mittellinie im Dreieck DBC.
Also: **DB** = $2 \cdot 2.2\,cm$ = **4.4 cm**

$A_{\diamond} = AC \cdot DB : 2 = 13.6\,cm \cdot 4.4\,cm : 2 = \mathbf{29.92\,cm^2}$

Lösungsweg 2

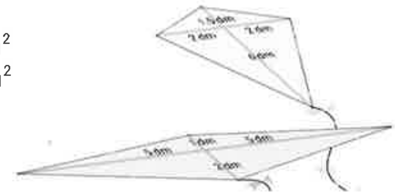
Die Fläche des Drachenvierecks ist doppelt so gross wie die Fläche des durch die Mittellinien begrenzten Rechtecks.



Denn:
$A_{AM_1M_4} = A_{M_1MM_4}$ (gleiche Seite, gleiche Höhe)
ebenso: $A_{M_1BM_2} = A_{M_2MM_1}$ $\quad A_{M_2CM_3} = A_{M_3MM_2}$ $\quad A_{M_4M_3D} = A_{M_4MM_3}$

$A_{\diamond} = 2 \cdot A_{\square} = 2 \cdot 6.8\,cm \cdot 2.2\,cm = \mathbf{29.92\,cm^2}$

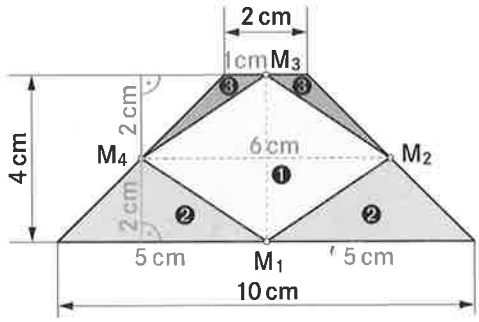
E196 ▪ Oberer Drachen: $A = 4\,dm \cdot 7.5\,dm : 2 = 15\,dm^2$
Unterer Drachen: $A = 10\,dm \cdot 3\,dm : 2 = 15\,dm^2$
Beide Drachen haben die gleich grosse Fläche.



▪ Probiere es aus!

E197 **Lösungsweg 1: $M_1M_2M_3M_4$ = Rhombus**

❶ Rhombus: **A❶** = $M_4M_2 \cdot M_1M_3 : 2$
$= 6\,cm \cdot 4\,cm : 2 = \mathbf{12\,cm^2}$
❷ Dreieck: **A❷** = $5\,cm \cdot 2\,cm : 2 = \mathbf{5\,cm^2}$
❸ Dreieck: **A❸** = $1\,cm \cdot 2\,cm : 2 = \mathbf{1\,cm^2}$



Lösungsweg 2: ❶ = Trapez – 2·❷– 2·❸

Trapez Mittellinie = 6 cm
$A_{\text{Trapez}} = 6\,cm \cdot 4\,cm = \mathbf{24\,cm^2}$
A❷, A❸ wie oben
A❶ = A_{Trapez} – 2·A❷ – 2·A❸ = **12 cm²**

E198 ❶ Trapez: Parallelseiten: 10 cm und 3.5 cm

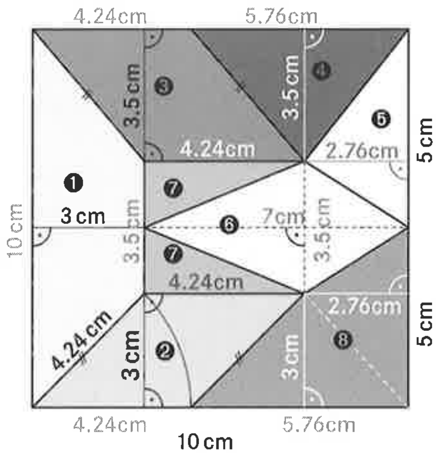
Abbildung Seite 49

Mittellinie = $(10\,cm + 3.5\,cm) : 2 = 6.75\,cm$
Höhe = 3 cm
A❶ = Mittellinie · Höhe $= 6.75\,cm \cdot 3\,cm = \mathbf{20.25\,cm^2}$

❷ Rhomboid: Seite = 4.24 cm
(Rhombus) zugehörige Höhe = 3 cm
A❷ = Seite · zugehörige Höhe $= 4.24\,cm \cdot 3\,cm = \mathbf{12.72\,cm^2}$

❸ Rhomboid: Seite = 4.24 cm
zugehörige Höhe = 3.5 cm
A❸ = Seite · zugehörige Höhe $= 4.24\,cm \cdot 3.5\,cm = \mathbf{14.84\,cm^2}$

❹ Dreieck: Seite = 5.76 cm
zugehörige Höhe = 3.5 cm
$A_❹$ = Seite · zugehörige Höhe : 2
= 5.76 cm · 3.5 cm : 2 = **10.08 cm²**



❺ Dreieck: Seite = 5 cm
zugehörige Höhe = 2.76 cm
$A_❺$ = Seite · zugehörige Höhe : 2
= 5 cm · 2.76 cm : 2 = **6.9 cm²**

❻ Drachenviereck: 1. Diagonale = 7 cm
2. Diagonale = 3.5 cm
$A_❻$ = 1. Diagonale · 2. Diagonale : 2
= 7 cm · 3.5 cm : 2 = **12.25 cm²**

❼ Dreieck: 2-teilig Seite = 3.5 cm für beide zusammen, zu einem Dreieck zusammengefügt
zugehörige Höhe = 4.24 cm
$A_❼$ = Seite · zugehörige Höhe : 2
= 3.5 cm · 4.24 cm : 2 = **7.42 cm²**

❽ Viereck unterteilbar in zwei Dreiecke:
△ unten: Seite = 5.76 cm
zugehörige Höhe = 3 cm
$A_{△unten}$ = Seite · zugehörige Höhe : 2
= 5.76 cm · 3 cm : 2 = 8.64 cm²
△ rechts: Seite = 5 cm
zugehörige Höhe = 2.76 cm
$A_{△rechts}$ = Seite · zugehörige Höhe : 2
= 5 cm · 2.76 cm : 2 = 6.9 cm²
$A_❽$ = $A_{△unten}$ + $A_{△rechts}$
= 8.64 cm² + 6.9 cm² = **15.54 cm²**

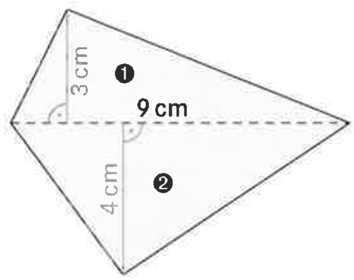
Kontrolle:
20.25 cm² + 12.72 cm² + 14.84 cm² + 10.08 cm² + 6.9 cm² + 12.25 cm² + 7.42 cm² + 15.54 cm² = **100 cm²** ✓

E199 **Alle Abbildungen in dieser Aufgabe sind hier in den Lösungen im Massstab 1 : 2.**

Leicht abweichende Resultate sind in dieser Aufgabe **E199** wahrscheinlich und tolerierbar.

Sie entstehen durch die mit dem Messen verbundenen kleinen Ungenauigkeiten.

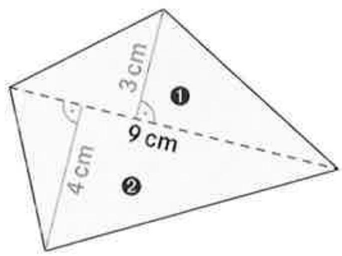
Viereck 1
Das Viereck 1 ist bereits in zwei Dreiecke unterteilt.
Wir messen deren Höhen und erhalten damit:



$A_{△❶}$ = 9 cm · 3 cm : 2 = 13.5 cm²
$A_{△❷}$ = 9 cm · 4 cm : 2 = 18 cm²

$A_{Viereck 1}$ = $A_{△❶}$ + $A_{△❷}$ = 13.5 cm² + 18 cm² = **31.5 cm²**

Viereck 2
Auch das Viereck 2 ist bereits in zwei Dreiecke unterteilt.
Wir messen deren Höhen und erhalten:



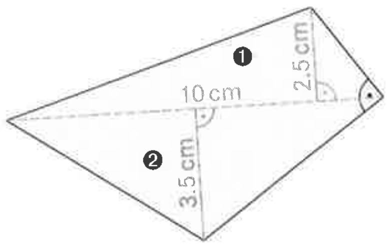
$A_{△❶}$ = 9 cm · 3 cm : 2 = 13.5 cm²
$A_{△❷}$ = 9 cm · 4 cm : 2 = 18 cm²

$A_{Viereck2}$ = $A_{△❶}$ + $A_{△❷}$ = 13.5 cm² + 18 cm² = **31.5 cm²**

→

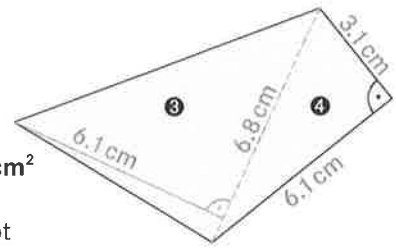
Viereck 3

Wir führen auch hier die Flächenberechnung auf zwei Dreiecke zurück.
Es gibt dafür verschiedene Möglichkeiten.



Beispielsweise:
A△❶ = 10 cm · 2.5 cm : 2 = 12.5 cm^2
A△❷ = 10 cm · 3.5 cm : 2 = 17.5 cm^2

$\mathbf{A}_{\text{Viereck3}}$ = A△❶ + A△❷ = 12.5 cm^2 + 17.5 cm^2 = **30 cm^2**



oder:
A△❸ = 6.1 cm · 6.8 cm : 2 = 20.74 cm^2
A△❹ = 6.1 cm · 3.1 cm : 2 = 9.46 cm^2

$\mathbf{A}_{\text{Viereck3}}$ = A△❸ + A△❹ = 20.74 cm^2 + 9.46 cm^2 = **30.2 cm^2**

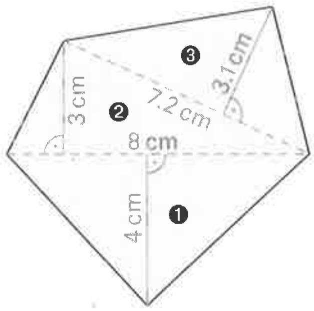
Der Flächenunterschied in den beiden Resultaten ergibt sich durch Messungenauigkeiten bzw. Rundungsfehler.

Leicht abweichende Resultate sind in dieser Aufgabe **E198** wahrscheinlich und tolerierbar.

Sie entstehen durch die mit dem Messen verbundenen kleinen Ungenauigkeiten.

Fünfeck 4

Die Berechnung einer Fünfecksfläche lässt sich wiederum auf die Berechnung von Dreiecksflächen zurückführen.
Für die Unterteilung gibt es verschiedene Möglichkeiten.

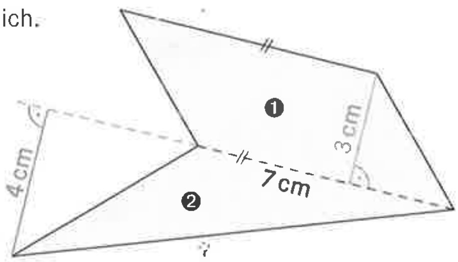


Ein Beispiel:
A△❶ = 8 cm · 4 cm : 2 = 16 cm^2
A△❷ = 8 cm · 3 cm : 2 = 12 cm^2
A△❸ = 7.2 cm · 3.1 cm : 2 = 11.16 cm^2

$\mathbf{A}_{\text{Fünfeck4}}$ = A△❶ + A△❷ + A△❸ = 16 cm^2 + 12 cm^2 + 11.16 cm^2 = 39.16 cm^2 ≈ **39.2 cm^2**

Fünfeck 5

Auch hier wäre eine Rückführung auf Dreiecke möglich.
Bequemer ist es, die bestehende Unterteilung mit dem Rhomboid auszunützen.

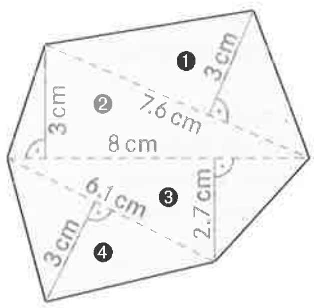


A▱❶ = 7 cm · 3 cm = 21 cm^2
A△❷ = 7 cm · 4 cm : 2 = 14 cm^2

$\mathbf{A}_{\text{Fünfeck5}}$ = A▱❶ + A△❷ = 21 cm^2 + 14 cm^2 = **35 cm^2**

Sechseck 6

Wir unterteilen das Sechseck wiederum in Dreiecke – vier sind es diesmal. Die Unterteilung ist auf ganz unterschiedliche Arten möglich.

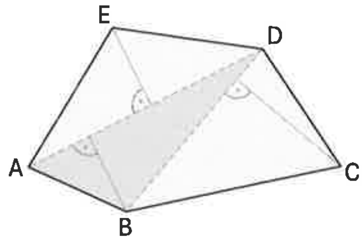


Ein Beispiel:
A△❶ = 7.6 cm · 3 cm : 2 = 11.4 cm^2
A△❷ = 8 cm · 3 cm : 2 = 12 cm^2
A△❸ = 8 cm · 2.7 cm : 2 = 10.8 cm^2
A△❹ = 6.1 cm · 3 cm : 2 = 9.15 cm^2

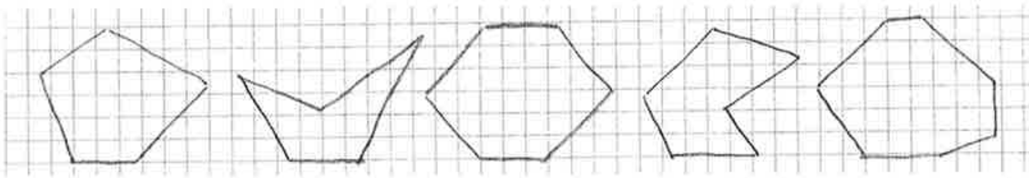
$\mathbf{A}_{\text{Sechseck6}}$ = A△❶ + A△❷ + A△❸ + A△❹
= 11.4 cm^2 + 12 cm^2 + 10.8 cm^2 + 9.15 cm^2 = 43.35 cm^2 ≈ **43.4 cm^2**

E1100 Flächenberechnung bei allgemeinen Vierecken und Vielecken

Die Fläche eines allgemeinen Vierecks oder eines beliebigen Vielecks kann man bequem berechnen, indem man die Figur **in Dreiecke unterteilt** und dann deren eine Seite sowie die zugehörige Höhe misst.



