J3 Prismen und Zylinder

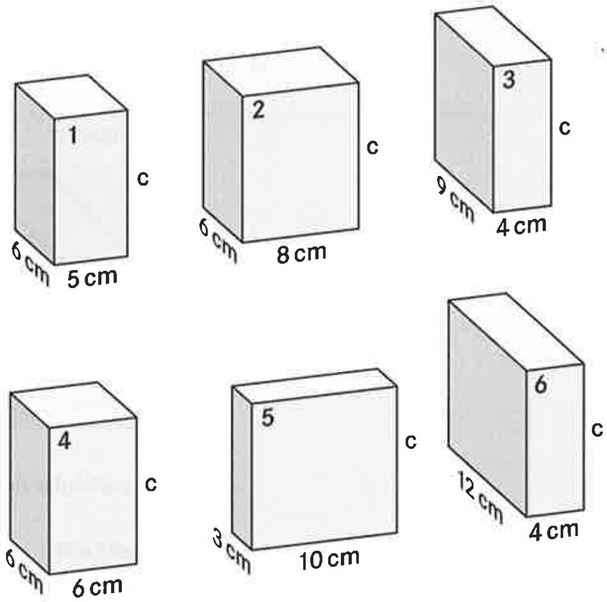
J31 –

J32 **a** Das Volumen eines Quaders berechnet sich aus den 3 Kantenlängen: $V = a \cdot b \cdot c$

Da alle sechs Quader die gleiche Höhe c haben, genügt es, ihre Grundfläche $a \cdot b$ zu vergleichen.

1 $a \cdot b = 6\,cm \cdot 5\,cm = 30\,cm^2$
2 $a \cdot b = 6\,cm \cdot 8\,cm = 48\,cm^2$
3 $a \cdot b = 9\,cm \cdot 4\,cm = 36\,cm^2$
4 $a \cdot b = 6\,cm \cdot 6\,cm = 36\,cm^2$
5 $a \cdot b = 3\,cm \cdot 10\,cm = 30\,cm^2$
6 $a \cdot b = 12\,cm \cdot 4\,cm = 48\,cm^2$

Das gleiche Volumen haben:
1 und 5
2 und 6
3 und 4

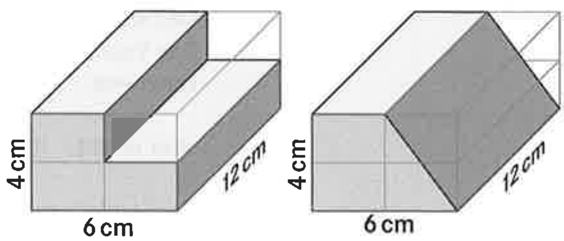


b Das Volumen eines gleich hohen Quaders ist dann gleich gross wie dasjenige der vorgegebenen Quader, wenn seine Grundfläche gleich gross ist.

Es gibt zu jedem Paar **beliebig viele Lösungen**. Einige Beispiele :

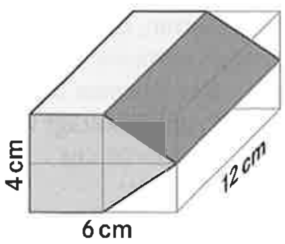
1 und 5	**2 und 6**	**3 und 4**
Grundfläche = $30\,cm^2$	Grundfläche = $48\,cm^2$	Grundfläche = $36\,cm^2$
a = 1 cm, b = 30 cm	a = 1 cm, b = 48 cm	a = 1 cm, b = 36 cm
a = 2 cm, b = 15 cm	a = 2 cm, b = 24 cm	a = 2 cm, b = 18 cm
a = 4 cm, b = 7.5 cm	a = 3 cm, b = 16 cm	a = 5 cm, b = 7.2 cm
a = 8 cm, b = 3.75 cm	a = 5 cm, b = 9.6 cm	a = 8 cm, b = 4.5 cm
a = 12 cm, b = 2.5 cm	a = 10 cm, b = 4.8 cm	a = 10 cm, b = 3.6 cm