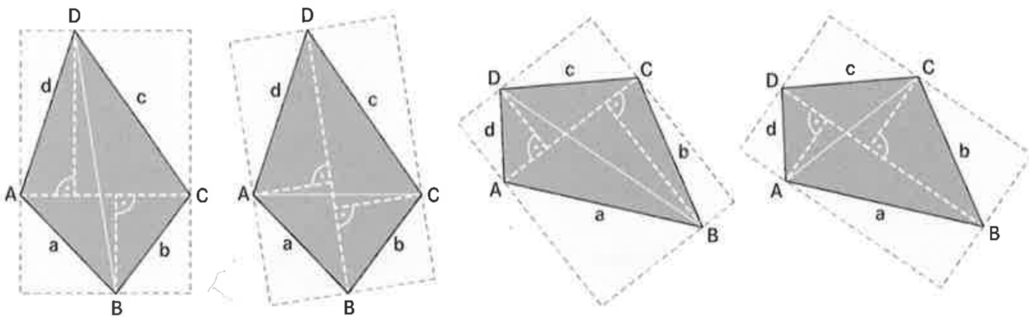
E1101



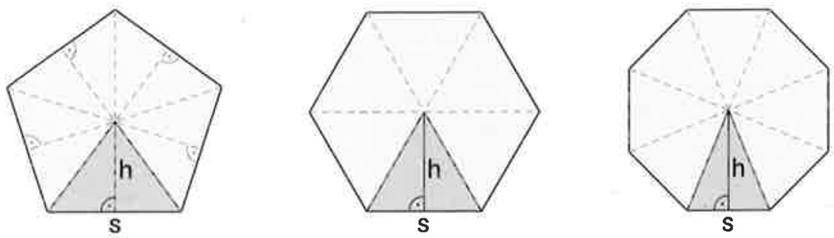
Viereck:	2 Dreiecke	⇒	1 Trennlinie,	2 Höhen	1+2 =	**3**	Messungen
Fünfeck:	3 Dreiecke	⇒	2 Trennlinien,	3 Höhen	2+3 =	**5**	Messungen
Sechseck:	4 Dreiecke	⇒	3 Trennlinien,	4 Höhen	3+4 =	**7**	Messungen
Siebeneck:	5 Dreiecke	⇒	4 Trennlinien,	5 Höhen	4+5 =	**9**	Messungen
10-Eck:	8 Dreiecke	⇒	7 Trennlinien,	8 Höhen	7+8 =	**15**	Messungen
n-Eck:	(n-2) Dreiecke	⇒	(n-3) Trennlinien,	(n-2) Höhen	(n-3)+(n-2)=	**(2n-5)**	Messungen

E1102 Ja, Lars hat eigentlich recht.
Wählt man die eine Seite eines Rechtecks, das durch alle vier Ecken verläuft, parallel zu einer Diagonale des Vierecks, so muss man nur dessen Seiten messen. Die Länge der einen Seite entspricht der Länge der Trennlinie der beiden Dreiecke, die Länge der anderen Seite entspricht der Summe der beiden Höhen.
Das Rechteck zu zeichnen ist allerdings aufwändiger als die beiden Höhen einzeln zu messen.

Beispiele:



E1103 **a**, **b**, **d** Regelmässige Vielecke lassen sich in eine bestimmte Anzahl kongruente, gleichschenklige Dreiecke zerlegen. Grundsätzlich genügen daher bei jedem regelmässigen Vieleck **zwei Angaben**, um dessen Fläche zu berechnen: Die **Seitenlänge s** und die **Höhe h eines bestimmenden Dreiecks**. Diese beiden Grössen ermöglichen eine bequeme Berechnung der Fläche. Allerdings muss zuerst ein solches Dreieck eingezeichnet werden.

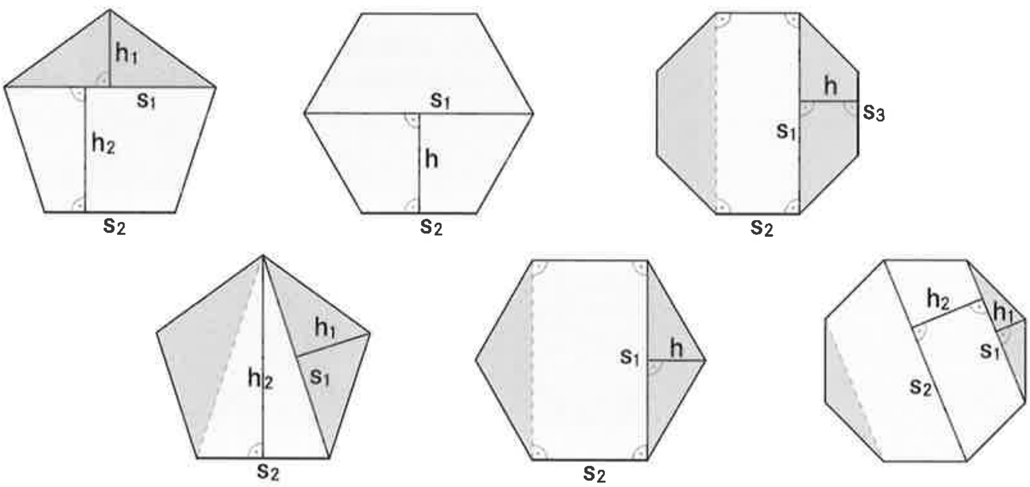


→

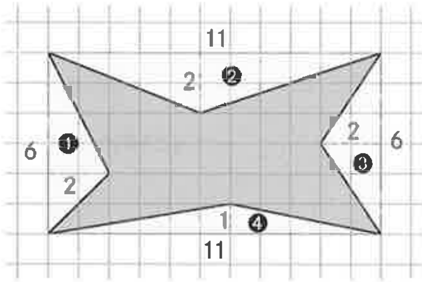
→ Auch wenn man nicht auf das bestimmende Dreieck zurückgreift, sind jeweils weniger Grössen nötig, als bei einem allgemeinen Vieleck.

Beispiele:

Fünfeck: **4** Sechseck: **3** Achteck: **4**



E1104 ■ **Stern-Fläche = ▭ – △❶ – △❷ – △❸ – △❹**

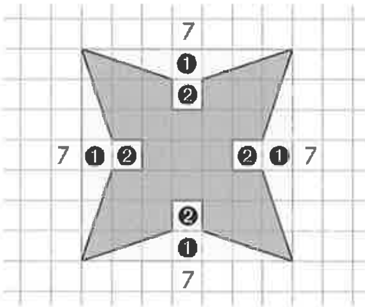


A▭ = 11 cm · 6 cm = 66 cm^2

A△❶ = 6 cm · 2 cm : 2 = 6 cm^2
A△❷ = 11 cm · 2 cm : 2 = 11 cm^2
A△❸ = 6 cm · 2 cm : 2 = 6 cm^2
A△❹ = 11 cm · 1 cm : 2 = 5.5 cm^2

A_{Stern} = A▭ – A△❶ – A△❷ – A△❸ – A△❹ = **37.5 cm^2**

■ **Kleeblatt-Fläche = grosses□ – 4· ◺❶ – 4·□❷**

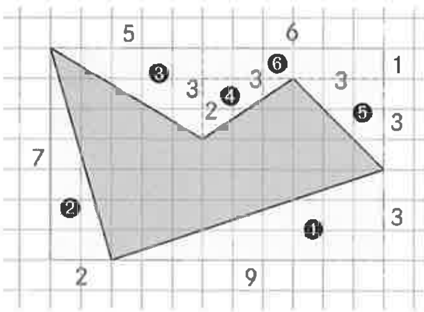


A$\square_{\text{gross}}$ = 7 cm · 7 cm = 49 cm^2

A◺❶ = 4 cm · 1 cm = 4 cm^2
A□❷ = 1 cm · 1 cm = 1 cm^2

$A_{\text{Kleeblatt}}$ = A$\square_{\text{gross}}$ – 4·A◺❶ – 4·A□❷
= 49 cm^2 – 16 cm^2 – 4 cm^2 = **29 cm^2**

■ **5-Eck-Fläche = grosses▭ – △❶ – △❷ – △❸ – △❹ – △❺ – ▭❻**



A$▭_{\text{gross}}$ = 11 cm · 7 cm = 77 cm^2

A△❶ = 9 cm · 3 cm : 2 = 13.5 cm^2
A△❷ = 2 cm · 7 cm : 2 = 7 cm^2
A△❸ = 5 cm · 3 cm : 2 = 7.5 cm^2
A△❹ = 3 cm · 2 cm : 2 = 3 cm^2
A△❺ = 3 cm · 3 cm : 2 = 4.5 cm^2
A▭❻ = 6 cm · 1 cm = 6 cm^2

$A_{\text{5-Eck}}$ = A$▭_{\text{gross}}$ – A△❶ – A△❷ – A△❸ – A△❹ – A△❺ – A▭❻ = **35.5 cm^2**

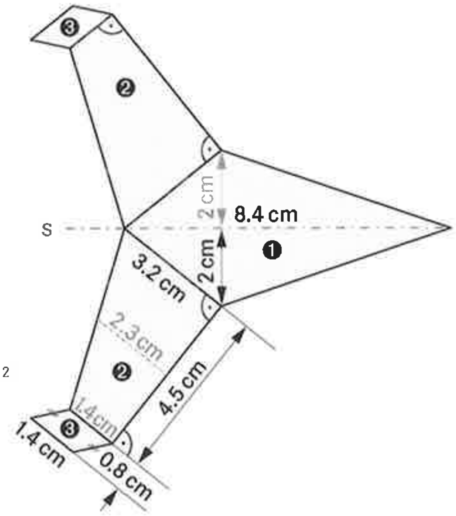
E1105 a

❶ Drachenviereck: $A_❶ = e \cdot f : 2 = 8.4\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} : 2 = \mathbf{16.80\,cm^2}$

❷ Trapez: $A_❷ = \text{Mittellinie} \cdot \text{Höhe} = 2.3\,\text{cm} \cdot 4.5\,\text{cm} = \mathbf{10.35\,cm^2}$

❸ Rhomboid: $A_❸ = \text{Seite} \cdot \text{Höhe} = 1.4\,\text{cm} \cdot 0.8\,\text{cm} = \mathbf{1.12\,cm^2}$

Fläche total: $A_{total} = A_❶ + 2 \cdot A_❷ + 2 \cdot A_❸$
$= 16.8\,\text{cm}^2 + 20.7\,\text{cm}^2 + 2.24\,\text{cm}^2$
$= \mathbf{39.74\,cm^2}$



b

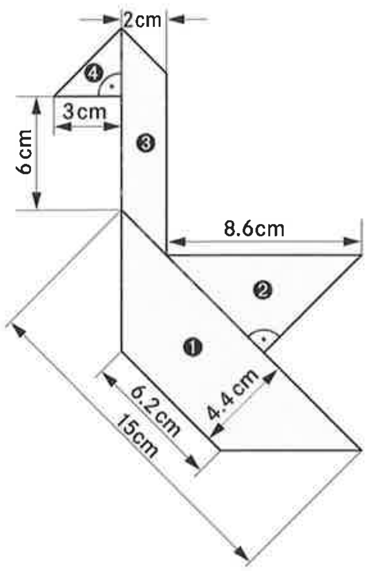
❶ Trapez: Mittellinie = (15 cm + 6.2 cm) : 2 = 10.6 cm
$A_❶ = \text{Mittellinie} \cdot \text{Höhe} = 10.6\,\text{cm} \cdot 4.4\,\text{cm} = \mathbf{46.64\,cm^2}$

❷ Dreieck: rechtwinklig-gleichschenklig
Höhe = 4.3 cm
$A_❷ = \text{Seite} \cdot \text{Höhe} : 2 = 8.6\,\text{cm} \cdot 4.3\,\text{cm} : 2 = \mathbf{18.49\,cm^2}$

❸ Rhomboid: $A_❸ = \text{Seite} \cdot \text{Höhe} = 9\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} = \mathbf{18\,cm^2}$

❹ Dreieck: rechtwinklig-gleichschenklig
$A_❹ = \text{Seite} \cdot \text{Seite} : 2 = 3\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} : 2 = \mathbf{4.5\,cm^2}$

Fläche total: $A_{total} = A_❶ + A_❷ + A_❸ + A_❸ = \mathbf{87.63\,cm^2}$

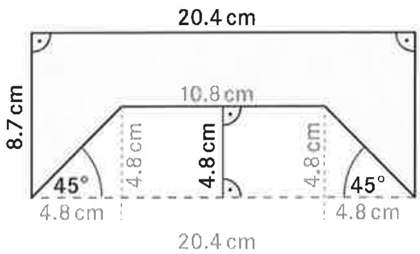


E1106 a Farbige Fläche = Rechteck – Trapez

Rechteck:
$A_{\square} = 20.4\,\text{cm} \cdot 8.7\,\text{cm} = \mathbf{177.48\,cm^2}$

Trapez:
Mittellinie = (20.4 cm + 10.8 cm) : 2 = 15.6 cm
Höhe = 4.8 cm
$A_{\text{Trapez}} = \text{Mittellinie} \cdot \text{Höhe} = 15.6\,\text{cm} \cdot 4.8\,\text{cm} = \mathbf{74.88\,cm^2}$

$A_{farbig} = A_{\square} - A_{\text{Trapez}} = 177.48\,\text{cm}^2 - 74.88\,\text{cm}^2 = \mathbf{102.6\,cm^2}$



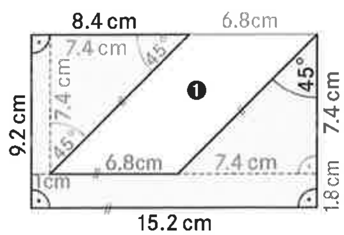
b Bequemer Lösungsweg: Farbige Fläche = umgebendes Rechteck – Rhomboid ❶

Alle Dreiecke sind rechtwinklig-gleichschenklig.

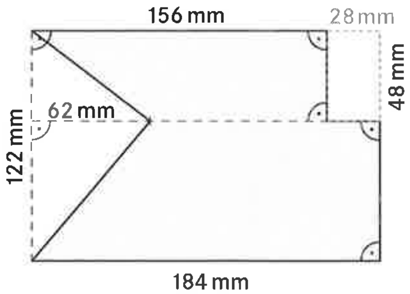
$A_{\square} = 15.2\,\text{cm} \cdot 9.2\,\text{cm} = \mathbf{139.84\,cm^2}$

$A_{\text{Rhomboid}❶} = 6.8\,\text{cm} \cdot 7.4\,\text{cm} = \mathbf{50.32\,cm^2}$

$A_{farbig} = A_{\square} - A_{\text{Rhomboid}❶}$
$= 139.84\,\text{cm}^2 - 50.32\,\text{cm}^2 = \mathbf{89.52\,cm^2}$



Lösungsweg 1: Farbig Fläche = Rechteck gross – Rechteck klein – Dreieck



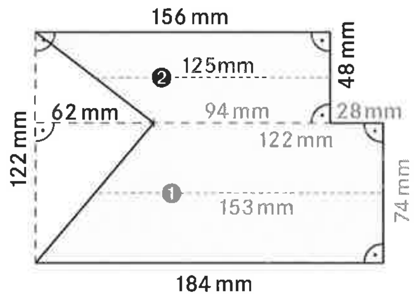
Rechteck gross:
$A_{\square\,gross} = 184\,mm \cdot 122\,mm = \mathbf{22\,448\,mm^2}$

Rechteck klein:
$A_{\square\,klein} = 28\,mm \cdot 48\,mm = \mathbf{1\,344\,mm^2}$

Dreieck:
$A_{\triangle} = 122\,mm \cdot 62\,mm : 2 = \mathbf{3\,782\,mm^2}$

$A_{farbig} = A_{\square\,gross} - A_{\square\,klein} - A_{\triangle}$
$= 22\,448\,mm^2 - 1\,344\,mm^2 - 3\,782\,mm^2 = \mathbf{17\,322\,mm^2} = \mathbf{173.22\,cm^2}$

Lösungsweg 2: Farbig Fläche = Trapez ❶ + Trapez ❷

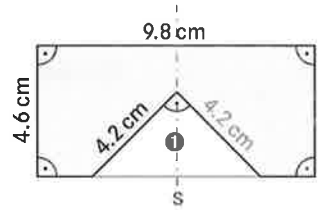


Trapez ❶:
Mittellinie = (184 mm + 122 mm) : 2 = 153 mm
Höhe = 122 mm – 48 mm = 74 mm
$A_{❶}$ = Mittellinie · Höhe
= 153 mm · 74 mm = **11 322 mm²**

Trapez ❷:
Mittellinie = (94 mm + 156 mm) : 2 = 125 mm
Höhe = 48 mm
$A_{❷}$ = Mittellinie · Höhe
= 125 mm · 48 mm = **6 000 mm²**

$A_{farbig} = A_{❶} + A_{❷} = 11\,322\,mm^2 + 6\,000\,mm^2 = \mathbf{17\,322\,mm^2} = \mathbf{173.22\,cm^2}$

Bequemer Lösungsweg: Farbig Fläche = umgebendes Rechteck – Dreieck ❶

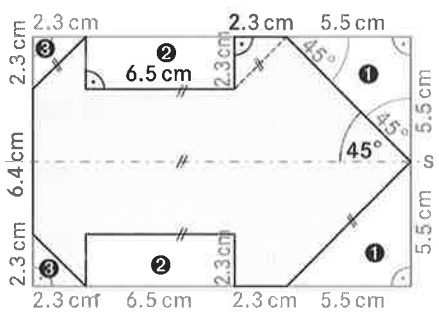


$A_{\square} = 9.8\,cm \cdot 4.6\,cm = \mathbf{45.08\,cm^2}$

$A_{\triangle ❶} = 4.2\,cm \cdot 4.2\,cm : 2 = \mathbf{8.82\,cm^2}$

$A_{farbig} = A_{\square} - A_{\triangle ❶}$
$= 45.08\,cm^2 - 8.82\,cm^2 = \mathbf{36.26\,cm^2}$

Lösungsweg 1: Farbige Fläche = Rechteck – 2·Dreieck ❶ – 2·Rechteck ❷ – 2·Dreieck ❸



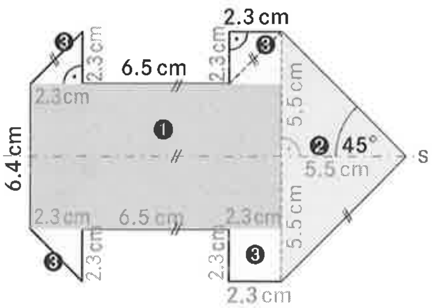
Rechteck gross:
Alle Dreiecke sind rechtwinklig-gleichschenklig.
Die einzelnen Teilstrecken des Rechtecks lassen sich somit angeben (zuerst die linke Seite ergänzen!).
Nun gilt:
$A_{\square\,gross} = 16.6\,cm \cdot 11\,cm = \mathbf{182.6\,cm^2}$

$A_{\triangle ❶} = 5.5\,cm \cdot 5.5\,cm : 2 = \mathbf{15.125\,cm^2}$
$A_{\square ❷} = 6.5\,cm \cdot 2.3\,cm = \mathbf{14.95\,cm^2}$
$A_{\triangle ❸} = 2.3\,cm \cdot 2.3\,cm : 2 = \mathbf{2.645\,cm^2}$

$A_{farbig} = A_{\square\,gross} - 2 \cdot A_{\triangle ❶} - 2 \cdot A_{\square ❷} - 2 \cdot A_{\triangle ❸}$
$= 182.6\,cm^2 - 30.25\,cm^2 - 29.9\,cm^2 - 5.29\,cm^2 = \mathbf{117.16\,cm^2}$

Lösungsweg 2: Farbige Fläche = Rechteck ❶ + Dreieck ❷ + 3·Quadrat ❸

Alle Dreiecke sind rechtwinklig-gleichschenklig.
Die Gesamthöhe beträgt
6.4 cm + 2·2.3 cm = 11 cm
Das Rechteck ❶ hat eine Breite von
6.5 cm + 2·2.3 cm = 11.1 cm
Nun gilt:

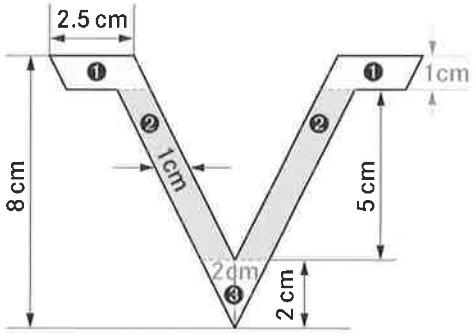


A□❶ = 11.1 cm · 6.4 cm = **71.04 cm²**
A△❷ = 11 cm · 5.5 cm : 2 = **30.25 cm²**
A□❸ = 2.3 cm · 2.3 cm = **5.29 cm²**

A$_{farbig}$ = A□❶ + A△❷ + 3·A□❸
= 71.04 cm² + 30.25 cm² + 15.87 cm² = **117.16 cm²**

E1107 Arbeitsblatt

E1108 a) V-Fläche = 2·Rhomboid ❶ + 2·Rhomboid ❷ + Dreieck ❸



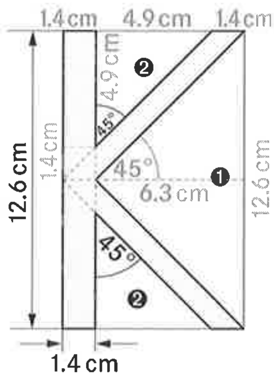
A▱❶ = 2.5 cm · 1 cm = **2.5 cm²**

A▱❷ = 1 cm · 5 cm = **5 cm²**

A△❸ = 2 cm · 2 cm : 2 = **2 cm²**

A$_V$ = 2·A▱❶ + 2·A▱❷ + A△❸
= 5 cm² + 10 cm² + 2 cm²
= **17 cm²**

b) Lösungsweg 1:
K-Fläche = umgebendes Rechteck – Dreieck ❶ – 2·Dreieck ❷

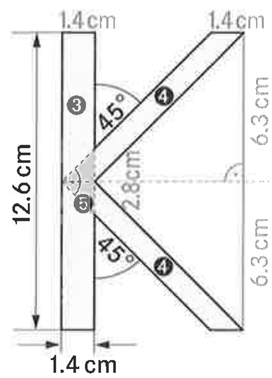


A□$_{gross}$ = 12.6 cm · 7.7 cm = **97.02 cm²**

A△❶ = 12.6 cm · 6.3 cm : 2 = **39.69 cm²**
A△❷ = 4.9 cm · 4.9 cm : 2 = **12.005 cm²**

A$_K$ = A□$_{gross}$ – A△❶ – 2·A△❷
= 97.02 cm² – 39.69 cm² – 24.01 cm² = **33.32 cm²**

Lösungsweg 2:
K-Fläche = schmales Rechteck ❸ + 2·Rhomboid ❹ – Dreieck ❺
Bei diesem Lösungsweg wird das kleine Dreieck ❺ doppelt gerechnet (beim Rechteck und bei den Rhomboiden).
Es muss deshalb wieder abgezählt werden.



A□❸ = 12.6 cm · 1.4 cm = **17.64 cm²**
A▱❹ = 1.4 cm · 6.3 cm = **8.82 cm²**
A△❺ = 2.8 cm · 1.4 cm : 2 = **1.96 cm²**

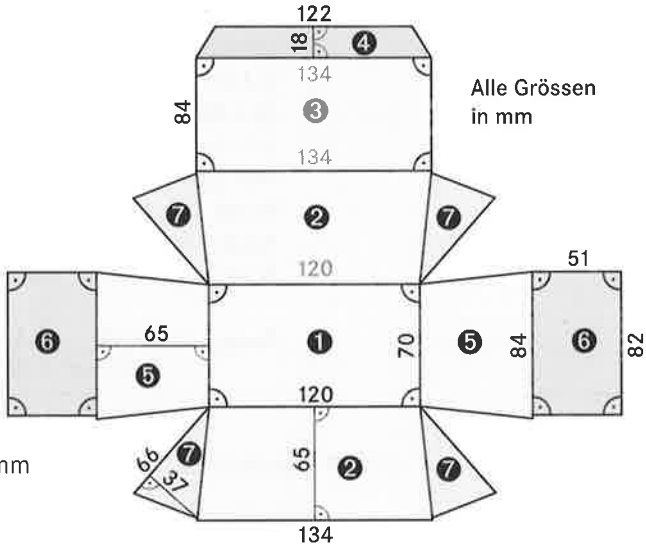
A$_K$ = A□❸ + 2·A▱❹ – A△❺
= 17.64 cm² + 17.64 cm² – 1.96 cm² = **33.32 cm²**

Lösungsweg 3: K-Fläche = 4·Rhomboid ❹ – Dreieck ❺ (ohne Rechnung)
Das halbe Rechteck ❸ ist gleich gross, wie ein Rhomboid ❹.

E1109 Der Kartonstapel wird genau **1 m** (= 1 000 mm) hoch.

Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

Um zu berechnen, wie schwer ein solcher Stapel ist, muss zuerst die Fläche eines einzelnen Schachtelnetzes berechnet werden.



❶ Boden:
Rechteck,
120 mm breit, 70 mm hoch

A❶ = 120 mm · 70 mm
= **8 400 mm²**

❷ Vorder- und Rückseite:
Trapez
Parallelseiten 120 mm und 134 mm
Höhe 65 mm
Mittellinie = 127 mm

A❷ = 127 mm · 65 mm = **8 255 mm²**

❸ Deckel:
Rechteck, 134 mm breit, 84 mm hoch

A❸ = 134mm · 84 mm = **11 256 mm²**

❹ Deckellasche:
Trapez, Parallelseiten 134 mm und 122 mm, Höhe 18 mm
Mittellinie = 128 mm

A❹ = 128mm · 18 mm = **2 304 mm²**

❺ Linke und rechte Seitenwand:
Trapez, Parallelseiten 70 mm und 84 mm, Höhe 65 mm
Mittellinie = 77 mm

A❺ = 77 mm · 65 mm = **5 005 mm²**

❻ Linke und rechte Seitenlasche:
Rechteck, 82 mm breit, 51 mm hoch

A❻ = 82 mm · 51 mm = **4 182 mm²**

❼ Verbindungs- und Verstärkungslaschen:
Dreieck mit einer Seite von 66 mm und einer Höhe von 37 mm

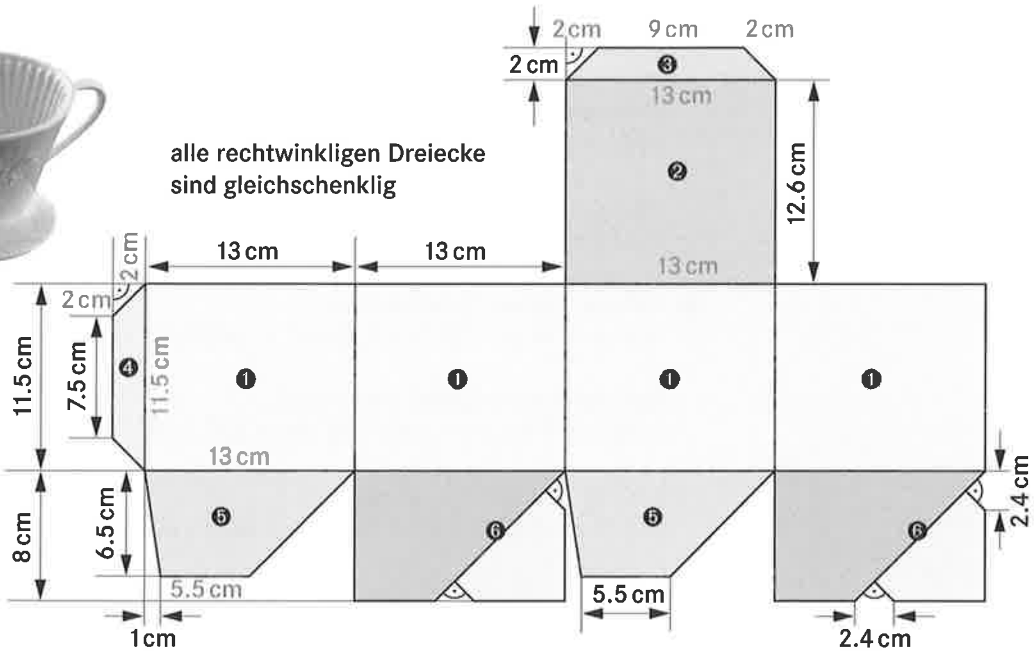
A❼ = 66 mm · 37 mm : 2 = **1 221 mm²**

Gesamtfläche eines Schachtelnetzes:
A$_{\text{Schachtel}}$ = A❶ + 2 · A❷ + A❸ + A❹ + 2 · A❺ + 2 · A❻ + 4 · A❼
= (8 400 + 2 · 8 255 + 11 256 + 2 304 + 2 · 5 005 + 2 · 4 182 + 4 · 1 221) mm²
= **61 728 mm² = 6.1728 dm² ≈ 6.17 dm²**

Wie schwer ist eine Schachtel?
1 m² ist 600 g schwer.
1 dm² wiegt demnach 6 g und
6.17 dm² wiegen 6.17 · 6g ≈ **37 g**

Ein Stapel mit **1 000 Schachtelnetzen** wiegt 1000 · 37 g = **37 kg**.