J33 **a** Bei den beiden Körpern links ist je ein Viertel des Quaders weggeschnitten worden. Dies ist am einfachsten an der Grundfläche des Prismas sichtbar:

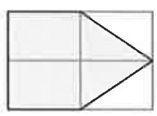


Das Volumen beträgt demnach bei beiden Körpern 3/4 des ganzen Quadervolumens:

$$V_1 = V_2 = \frac{3}{4} \cdot 4\,cm \cdot 6\,cm \cdot 12\,cm = \mathbf{216\,cm^3}$$



Beim dritten Körper wurde zweimal ein Achtel des Quaders weggeschnitten.

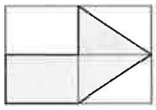


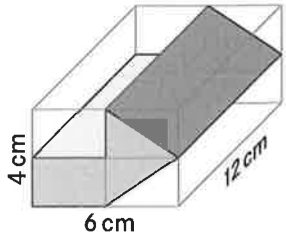
Es bleiben also wieder 3/4 des Quadervolumens übrig:

$$V_3 = \frac{3}{4} \cdot 4\,cm \cdot 6\,cm \cdot 12\,cm = \mathbf{216\,cm^3}$$

→

→ Beim vierten Körper wurde links oben ein Viertel und rechts zwei Achtel des Quaders weggeschnitten, wie die Grundfläche zeigt:



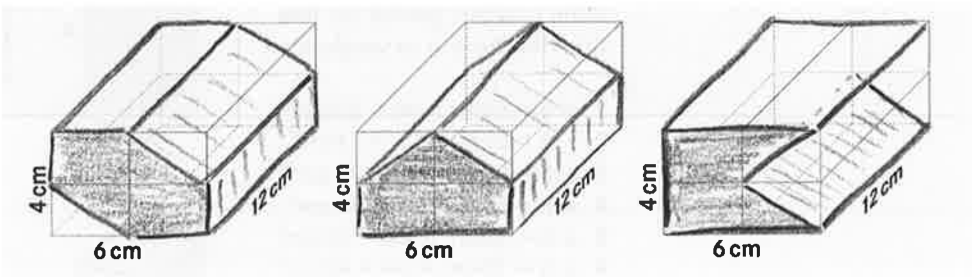


Es bleibt somit die Hälfte des Quadervolumens übrig:

$V_4 = \frac{1}{2} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} = \mathbf{144\,cm^3}$

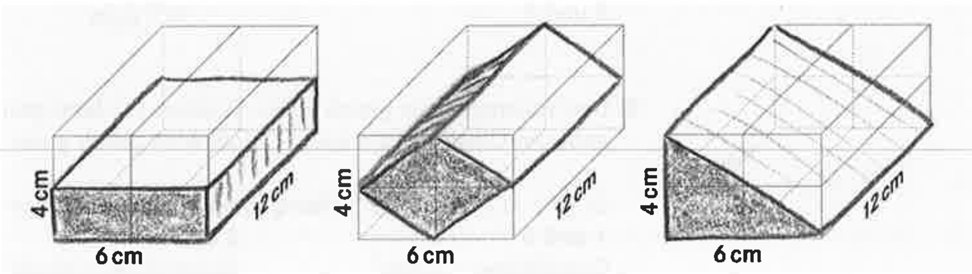
c **1** Die Grundfläche des Prismas muss 3/4 des 4 cm x 6 cm grossen Rechtecks ausfüllen.

Drei Beispiele:



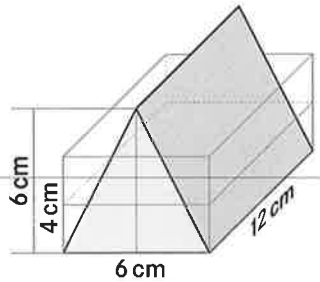
2 Die Grundfläche des Prismas muss die Hälfte des 4 cm x 6 cm grossen Rechtecks ausfüllen.