E1110



Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

❶ Seitenwände: Rechteck, 13 cm breit, 11.5 cm hoch

A❶ = 13 cm · 11.5 cm = **149.5 cm²**

❷ Deckel: Rechteck, 13 cm breit, 12.6 cm hoch

A❷ = 13 cm · 12.6 cm = **163.8 cm²**

❸ Deckellasche: Trapez, Parallelseiten 13 cm und 9 cm, Höhe 2 cm
Mittellinie = 11 cm

A❸ = 11 cm · 2 cm = **22 cm²**

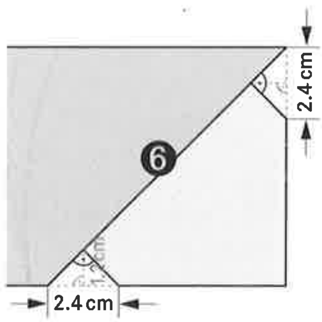
❹ Klebelasche: Trapez, Parallelseiten 11.5 cm und 7.5 cm, Höhe 2 cm
Mittellinie = 9.5 cm

A❹ = 9.5 cm · 2 cm = **19 cm²**

❺ Bodenteil: Trapez, Parallelseiten 13 cm und 5.5 cm, Höhe 6.5 cm
Mittellinie = (13 cm + 5.5 cm) : 2 = 9.25 cm

A❺ = 9.25 cm · 6.5 cm = **60.125 cm²**

❻ Bodenteil mit Verstärkungslasche: Lässt sich am einfachsten ausgehend von einem Rechteck der Breite 13 cm und der Höhe 8 cm berechnen, von dem zwei rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke mit einer Grundlinie von 2.4 cm und einer Höhe von 1.2 cm weggeschnitten wurden.



A❻ = 13 cm · 8 cm − 2 · 2.4 cm · 1.2 cm : 2
= 13 cm · 8 cm − 2.4 cm · 1.2 cm
= **101.12 cm²**

Gesamtfläche eines Schachtelnetzes:

$A_{Schachtel}$ = 4 · A❶ + A❷ + A❸ + A❹ + 2 · A❺ + 2 · A❻
= (4 · 149.5 + 163.8 + 22 + 19 + 2 · 60.125 + 2 · 101.12) cm²
= **1 125.29 cm²**

→

→ **a** Kartonabfall bei zwei Schachteln
$60\,cm \cdot 60\,cm - 2 \cdot 1\,125.29\,cm^2 = 3600\,cm^2 - 2\,250.58\,cm^2 = 1349.42\,cm^2$

Kartonabfall bei 10 000 Schachteln
$5\,000 \cdot 1349.42\,cm^2 = 6\,747\,100\,cm^2 = 674.71\,m^2$

$1\,m^2$ ist $1\,300\,g = 1.3\,kg$ schwer.
$674.71\,m^2$ sind $674.71 \cdot 1.3\,kg = 877.123\,kg \approx$ **877 kg** schwer.

b Kartonabfall bei 10 Schachteln
$192\,cm \cdot 78\,cm - 10 \cdot 1\,125.29\,cm^2 = 14\,976\,cm^2 - 11\,252.9\,cm^2 = 3\,723.1\,cm^2$

Kartonabfall bei 10 000 Schachteln
$1\,000 \cdot 3\,723.1\,cm^2 = 3\,723\,100\,cm^2 = 372.31\,m^2$

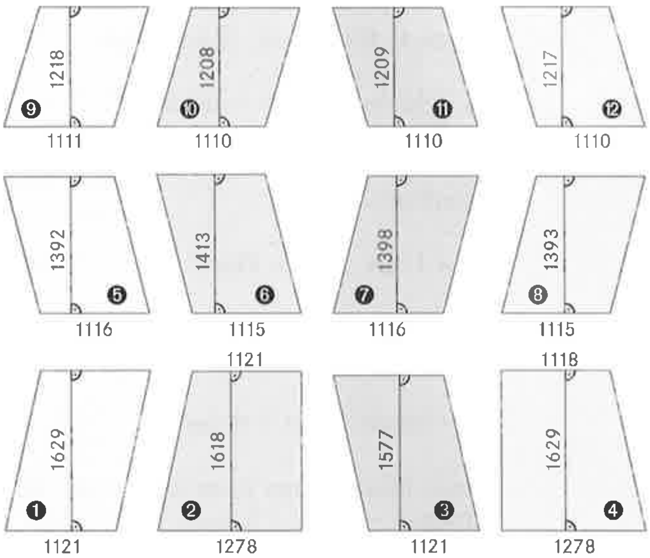
$1\,m^2$ ist $1\,300\,g = 1.3\,kg$ schwer.
$372.31\,m^2$ sind $372.31 \cdot 1.3\,kg = 484.003\,kg \approx$ **484 kg** schwer.

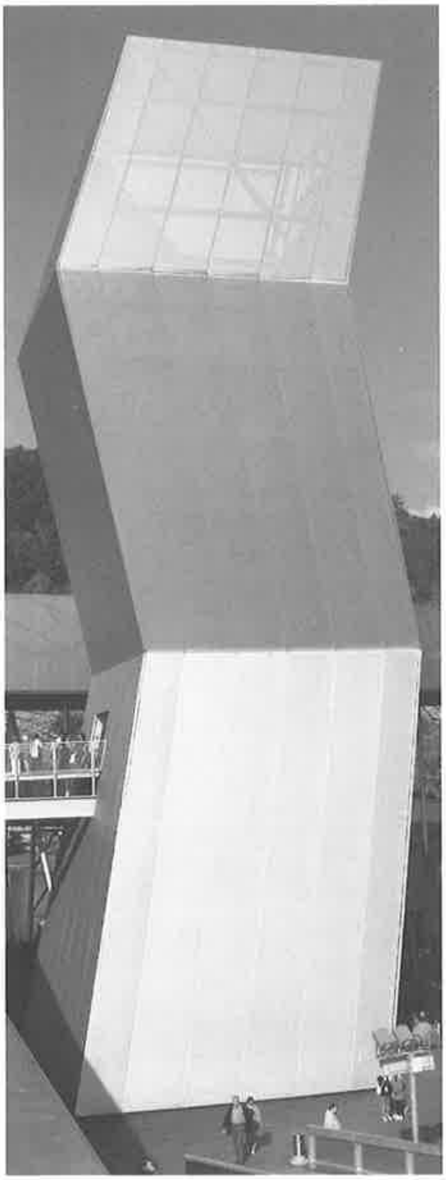
Der Abfall reduziert sich fast auf die Hälfte.

Weitere, eigene Lösungen sind willkommen.

c – Der grosse Karton könnte etwas kleiner sein: Mindestens nötig sind 190 cm x 76.5 cm. Aus technischen Gründen braucht es vermutlich etwas Rand.
– Effizienter wäre Karton ab Rolle. Die vier Eckabfälle würden dann weitgehend wegfallen.

E1111





Mittellinien für die Trapeze (alle Angaben in cm)
❷ $(1278 + 1121) : 2 =$ **1199.5**
❹ $(1278 + 1118) : 2 =$ **1198**

Flächen (alle Angaben in cm bzw. cm^2)

❶	1121 · 1629	= 1 826 109
❷	**1199.5** · 1618	= 1 940 791
❸	1121 · 1577	= 1 767 817
❹	**1198** · 1629	= 1 951 542
❺	1116 · 1392	= 1 553 472
❻	1115 · 1413	= 1 575 495
❼	1116 · 1398	= 1 560 168
❽	1115 · 1393	= 1 553 195
❾	1111 · 1218	= 1 353 198
❿	1110 · 1208	= 1 340 880
⓫	1110 · 1209	= 1 341 990
⓬	1110 · 1217	= 1 350 870
Fläche total		$= 19\,115\,527\,cm^2 \approx$ **1911.6 m²**

Wir bedanken uns bei der Firma TEXLON AG in Giswil dafür, dass sie uns die Pläne der Türme zur Entnahme der Originaldaten zur Verfügung gestellt hat.
www.texlon.ch

Für den Zuschnitt und die Übergänge zwischen den «Stockwerken» **5%** dazu rechnen:

100% $1\,911.6\,m^2$

105% $1.05 \cdot 1\,911.6\,m^2 = 2\,007.18\,m^2 \approx$ **$2007\,m^2$**

oder

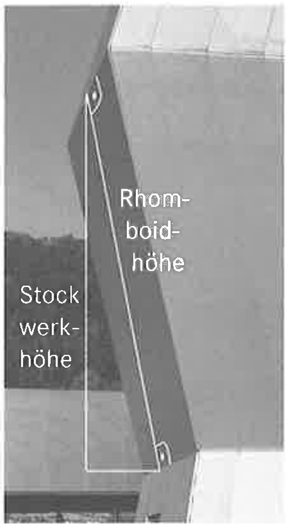
Für den Zuschnitt und die Übergänge zwischen den «Stockwerken» $\frac{1}{20}$ dazu rechnen:

$\frac{20}{20}$ $1\,911.6\,m^2$

$\frac{1}{20}$ $1\,911.6\,m^2 : 20 = 95.58\,m^2$

$\frac{21}{20}$ $1\,911.6\,m^2 + 95.58\,m^2 = 2\,007.18\,m^2 \approx$ **$2007\,m^2$**

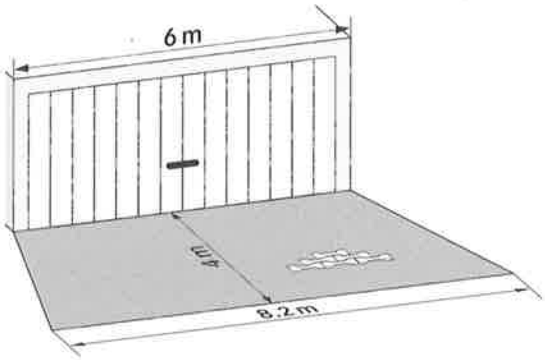
Es mussten mindestens **$2\,007\,m^2$** des Spezialtuches produziert werden.

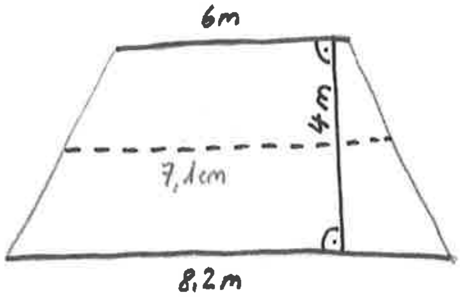


Unterschiedliche Höhe der einzelnen Stockwerk-Teile

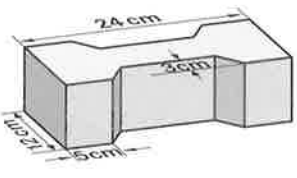
Mit Ausnahme der beiden Trapeze stehen keine der Teile vertikal (lotrecht).
Je schräger ein Rhomboid aber steht, umso «länger» muss es sein, damit die Stockwerkshöhe erreicht wird.

E1112

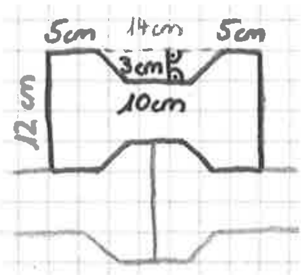




Die Fläche des Garagenplatzes lässt sich aus Mittellinie und Höhe berechnen:
$A_{Platz} = 7.1\,m \cdot 4\,m =$ **$28.4\,m^2$**



Die Fläche der Verbundsteine lässt sich ausgehend von einem Rechteck berechnen. Die Einbuchtung hat die Form eines gleichschenkligen Trapezes, dessen lange Parallelseite 14 cm misst.
Die kurze Seite muss 10 cm lang sein, damit zwei weitere Steine nahtlos angelegt werden können.
Die Mittellinie des Trapezes misst demnach 12 cm.



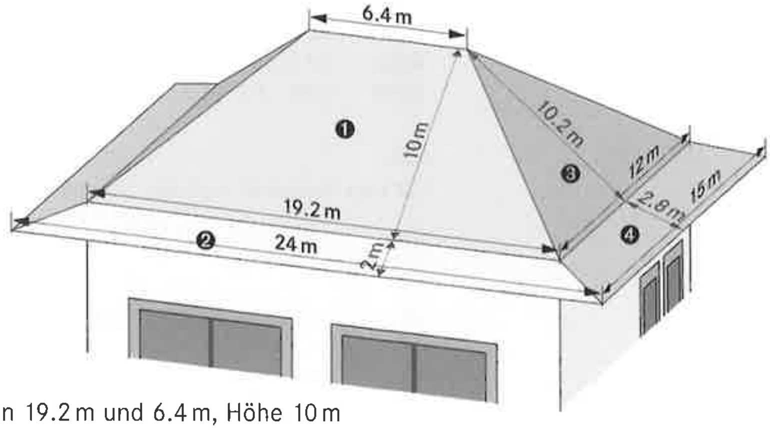
$A_{Stein} = A_{Rechteck} - 2 \cdot A_{Trapez}$
$= 24\,cm \cdot 12\,cm - 2 \cdot 12\,cm \cdot 3\,cm =$ **$216\,cm^2$**

Vergleicht man die beiden Flächen miteinander, so erhält man
$284\,000\,cm^2 : 216\,cm^2 = 1314,81$

Um den ganzen Platz zu belegen benötigt man ungefähr **1315 Steine**.

1 Stein wiegt 3.3 kg
1315 Steine wiegen $1315 \cdot 3.3\,kg = 4339.5\,kg$
Ein gewöhnlicher Personenwagen lässt – je nach Modell eine Nutzlast von 300 kg bis 400 kg zu. Es ist also sicher **nicht sinnvoll**, die Steine mit dem eigenen Auto zu transportieren.

E1113 Das Dach besteht aus vier verschiedenen Flächen, die alle zweimal vorkommen.



Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

❶ Trapez: Parallelseiten 19.2 m und 6.4 m, Höhe 10 m
Mittellinie = (19.2 m + 6.4 m) : 2= 12.8 m

A❶ = 12.8 m · 10 m = **128 m²**

❷ Trapez: Parallelseiten 24 m und 19.2 m, Höhe 2 m
Mittellinie = 21.6 m

A❷ = 21.6 m · 2 m = **43.2 m²**

❸ Dreieck: Seite 12 m, zugehörige Höhe 10.2 m

A❸ = 12 m · 10.2 m : 2 = **61.2 m²**

❹ Trapez: Parallelseiten 15 m und 12 m, Höhe 2.8 m
Mittellinie = 13.5 m

A❹ = 13.5 m · 2.8 m = **37.8 m²**

Gesamte Dachfläche:
A$_{\textbf{Dach}}$ = 2 · (A❶ + A❷ + A❸ + A❹)
= 2 · (128 + 43.2 + 61.2 + 37.8) m²
= **540.4 m²**

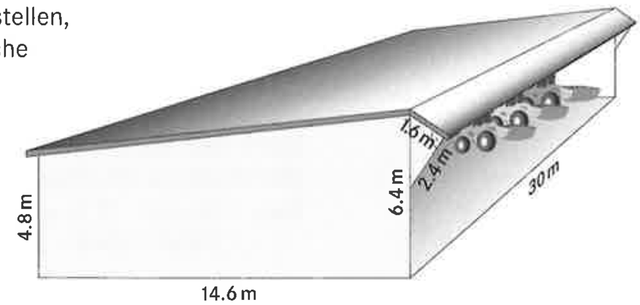
Benötigte Ziegel:

Für 1 m² braucht es			39 Ziegel	
Für 540.4 m² braucht es	540.4 · 39 Ziegel	=	21 076 Ziegel	
5% (= 1/20) für den Verschnitt	0.05 · 21 076	=	1054 Ziegel	(= 21 076 : 20)
Total			**22 130 Ziegel**	

Es sollten mindestens **22 130 Ziegel** bestellt werden.

E1114 Um einen Kostenvoranschlag zu erstellen, muss zuerst die zu erneuernde Fläche berechnet werden.

Seitenwände:
Diese lassen sich unterteilen in ein rechtwinkiges Trapez und das rechtwinklige Stützdreieck des Vordachs.



Trapez: Parallelseiten 6.4 m und 4.8 m, Höhe 14.6 m
Mittellinie = (6.4 m + 4.8 m) : 2= 5.6 m
A_{Trapez} = 5.6 m · 14.6 m = 81.76 m²

Dreieck: Senkrecht zueinander stehende Seiten von 2.4 m und 1.6 m
$A_{Dreieck}$ = 2.4 m · 1.6 m : 2 = 1.92 m²

A$_{\textbf{Seitenwand}}$ = 81.76 m² + 1.92 m² = 83.68 m² ≈ **83.7 m²**

Rückwand: Rechteck der Länge 30 m mit der Höhe 4.8 m

$A_{Rückwand} = 30\,m \cdot 4.8\,m = \mathbf{144\,m^2}$

Baugeschäft MiTiFre &Co
Geomathstrasse 13   8077 Zürich   Tel 044 987 67 89   Fax 044 987 67 88

Firma
Geobau AG
Frau Saubermann
Grubenstrasse 321
8888 Baumatten

Zürich, den 16.Februar 2004

Wandverputz-Erneuerung (Aussenbereich) des Baumaschinen-Hangars

Sehr geehrte Frau Saubermann

Wir danken für Ihre Anfrage und unterbreiten Ihnen gerne das gewünschte Angebot:

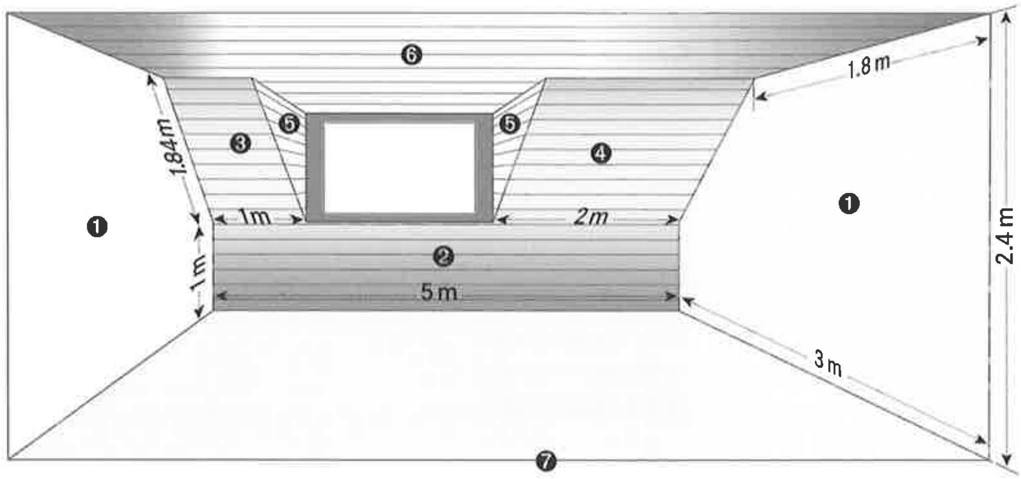
2 Seitenwände aussen	à 83.7 m^2	=	167.4 m^2	
1 Rückwand aussen	à 144 m^2	=	144.0 m^2	
Zu erneuernde Fläche total			311.4 m^2	
Arbeitskosten				
Pauschal	Fr. 25.– / m^2	x	311.4 m^2	= Fr. 7 785.--
zuzüglich 7.6% MwSt	von Fr. 7785.–			= Fr. 591.65
				Fr. 8 376.65
Materialkosten				
Vollabrieb (Fr. 1.50/kg, 3kg/m^2)	Fr. 4.50.–/m^2	x	311.4 m^2	= Fr. 1 401.30
Abdecknetz für Holzdreiecke	Fr. 25.–/m^2	x 2 x	1.92 m^2	= Fr. 96.00
zuzüglich 7.6% MwSt	von Fr. 1 497.30.–			= Fr. 113.80
				Fr. 1 611.10
Renovation Baumaschinen-Hangar total				**Fr. 9 987.75**

Zahlungskonditionen: Innerhalb von 10 Tagen mit 2% Skonto oder in 30 Tagen ohne Abzug.
Das vorstehende Angebot ist bis zum 9. Juli 2004 gültig.

Wir würden uns freuen, diese Arbeiten für Sie ausführen zu dürfen und verbleiben
mit freundlichen Grüssen

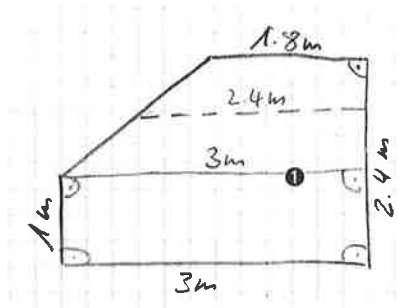
Baugeschäft MiTiFre & Co

E1115



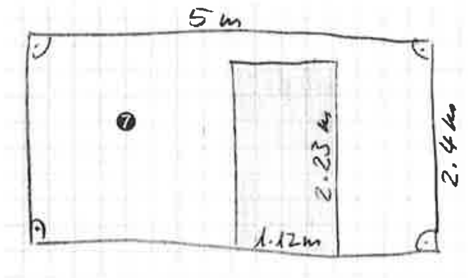
Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

Weiss zu streichende Fläche



❶ Zwei kongruente Seitenwände:
Zur Berechnung können die beiden Seitenwände je in ein Rechteck und ein rechtwinkliges Trapez zerlegt werden – beispielsweise so wie nebenan.

A❶ = A□ + A⏢
= 3 m · 1 m + 2.4 m · 1.4 m = 6.36 m^2
2 · A❶ ≈ 12.7 m^2



❼ Vorderwand:
Wand und auszusparende Türe sind Rechtecke.

A❼ = A□ – $A_{Türe}$
= 5 m · 2.4 m – 1.12 m · 2.23 m
= 9.5024 m^2 **≈ 9.5 m^2**

Die weiss zu streichende Fläche beträgt insgesamt 12.7 m^2 + 9.5 m^2 = **22.2 m^2**

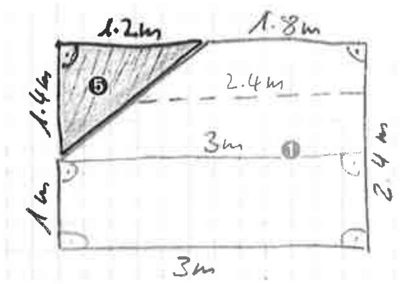
Täferfläche, die abgelaugt und lasiert werden soll

❷ Teil unter dem Fenster: Rechteck, 5 m Breite, 1 m Höhe

A❷ = 5 m · 1 m = **5 m^2**

❸ & ❹ Schräg verlaufende Teile neben dem Fenster:
Beide Teile sind Rechtecke in der Höhe von 1.84 m und der Breite 1 m bzw. 2 m.

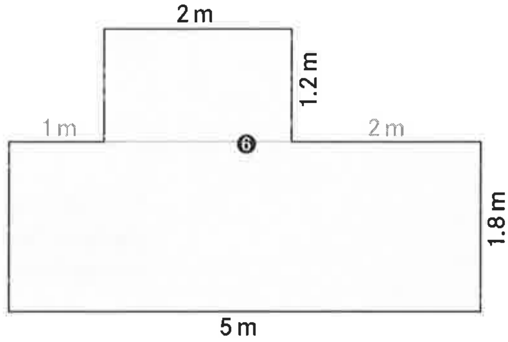
A❸ = 1 m · 1.84 m = 1.84 m^2 **≈ 1.8 m^2**
A❹ = 2 m · 1.84 m = 3.68 m^2 **≈ 3.7 m^2**



❺ Teile beidseits des Fensters:
Diese beiden abgeschrägten Teile sind zwei kongruente, rechtwinklige Dreiecke. Sie ergänzen die Seitenwände zum Rechteck.

A❺ = 1.4 m · 1.2 m : 2 = 0.84 m^2
2 · A❺ ≈ 1.7 m^2

❻ Decke:
Die Decke besteht aus zwei rechteckigen Teilen.

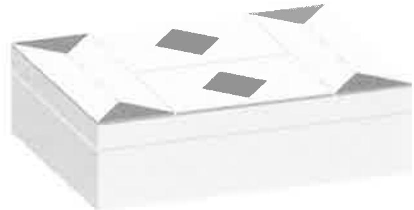


$A_{❻}$ = 5 m · 1.8 m + 2 m · 1.2 m
= **11.4 m²**

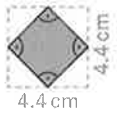
Die Täferfläche beträgt insgesamt
$5\,m^2 + 1.8\,m^2 + 3.7\,m^2 + 1.7\,m^2 + 11.4\,m^2$
= **23.6 m²**

E1116 a Grosse Schachtel

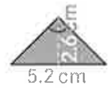
Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

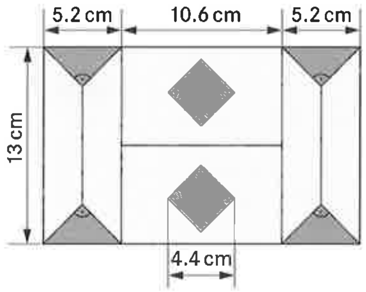


Dunkle Quadrate:
Diese haben je eine Fläche von
$A_{\square} = 4.4\,cm \cdot 4.4\,cm : 2 = \mathbf{9.68\,cm^2}$



Dunkle Dreiecke:
Diese haben je eine Fläche von
$A_{\triangle} = 5.2\,cm \cdot 2.6\,cm : 2 = \mathbf{6.76\,cm^2}$
oder:
4 dunkle Dreiecke ergeben zusammen ein Quadrat mit der Seitenlänge 5.2 cm.

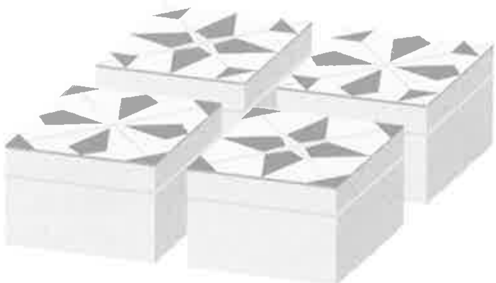




Dunkle Teile insgesamt:
$A_{dunkel\text{-}1} = 2 \cdot A_{\square} + 4 \cdot A_{\triangle}$
$= 2 \cdot 9.68\,cm^2 + 4 \cdot 6.76\,cm^2$
$= \mathbf{46.4\,cm^2}$

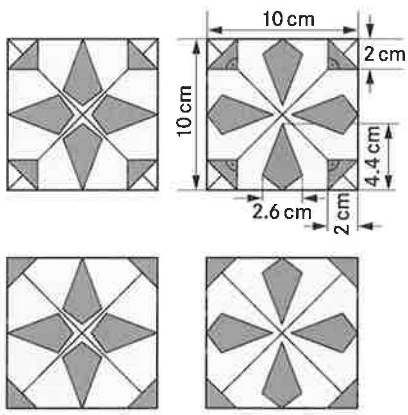
Helle Teile insgesamt:
$A_{hell\text{-}1} = A_{\square} - A_{dunkel}$
$= 21\,cm \cdot 13\,cm - 46.4\,cm^2$
$= \mathbf{226.6\,cm^2}$

Kleine Schachteln
Die vier kleinen Schachteln sind alle aus den gleichen Teilen hergestellt.



Dunkle Drachenvierecke:
Diese haben je eine Fläche von
$A_{\diamond} = 2.6\,cm \cdot 4.4\,cm : 2$
$= \mathbf{5.72\,cm^2}$

Dunkle Dreiecke:
Diese haben je eine Fläche von
$A_{\triangle} = 2\,cm \cdot 2\,cm : 2$
$= \mathbf{2\,cm^2}$



Dunkle Teile insgesamt für eine Schachtel:
$A_{dunkel\text{-}2} = 4 \cdot A_{\diamond} + 4 \cdot A_{\triangle}$
$= 4 \cdot 5.72\,cm^2 + 4 \cdot 2\,cm^2$
$= \mathbf{30.88\,cm^2}$

Helle Teile insgesamt für eine Schachtel:
$A_{hell\text{-}2} = A_{\square} - A_{dunkel}$
$= 100\,cm^2 - 30.88\,cm^2$
$= \mathbf{69.12\,cm^2}$

→

→ **5-er-Serie**

Für eine 5-er-Serie braucht es:

$\mathbf{A_{dunkel}} = A_{dunkel\text{-}1} + 4 \cdot A_{dunkel\text{-}2}$
$= 46.4\,cm^2 + 4 \cdot 30.88\,cm^2 = \mathbf{169.92\,cm^2}$

$\mathbf{A_{hell}} = A_{hell\text{-}1} + 4 \cdot A_{hell\text{-}2}$
$= 226.6\,cm^2 + 4 \cdot 69.12\,cm^2 = \mathbf{503.08\,cm^2}$

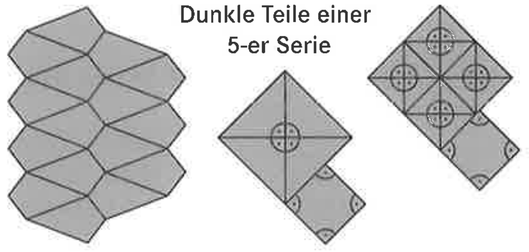
Für 2 000 Schachteln jeder Sorte muss somit bestellt werden:

Dunkles Furnierholz:	$2000 \cdot 169.92\,cm^2 = 339\,840\,cm^2$	$\approx$ **34 m²**
Helles Furnierholz:	$2000 \cdot 503.08\,cm^2 = 1\,006\,160\,cm^2$	$\approx$ **101 m²**

b) Nein, ganz ohne Abfall lassen sich die dunklen Formen nicht aussägen.