Drei Beispiele:



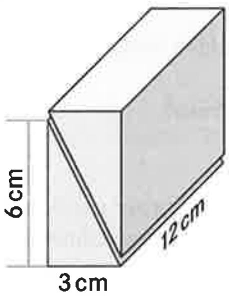
d Die Beispiele oben legen nahe, dass neben der Höhe die Grundfläche massgebend ist für das Volumen.

Die Grundfläche beträgt hier 6 cm · 6 cm : 2 = 18 cm².
Das sind Dreiviertel der Rechtecksfläche.
Das Volumen beträgt somit Dreiviertel des Quadervolumens: $\frac{3}{4} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} = \mathbf{216\,cm^3}$



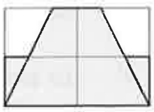
oder direkt: $18\,\text{cm}^2 \cdot 12\,\text{cm} = \mathbf{216\,cm^3}$

Zwei andere mögliche Überlegungen:



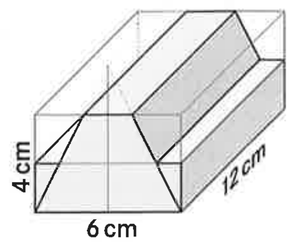
Das Prisma lässt sich senkrecht zerschneiden und zu einem Quader der Grösse 6 cm x 3 cm x 12 cm zusammensetzen.
Dieser Quader hat das Volumen: $6\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} = \mathbf{216\,cm^3}$

Das Prisma lässt sich so zerschneiden und zusammensetzen, dass es Dreiviertel der Rechtecksgrundfläche ausfüllt:

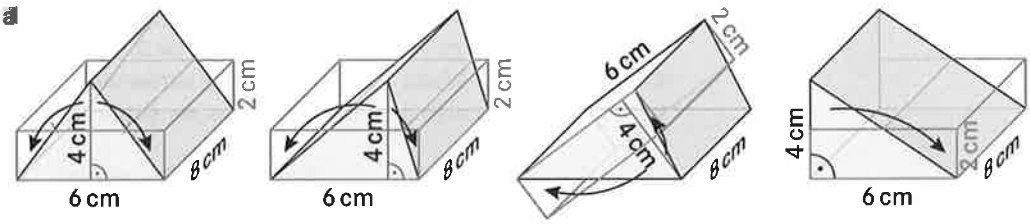


Das Volumen des neuen Prismas beträgt wieder Dreiviertel des Quaders:

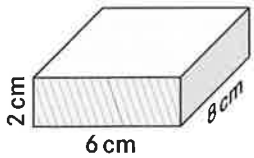
$\frac{3}{4} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} = \mathbf{216\,cm^3}$

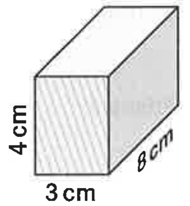


J34 **a**

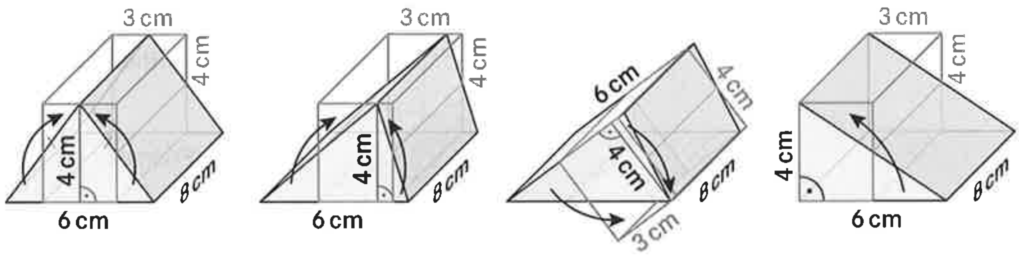


Alle vier dreiseitigen Prismen lassen sich durch einen Schnitt parallel zur 6 cm langen Dreiecksseite auf der halben Dreieckshöhe und einem dazu senkrechten Schnitt durch die Dreiecksspitze zu einem quaderförmigen Prisma mit der Grundfläche 6 cm x 2 cm und der Höhe 8 cm zusammensetzen.





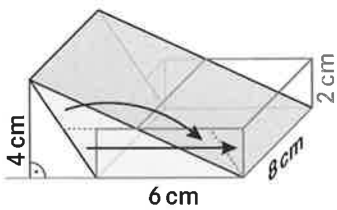
Durch zwei Schnitte senkrecht zur 6 cm langen Kante durch die Mitten der andern Dreiecksseiten lassen sich die dreiseitigen Prismen in ein quaderförmiges Prisma mit der Grundfläche 3 cm x 4 cm und der Höhe 8 cm überführen.



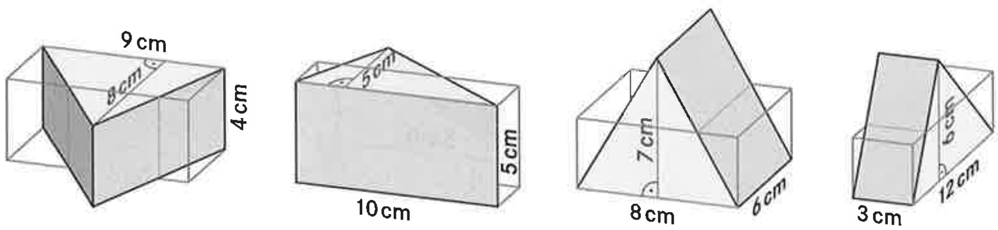
b Die vier dreiseitigen Prismen und die beiden Quader haben das gleiche Volumen:
$V = 12\,\text{cm}^2 \cdot 8\,\text{cm} = \mathbf{96\,cm^3}$

J35 Dieses dreiseitige Prisma hat ebenfalls eine Grundfläche von $12\,\text{cm}^2$ und eine Höhe von 8 cm.
Die Vermutung liegt deshalb nahe, dass es auch ein Volumen von $\mathbf{96\,cm^3}$ hat.

Eine entsprechende Zerlegung zeigt, dass dem so ist.
Es gibt verschiedene Möglichkeiten.



J36 **a**



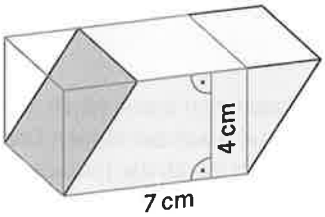
Durch einen passenden Schnitt senkrecht zur Grundfläche in der halben Dreieckshöhe kann jedes der dreiseitigen Prismen in ein quaderförmiges Prisma mit der gleich grossen Grundfläche verwandelt werden. Das Volumen kann demnach berechnet werden als:

Grundseite · halbe Dreieckshöhe · Höhe des Prismas
oder einfacher: Grundfläche · Höhe des Prismas

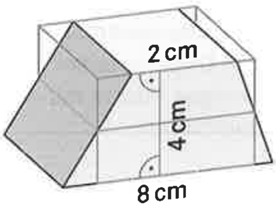
Volumen 1. Körper von links:	$V_1 = (9\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm}) \cdot 4\,\text{cm} = \mathbf{144\,cm^3}$
Volumen 2. Körper von links:	$V_2 = (10\,\text{cm} \cdot 2.5\,\text{cm}) \cdot 5\,\text{cm} = \mathbf{125\,cm^3}$
Volumen 3. Körper von links:	$V_3 = (8\,\text{cm} \cdot 3.5\,\text{cm}) \cdot 6\,\text{cm} = \mathbf{168\,cm^3}$
Volumen 4. Körper von links:	$V_4 = (12\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm}) \cdot 3\,\text{cm} = \mathbf{108\,cm^3}$

→

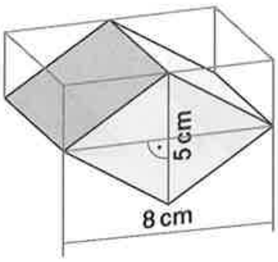
→ **d** Die fünf Prismen, die ein spezielles Viereck als Grundfläche haben, lassen sich problemlos in quaderförmige Prismen überführen: Die Grundfläche wird dazu – auf die aus Band 2 bekannte Art und Weise – in ein Rechteck verwandelt.
Ihr Volumen lässt sich demnach ebenfalls als **Grundfläche mal Höhe** berechnen.