Die Drachenvierecke lassen sich zwar parkettieren, sie bieten aber keine Anschlussmöglichkeit für die rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke und die Quadrate.

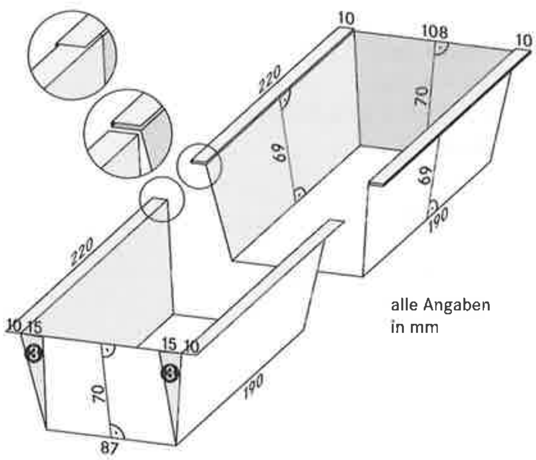
Dunkle Teile einer 5-er Serie



Die Dreiecke und Quadrate haben zudem unterschiedliche Grössen. Mindestens am Rand der 1 m² grossen Platte gibt es deshalb Abfall.

Zu dieser Aufgabe gibt es hinten eine Kopiervorlage.

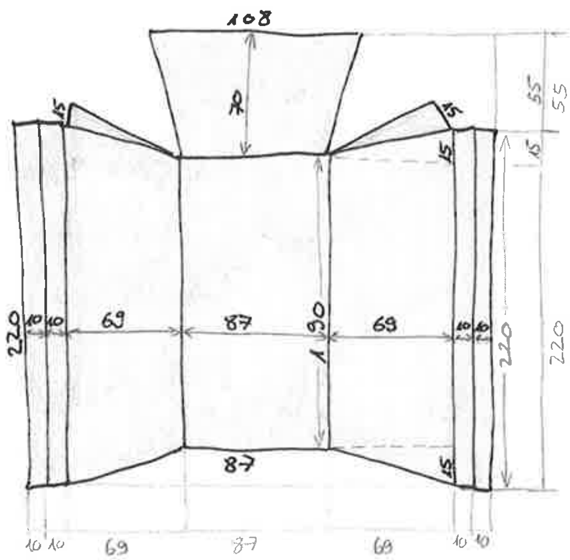
E1117 a)



alle Angaben in mm

Die Dreiecke ❸ an der Frontseite sind Verbindungsdreiecke für die Längswände mit der Querwand; sie verlaufen über dem Blech der Querwand.

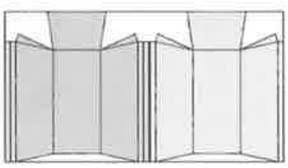
Die Form der Längswand lässt sich der räumlichen Darstellung nicht zweifelsfrei entnehmen.
Da sich die Kuchenbackform aber nahtlos zusammenschieben lässt, müssen die beiden Längswände **gleichschenklige** Trapeze sein.



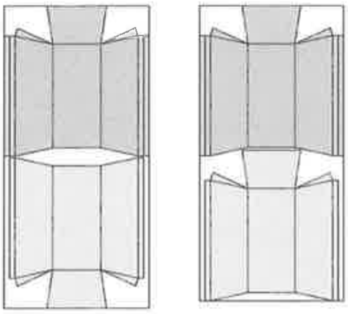
Aus der Skizze lässt sich ersehen, dass für die **«hintere» Hälfte** der Kuchenbackform ein rechteckiges Stück Blech mit den Mindestmassen
$2 \cdot 10 + 69 + 87 + 69 + 2 \cdot 10 = 265$
$220 + 55 = 275$
also
265 mm x 275 mm nötig ist.

Beim **«vorderen Teil»** fallen 2 x 10 mm Randschienen weg:
245 mm x 275 mm.

Gesamte Form



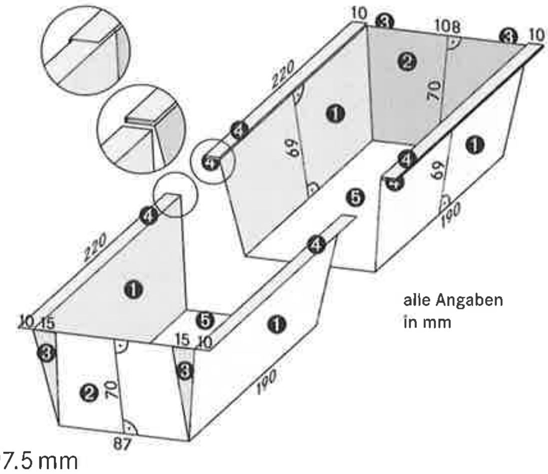
Setzt man die beiden Hälften **nebeneinander**, so benötigt man für die gesamte Form ein Blech mit den Mindestmassen:
510 mm x 275 mm



Setzt man die beiden Hälften **übereinander**, so braucht es weniger Platz, wenn man die beiden Hälften verschiebt, als wenn man sie spiegelt.

In der ersten Anordnung links braucht es ein Blech mit den Mindestmassen **265 mm x 550 mm**.

Um die Grösse des Blechs in der zweiten Anordnung zu finden, ist eine genaue Planzeichnung nötig.
Es sind mindestens: **265 mm x 538 mm**.



b Fläche der Kuchenbackform

❶ Längswand, 4-mal:
Trapez, Parallelseiten 190 mm und 220 mm, Höhe 69 mm,
Mittellinie = 205 mm
$A_❶$ = 205 mm · 69 mm = **14 145 mm²**

❷ Querwand, 2-mal:
Trapez, Parallelseiten 87 mm und 108 mm (hinten angeschrieben),
Höhe 70 mm,
Mittellinie = (87 mm + 108 mm) : 2 = 97.5 mm
$A_❷$ = 97.5 mm · 70 mm = **6 825 mm²**

❸ Verbindungslaschen, 4-mal:
Dreieck, Seite 15 mm, zugehörige Höhe 70 mm
$A_❸$ = 15 mm · 70 mm : 2 = **525 mm²**

❹ Rand / Steckschiene, **6**-mal:
Rechteck mit der Breite 10 mm und der Länge 220 mm
$A_❹$ = 10 mm · 220 mm = **2 200 mm²**

❺ Boden, 2-mal:
Rechteck mit der Breite 87 mm und der Länge 190 mm
$A_❺$ = 87 mm · 190 mm = **16 530 mm²**

Gesamtfläche des Netzes der Kuchenbackform:
A_{Form} = 4 · $A_❶$ + 2 · $A_❷$ + 4 · $A_❸$ + 6 · $A_❹$ + 2 · $A_❺$
= (4 · 14 145 + 2 · 6 825 + 4 · 525 + 6 · 2 200 + 2 · 16 530) mm² = **118 590 mm² ≈ 11.9 dm²**

Abfall für Blech von:	**510 mm x 275 mm**	**265 mm x 550 mm**	**265 mm x 538 mm**
Gesamtfläche Blech:	140 250 mm²	145 750 mm²	142 570 mm²
Gesamtfläche Backform:	118 590 mm²	118 590 mm²	118 590 mm²
Abfall pro Blech und Form:	**21 660 mm²**	**27 160 mm²**	**23 980 mm²**

c Wir tauschen einen feinen Kuchen gegen gute Optimierungsvorschläge!

E1118 a Möglicher Lösungsweg 1: Mit Bruchteilen und Vielfachen

$A_{\text{Gesamt}\square} = 400\,\text{cm}^2$

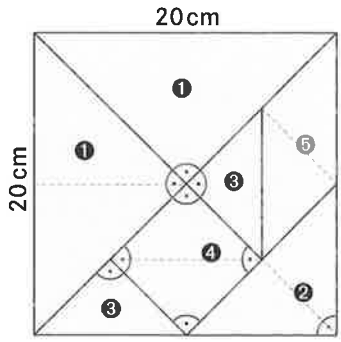
A△❶ $= \frac{1}{4} \cdot A_{\text{Gesamt}\square} = 100\,\text{cm}^2$

A△❷ $= \frac{1}{2} \cdot$ A△❶ $= 50\,\text{cm}^2$

A△❸ $= \frac{1}{2} \cdot$ A△❷ $= 25\,\text{cm}^2$

A□❹ $= 2 \cdot$ A△❸ $= 50\,\text{cm}^2$

A▱❺ $= 2 \cdot$ A△❸ $= 50\,\text{cm}^2$



Möglicher Lösungsweg 2: Rechnen

$A_{\text{Gesamt}\square} = 400\,\text{cm}^2$

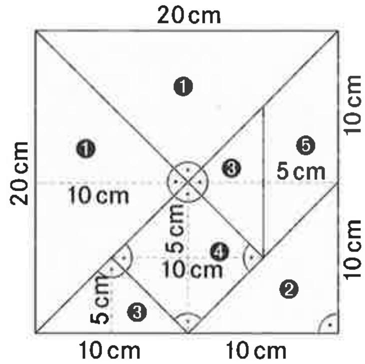
A△❶ $= 20\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} : 2 = 100\,\text{cm}^2$

A△❷ $= 10\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} : 2 = 50\,\text{cm}^2$

A△❸ $= 10\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} : 2 = 25\,\text{cm}^2$

A□❹ $= 10\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} : 2 = 50\,\text{cm}^2$

A▱❺ $= 10\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 50\,\text{cm}^2$



b Möglicher Lösungsweg 1: Mit Bruchteilen und Vielfachen

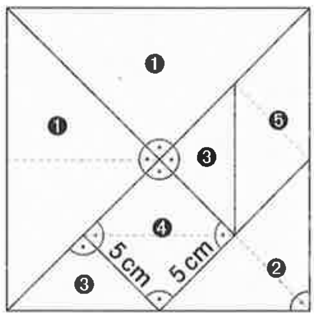
A□❹ $= 5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 25\,\text{cm}^2$

A△❸ $= \frac{1}{2} \cdot$ A□❹ $= 12.5\,\text{cm}^2$

A△❷ $= 2 \cdot$ A△❸ $= 25\,\text{cm}^2$

A▱❺ $= 2 \cdot$ A△❸ $= 25\,\text{cm}^2$

A△❶ $= 2 \cdot$ A△❷ $= 50\,\text{cm}^2$



Möglicher Lösungsweg 2: Rechnen

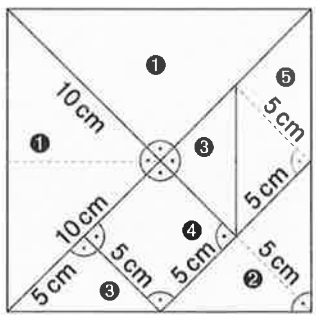
A□❹ $= 5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 25\,\text{cm}^2$

A△❸ $= 5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} : 2 = 12.5\,\text{cm}^2$

A△❷ $= 10\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} : 2 = 25\,\text{cm}^2$

A△❶ $= 10\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} : 2 = 50\,\text{cm}^2$

A▱❺ $= 5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} = 25\,\text{cm}^2$



E1119 a) Rhomboid ABCD

a = 10 cm   b = 5 cm h_b = 6 cm h_a = ?   A = ?

A $= b \cdot h_b$
$= 5\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = \mathbf{30\,cm^2}$

A $= a \cdot h_a$
$\mathbf{h_a} = A : a$
$= 30\,\text{cm}^2 : 10\,\text{cm} = \mathbf{3\,cm}$

b) Trapez ABCD

a = 22 dm   c = 8 dm   h = 7 dm   m = ?   A = ?

m $= (a+c) : 2$
$= (22\,\text{dm} + 8\,\text{dm}) : 2 = \mathbf{15\,dm}$

A $= m \cdot h$
$= 15\,\text{dm} \cdot 7\,\text{dm} = \mathbf{105\,dm^2}$

c) Dreieck ABC

b = 7.5 cm   c = 9 cm h_c = 5 cm h_b = ?   A = ?

A $= c \cdot h_c : 2$
$= 9\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm} : 2 = \mathbf{22.5\,cm^2}$

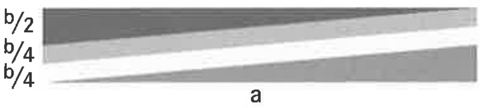
A $= b \cdot h_b : 2$
$\mathbf{h_b} = 2 \cdot A : b$
$= 45\,\text{cm}^2 : 7.5\,\text{cm} = \mathbf{6\,cm}$

d) Drachenviereck ABCD

AC = e = 9 cm   A = 36 cm²   BD = f = ?

A $= AC \cdot BD : 2$
BD $= 2 \cdot A : AC$
$= 72\,\text{cm}^2 : 9\,\text{cm} = \mathbf{8\,cm}$

E1120



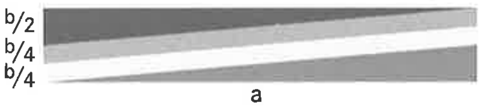
Begründungen mit Formeln

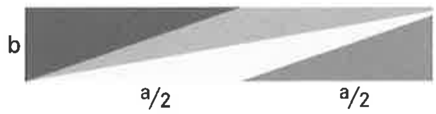
Links:

Rechteck	$a \cdot b$	$= ab$
Dreiecke	$\frac{b}{2} \cdot a : 2$	$= \frac{ab}{4}$
Rhomboide	$\frac{b}{4} \cdot a$	$= \frac{ab}{4}$

Rechts:

Rechteck	$a \cdot b$	$= ab$
Eck-Dreiecke	$\frac{a}{2} \cdot b : 2$	$= \frac{ab}{4}$
Mittel-Dreiecke	$\frac{a}{2} \cdot b : 2$	$= \frac{ab}{4}$





Eine Auswahl möglicher Begründungen ohne Formeln

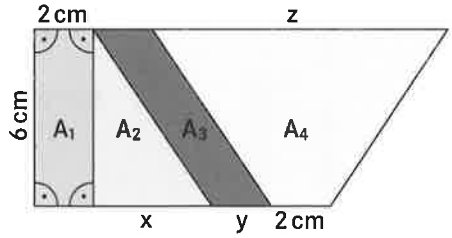
Links 1: Die beiden Dreiecke sind gleich gross. Die beiden Rhomboide sind ebenfalls gleich gross. Beide Rhomboide zusammen sind doppelt so gross wie ein Dreieck (gleiche Höhe, gleich grosse dazugehörige Seite), ein Rhomboid ist also gleich gross wie ein Dreieck.

Links 2: Ein Dreieck belegt einen Viertel der Rechtecksfläche (eine Seite = Rechtecksbreite, eine Seite = halbe Rechteckshöhe). Ein Rhomboid belegt ebenfalls einen Viertel der Rechtecksfläche; beide Rhomboide zusammen sind nämlich doppelt so gross wie ein Dreieck.

Rechts 1: Ein rechtwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck haben die gleiche Fläche (gleiche Höhe (= Rechteckshöhe) und gleich lange Seite (= halbe Rechtecksbreite)). Zusammen füllen sie das halbe Rechteck.

Rechts 2: Ein rechtwinkliges Dreieck belegt einen Viertel der Rechtecksfläche (Seite = halbe Rechtecksbreite, Höhe = Rechteckshöhe). Ein stumpfwinkliges Dreieck belegt ebenfalls einen Viertel der Rechtecksfläche (Höhe = Rechteckshöhe, Seite = halbe Rechtecksbreite).

E1121 $A_1 = A_2 = A_3$ $A_4 = 3 \cdot A_1$



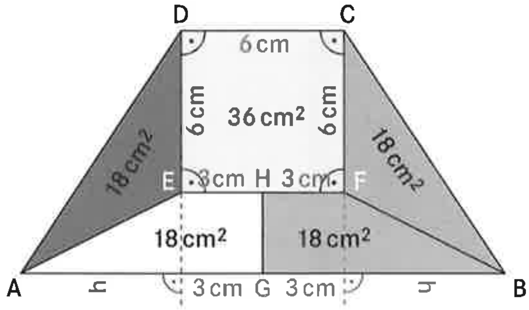
$\mathbf{A_1} = 6\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} = \mathbf{12\,cm^2}$

$\mathbf{A_2} = A_1 = \mathbf{12\,cm^2}$
Dreieck: Seite x, Höhe 6 cm
$x \cdot 6\,\text{cm} : 2 = 12\,\text{cm}^2 \quad | \cdot 2$
$x \cdot 6\,\text{cm} = 24\,\text{cm}^2 \quad | : 6\,\text{cm}$
$\mathbf{x = 4\,cm}$

$\mathbf{A_3} = A_1 = \mathbf{12\,cm^2}$
Rhomboid: Seite y, Höhe 6 cm
$y \cdot 6\,\text{cm} = 12\,\text{cm}^2 \quad | : 6\,\text{cm}$
$\mathbf{y = 2\,cm}$

$\mathbf{A_4} = 3 \cdot A_1 = \mathbf{36\,cm^2}$
Trapez: Seiten 2 cm und z, Höhe 6 cm, Mittellinie m
$m \cdot 6\,\text{cm} = 36\,\text{cm}^2 \quad | : 6\,\text{cm}$
$m = 6\,\text{cm}$
untere Seite 2 cm, $m = 6\,\text{cm} \Rightarrow \mathbf{z = 10\,cm}$

E1122 $A_{EFCD} = 36\,\text{cm}^2 \Rightarrow \mathbf{CD = 6\,cm}$, $ED = 6\,\text{cm}$

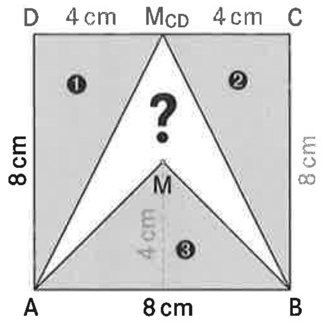


Dreieck AED bzw. FBC
Seite ED = 6 cm, zugehörige Höhe h
$6\,\text{cm} \cdot h : 2 = 18\,\text{cm}^2 \quad | \cdot 2$
$6\,\text{cm} \cdot h = 36\,\text{cm}^2 \quad | : 6\,\text{cm}$
$h = 6\,\text{cm}$

Trapez AGHE bzw. GBFH
$AG = h + 3\,\text{cm} = 6\,\text{cm} + 3\,\text{cm} = 9\,\text{cm}$
Mittellinie $m = 6\,\text{cm}$
Höhe GH $6\,\text{cm} \cdot GH = 18\,\text{cm}^2 \quad | : 6\,\text{cm}$
$GH = 3\,\text{cm}$

AB $= 2 \cdot AG = \mathbf{18\,cm}$
Höhe des Trapezes ABCD $= GH + ED = 3\,\text{cm} + 6\,\text{cm} = \mathbf{9\,cm}$

E1123 **Lösungsweg 1: Gelbe Fläche = □ – △❶ – △❷ – △❸**

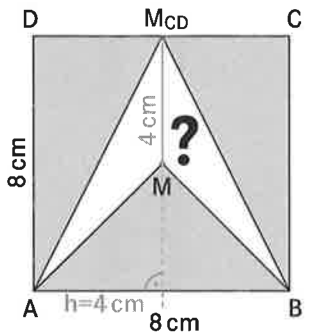


A□ $= 8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} = 64\,\text{cm}^2$

A△❶ $= 8\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} : 2 = 16\,\text{cm}^2$
A△❷ $= 8\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} : 2 = 16\,\text{cm}^2$
A△❸ $= 8\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} : 2 = 16\,\text{cm}^2$

$\mathbf{A_{Gelb}}$ = A□ – A△❶ – A△❷ – A△❸ = $\mathbf{16\,cm^2}$

Lösungsweg 2: Gelbe Fläche = 2 · Dreieck $\mathbf{AMM_{CD}}$



Dreieck AMM_{CD}
Seite $MM_{CD} = 4\,\text{cm}$, Höhe $h = 4\,\text{cm}$
$\mathbf{A_{AMM_{CD}}} = 4\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} : 2 = \mathbf{8\,cm^2}$

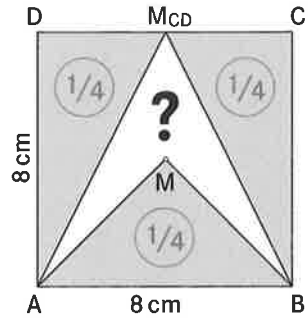
$\mathbf{A_{Gelb}} = 2 \cdot A_{AMM_{CD}} = \mathbf{16\,cm^2}$

→ **Lösungsweg 3: Anteile am Quadrat**

Die rechtwinkligen Dreiecke belegen je einen Viertel der Quadratfläche (einmal ganze Seite, einmal halbe Seite).

Das untere Dreieck füllt ebenfalls einen Viertel der Quadratfläche aus.

Die gelbe Fläche entspricht demnach ebenfalls einem Viertel der Quadratfläche: $A_{Gelb} = A_{Quadrat} : 4 =$ **16 cm²**



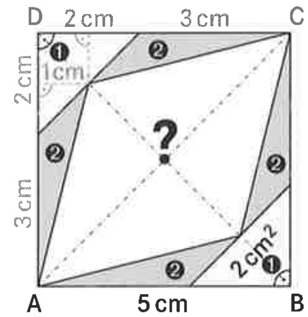
E1124 Gelbe Fläche = Quadrat – 2 · Dreieck ❶ – 4 · Dreieck ❷

Quadrat $A\square = 5\,cm \cdot 5\,cm =$ **25 cm²**

Dreieck ❶ $A\triangle_1 =$ **2 cm²**
Quadratfläche = 4 cm² ⇒ Seite = 2 cm

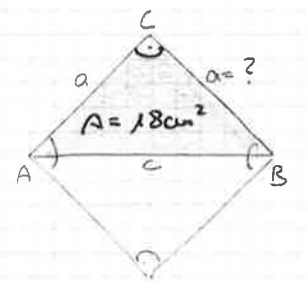
Dreieck ❷ Seite = 3 cm, Höhe = 1 cm (Mittellinie in △❶)
$A\triangle_2 = 3\,cm \cdot 1\,cm : 2 =$ **1.5 cm²**

$A_{Gelb} = A\square - 2 \cdot A\triangle_1 - 4 \cdot A\triangle_2$
$= 25\,cm^2 - 4\,cm^2 - 6\,cm^2 =$ **15 cm²**



E1125 **a** $A = 18\,cm^2$ $a = ?$

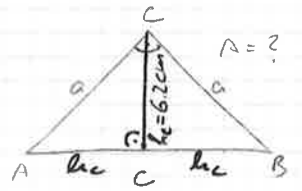
$a^2 = 2 \cdot A$
$a^2 = 36\,cm^2$
a = 6 cm



b $h_c = 6.2\,cm$ $A = ?$

$c = 2 \cdot h_c = 12.4\,cm$

A $= c \cdot h_c : 2 = 12.4\,cm \cdot 6.2\,cm : 2 =$ **38.44 cm²**

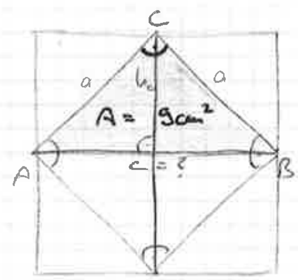


c $A = 9\,cm^2$ $c = ?$ $h_c = ?$

$c^2 = 4 \cdot A$
$c^2 = 36\,cm^2$
c = 6 cm $\quad$ $h_c = \frac{c}{2} =$ **3 cm**

oder formal:

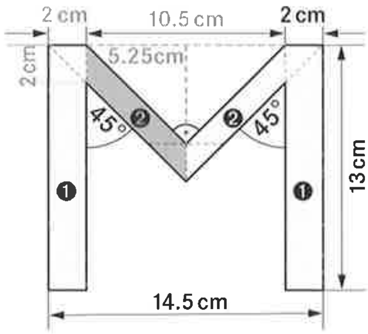
$c \cdot h_c : 2 = A$	$\mid \cdot 2$
$c \cdot h_c = 2 \cdot A$	$\mid c = 2 \cdot h_c$
$2 \cdot h_c \cdot h_c = 2 \cdot A$	$\mid : 2$
$h_c \cdot h_c = A$	$\mid A = 9\,cm^2$
$h_c \cdot h_c = 9\,cm^2$	
$h_c =$ **3 cm**	$c = 2 \cdot h_c =$ **6 cm**



→

E1126 Bei dieser Aufgabe sind ganz verschiedene Lösungswege möglich. Grundsätzlich gilt: Wer mehr überlegt muss weniger rechnen. 3 Beispiele

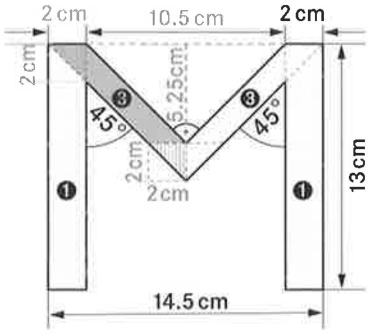
Lösungsweg 1:
M-Fläche = 2·Rechteck❶ + 2·Rhomboid❷



A□❶ = 2 cm · 13 cm = 26 cm^2
A▱❷ = 2 cm · 5.25 cm = 10.5 cm^2

A$_M$ = 2 · A□❶ + 2 · A▱❷
= 52 cm^2 + 21 cm^2 = **73 cm^2**

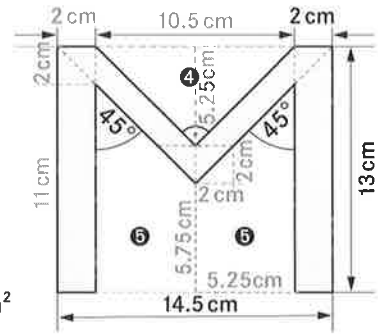
Lösungsweg 2:
M-Fläche = 2·Rechteck❶ + 2·Rhomboid❸
Das kleine schraffierte Dreieck wird oben doppelt berechnet. Da es zum Dreieck in der Spitze unten kongruent ist, muss es nicht weggezählt werden.



A□❶ = 2 cm · 13 cm = 26 cm^2
A▱❸ = 2 cm · 5.25 cm = 10.5 cm^2

A$_M$ = 2·A□❶ + 2·A▱❸
= 52 cm^2 + 21 cm^2 = **73 cm^2**

Lösungsweg 3:
M-Fläche = grosses Rechteck – Dreieck❹ – 2·Trapez❺

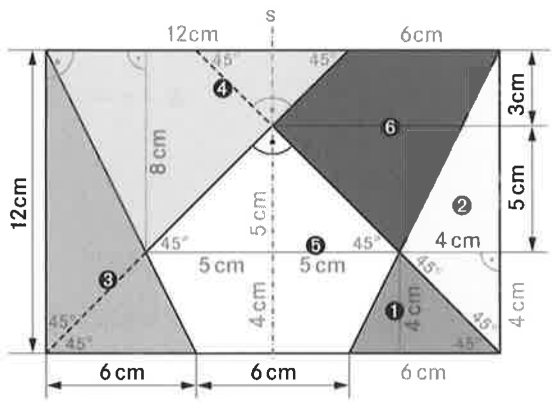


A□$_{gross}$ = 14.5 cm · 13 cm = 188.5 cm^2

A△❹ = 10.5 cm · 5.25 cm : 2 = 27.5625 cm^2
A⏢❺ = (11 cm + 5.75) : 2 · 5.25 cm = 43.96875 cm^2

A$_M$ = A□$_{gross}$ – A△❹ – 2 · A⏢❺
= 188.5 cm^2 – 27.5625 cm^2 – 87.9375 cm^2 = **73 cm^2**

E1127 **Möglicher Lösungsweg:**



Zuerst alle Grössen und alle 45°-Winkel anschreiben. Gut darauf achten, wo rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke sind.

❶ Dreieck: Seite 6 cm, zugehörige Höhe 4 cm

A❶ = 6 cm · 4 cm : 2
= **12 cm^2**

❷ Dreieck: Seite 12 cm, zugehörige Höhe 4 cm

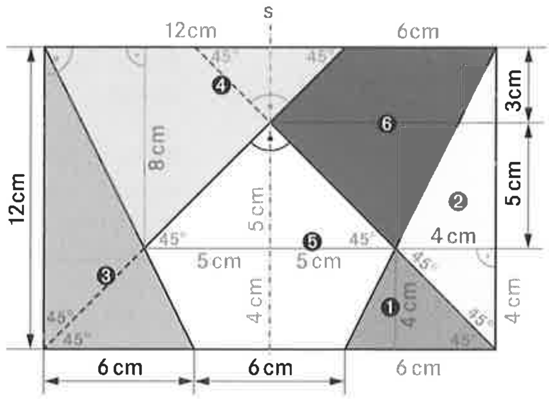
A❷ = 12 cm · 4 cm : 2 = **24 cm^2**

❸ Dreieck: rechtwinklig, 1. Seite 6 cm, 2. Seite 12 cm

A❸ = 6 cm · 12 cm : 2 = **36 cm^2**

→ ❹ Dreieck: Seite 12 cm, zugehörige Höhe 8 cm

$A_{❹}$ = 12 cm · 8 cm : 2
= **48 cm²**



❺ Fünfeck: setzt sich zusammen aus einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck, Höhe 5 cm und einem Trapez, Höhe 4 cm
Parallelseiten 6 cm und 10 cm ⇒ Mittellinie 8 cm

$A_\triangle$ = 2·5 cm · 5 cm : 2 = 25 cm²
A_{Trapez} = 8 cm · 4 cm = 32 cm²

$A_{❺}$ = $A_\triangle$ + A_{Trapez} = **57 cm²**

❻ Viereck: Beispielsweise Dreieck❹ minus kleines rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck oben in der Mitte.

$A_{\triangle ❹}$ = = 48 cm²
$A_{\triangle \text{klein}}$ = 6 cm · 3 cm : 2 = 9 cm²

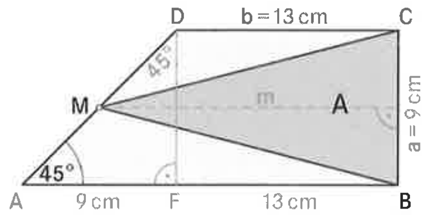
$A_{❻}$ = $A_{\triangle ❹}$ – $A_{\triangle \text{klein}}$ = **39 cm²**

Kontrolle: A_{Rechteck} = 18 cm · 12 cm = 216 cm²

$A_{❶} + A_{❷} + A_{❸} + A_{❹} + A_{❺} + A_{❻}$ =
12 cm² + 24 cm² + 36 cm² + 48 cm² + 57 cm² + 39 cm² = 216 cm² ✓

E1128 **a** a = 9 cm, b = 13 cm

Das Dreieck AFD ist rechtwinklig-gleichschenklig.
Also:
AF = FD = 9 cm, ⇒ AB = 22 cm

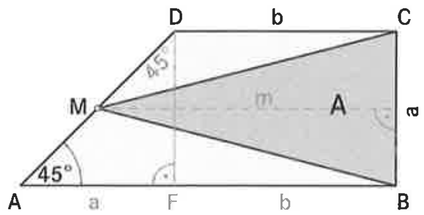


Mittellinie m = (22 cm + 13 cm) : 2 = 17.5 cm

m ist zugleich Höhe im Dreieck BCM

A_{BCM} = 9 cm · 17.5 cm : 2 = **78.75 cm²**

b AF = FD = a, FB = b und AB = a + b



Mittellinie m = ((a + b) + b) : 2 = (a + 2b) : 2

$m = \frac{a + 2b}{2}$

A_{BCM} = a · ((a + 2b) : 2) : 2 = **(a² + 2ab) : 4**

oder

A_{BCM} $= a \cdot \frac{a + 2b}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{a^2 + 2ab}{4}}$

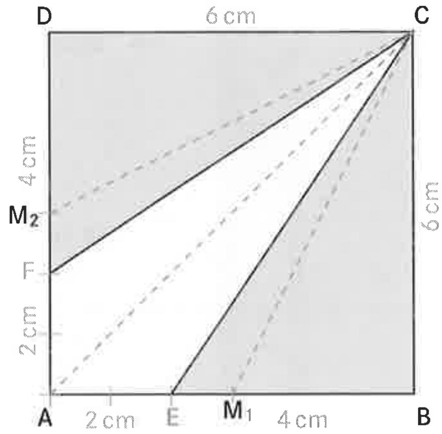
→

Diese Aufgabe lässt sich für die Spur I gut als Knobelaufgabe stellen.

E1129 a) Lösungsweg ohne zu rechnen

Das Quadrat lässt sich problemlos in 4 gleich grosse Teile AM_1C, M_1BC, ACM_2 und M_2CD zerlegen.

Da nur 3 Teile erwünscht sind, muss jeder dieser 3 Teile um einen Drittel des 4. Teils vergrössert werden.
Wir schlagen deshalb einen Drittel von AM_1C dem Dreieck M_1BC zu und erhalten so $\triangle EBC$.
Auf die gleiche Art gelangen wir zu $\triangle FCD$.



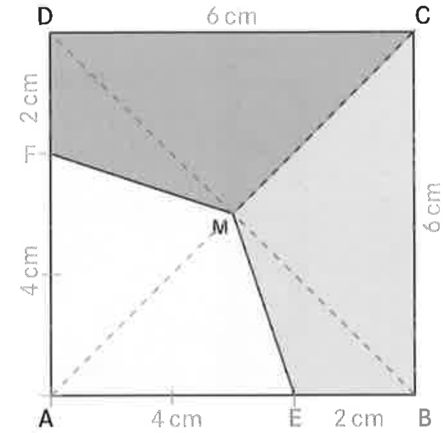
Lösungsweg mit Rechnen

$A_{ABCD} = 6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} = 36\,\text{cm}^2$
Ein Drittel davon ist $12\,\text{cm}^2$.
Ein Eckdreieck von C aus muss also die Abmessungen 6 cm und 4 cm haben.

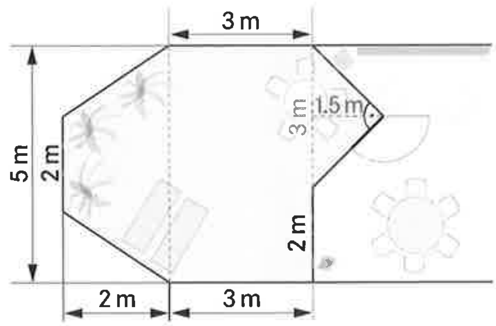
b) Lösungsweg ohne zu rechnen

Durch die beiden Diagonalen wird das Quadrat in 4 flächengleiche Dreiecke zerlegt.

Da auch hier nur 3 Teile erwünscht sind, muss wiederum jeder dieser 3 Teile um einen Drittel des 4. Teils vergrössert werden.
Wir schlagen beispielsweise einen Drittel des Dreiecks ABM dem Dreieck BCM zu und erhalten so das Viereck EBCM.
Auf die gleiche Art erhalten wir das Viereck FMCD.



E1130 Wir berechnen zuerst die Fläche der Terrasse.



Terrasse = Rechteck + Dreieck + Trapez

Rechteck: Breite 3 m, Höhe 5 m
$A_{\square} = 3\,\text{m} \cdot 5\,\text{m} = \mathbf{15\,m^2}$

Dreieck: rechtwinklig-gleichschenklig
Seite 3 m, Höhe 1.5 m
$A_{\triangle} = 3\,\text{m} \cdot 1.5\,\text{m} : 2 = \mathbf{2.25\,m^2}$

Trapez: Höhe 2 m
Parallelseiten 5 m und 2 m $\Rightarrow$ Mittellinie 3.5 m

$A_{⏢} = 3.5\,\text{m} \cdot 2\,\text{m} = \mathbf{7\,m^2}$

$A_{\text{Terrasse}} = A_{\square} + A_{\triangle} + A_{⏢} = 15\,\text{m}^2 + 2.25\,\text{m}^2 + 7\,\text{m}^2 = \mathbf{24.25\,m^2}$

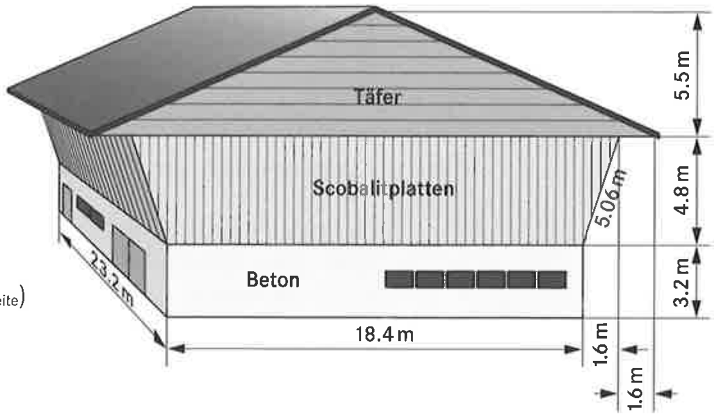
Anzahl Platten

Eine Platte misst 30 cm auf 30 cm, hat also eine Fläche von $900\,\text{cm}^2 = 9\,\text{dm}^2$
Die Terrasse ist $24.25\,\text{m}^2 = 2\,425\,\text{dm}^2$ gross.
Dafür braucht es **mindestens** $2\,425\,\text{dm}^2 : 9\,\text{dm}^2 =$ **270 Platten** (269.44)

Für den Verschnitt 5% (= 1/20) dazu rechnen: 270 + 14 = 284 Platten.
Es wäre **sinnvoll 280 – 285 Platten** zu kaufen.

E1131 Beton

Alle Flächen sind Rechtecke



$A_{\square Front} = 18.4\,m \cdot 3.2\,m$
$= 58.88\,m^2$

$A_{\square Seite} = 23.2\,m \cdot 3.2\,m$
$= 74.24\,m^2$

$\mathbf{A_{Beton}} = 2 \cdot (A_{\square Front} + A_{\square Seite})$
$= \mathbf{266.24\,m^2}$
$\approx \mathbf{266\,m^2}$

Scobalitplatten (Kunststoff, eine Art Glasfasermaterial)

Stirnseite: Trapez, Höhe 4.8 m, Parallelseiten 18.4 m und (18.4 m + 2 · 1.6 m) = 21.6 m $\Rightarrow$
Mittellinie 20 m
$A_{\text{Trapez}\,Scobalit} = 20\,m \cdot 4.8\,m = 96\,m^2$

Seite: Rechteck, Länge 23.2 m, Höhe 5.06 m (rechts Kantenlänge angeschrieben)
$A_{\square Scobalit} = 23.2\,m \cdot 5.06\,m = 117.392\,m^2 = 117.392\,m^2 \approx 117.4\,m^2$

$\mathbf{A_{Scobalit}} = 2 \cdot (A_{\text{Trapez}\,Scobalit} + A_{\square Scobalit}) = \mathbf{426.8\,m^2 \approx 427\,m^2}$

Täfer

Stirnseite: Dreieck, Höhe 5.5 m, Basisseite (18.4 m + 4 · 1.6 m) = 24.8 m
$A_{\triangle Täfer} = 24.8\,m \cdot 5.5\,m : 2 = 68.2\,m^2$

$\mathbf{A_{Täfer}} = 2 \cdot A_{\triangle Täfer} = \mathbf{136.4\,m^2 \approx 136\,m^2}$

E2 Natürliche Flächen bestimmen

E21 Revitalisierung von Flusslandschaften

Das obere Bild (Buch S. 34) zeigt die Limmat bei Geroldswil (unterhalb Zürich) im Frühling 2004. Die Limmat wurde an dieser Stelle Ende des 19. Jahrhunderts in ein schnurgerades Korsett gezwängt. Landgewinnung und Schutz vor Überschwemmungen war damals die Absicht. Als «Kulturwerk und Segen für die Volkswirtschaft» wurde das Bauwerk gelobt.

Interessante Informationen in:

Markus Hostmann
Andreas Knutli

Befreite Wasser

Rotpunktverlag
WWF Schweiz

ISBN:
3-85869-243-3

Das untere Bild zeigt die geplante Revitalisierung auf einer Länge von 800 m. Mit Seitenarmen, Inseln und Kiesbänken soll der Flusslauf im Laufe der Jahre 2004/2005 wieder natürlicher gestaltet werden.

Fast alle unsere Flüsse wurden in der Vergangenheit begradigt und verbaut. Sie sind damit zu Abflussrinnen verkommen, die nur dazu dienen, das Wasser möglichst schnell und ohne Schaden abzuleiten. Auen, natürliche Lebensräume für Fauna und Flora, sind damit weitgehend verschwunden. Hunderte von Pflanzen- und Tierarten sind ausgestorben oder vom Aussterben bedroht.

In den letzten Jahren wurden diese Probleme zunehmend erkannt. Nach und nach werden Flussabschnitte revitalisiert (wiederbelebt) und renaturiert (wieder in eine natürliche Form zurückgeführt, «zurückgebaut»). Sie erhalten damit ihre eigene Dynamik und ihre eigentliche Funktion zurück. Die Natur darf in diesen Flussabschnitten wieder leben.
Gleichzeitig werden damit neue sinnliche Lebensräume für die Menschen geschaffen, die diese Gebiete für Freizeiterlebnisse nutzen können.

Projekte zur Revitalisierung von Flusslandschaften haben es allerdings nicht einfach: Mangel an Geld und gegenläufige Interessen führen oft zu langwierigen Verhandlungen und Verzögerungen. Verschiedenste offizielle Stellen (Bund, Kanton, Gemeinden), Grundeigentümer, Verbände und Interessengemeinschaften (Umweltschutz, Heimatschutz, Vogelschutz und Fischereiverbände, Landwirte, Radfahrer, Wassersportler, Spaziergänger, ...) stellen unterschiedlichste Ansprüche und melden Forderungen an:
- Die einen wollen Natur pur.
- Die andern möchten neue Räume zur individuellen Freizeitgestaltung.
- Die dritten haben Angst vor Hochwasserkatastrophen und Mückeninvasionen.
- Die vierten wollen ihre Landwirtschaftgebiete nicht hergeben oder sind mit den angebotenen neuen Anbauflächen oder Abgeltungen nicht zufrieden.

Revitalisierungs-Projekte müssen deshalb sorgfältig geplant und ökologische Vorteile gegenüber wirtschaftlichen Nachteilen abgewogen werden.

E22

a Eine Melioration muss heute die Interessen von Landwirtschaft, Raumplanung, Natur-, Landschafts- und Umweltschutz berücksichtigen.
Die Interessen der einzelnen Beteiligten (Grundeigentümer, Bund/Kanton/Gemeinden, Verbände und Interessengemeinschaften) sind aber oft gegenläufig (siehe auch **E21**). Die einen wollen mehr Naturschutz, die andern eine profitablere Nutzung.
Streitereien, rechtliche Abklärungen und gerichtliche Verfahren sind deshalb kaum zu vermeiden.

Interessante Informationen unter:

www.umwelt-schweiz.ch/buwal/de/fachgebiete/...

b Bei Landumteilungen geht es in erster Linie darum, Grundeigentum durch **Parzellentausch** zusammenzulegen bzw. vernünftig zu verteilen. Erleichterung der Bewirtschaftung kann dabei genau so gut ein Grund sein, wie die Verwirklichung eines Bauvorhabens oder die Ausscheidung eines Naturschutzgebietes.