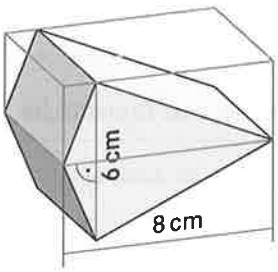
Grundfläche Rhomboid:	Seite · zugehörige Höhe 7 cm · 4 cm = 28 cm²
Höhe des Prismas:	5 cm
Volumen:	28 cm² · 5 cm = **140 cm³**



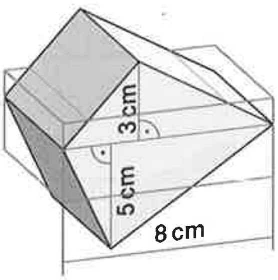
Grundfläche Trapez:	Mittellinie · Höhe 5 cm · 4 cm = 20 cm²
Höhe des Prismas:	5 cm
Volumen:	20 cm² · 5 cm = **100 cm³**



Grundfläche Rhombus:	1. Diagonale · 2. Diagonale : 2 8 cm · 5 cm : 2 = 20 cm²
Höhe des Prismas:	5 cm
Volumen:	20 cm² · 5 cm = **100 cm³**

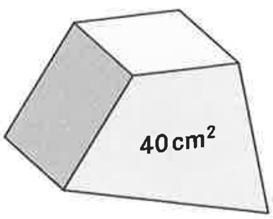


Grundfläche Drachen:	1. Diagonale · 2. Diagonale : 2 8 cm · 6 cm : 2 = 24 cm²
Höhe des Prismas:	5 cm
Volumen:	24 cm² · 5 cm = **120 cm³**



Grundfläche 2 Dreiecke:	Grundseite · Gesamthöhe : 2 8 cm · 8 cm : 2 = 32 cm²
Höhe des Prismas:	5 cm
Volumen:	32 cm² · 5 cm = **160 cm³**

Das letzte Prisma hat ein allgemeines Viereck als Grundfläche. Die Vermutung liegt nahe, dass sich das Volumen auch hier als **Grundfläche mal Höhe** berechnen lässt.



Volumen: 40 cm² · 5 cm = **200 cm³**

Zwei Überlegungen unterstützen diese Vermutung:

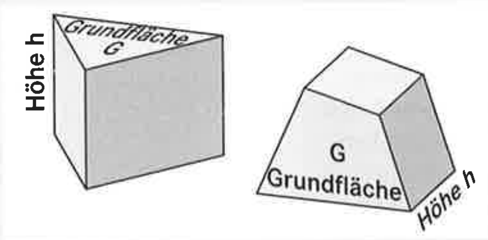
1 Das Viereck könnte konstruktiv in mehreren Schritten in ein Rechteck überführt werden.
Das Prisma wird dann wieder quaderförmig mit der Grundfläche 40 cm².

2 Das Viereck lässt sich in zwei Dreiecke zerlegen, das Prisma somit in zwei dreiseitige Prismen, deren Grundflächen zusammen 40 cm² gross sind. Die dreiseitigen Prismen können dann wie bei **a** aus Grundfläche mal Höhe berechnet werden.

V_{Prisma}

J37 Das Volumen des geraden Prismas

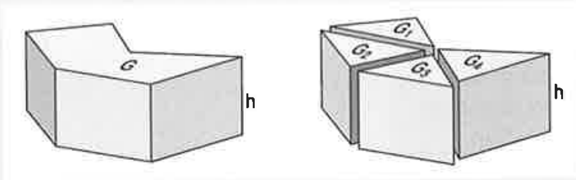
■ Das Volumen V eines drei- oder vierseitigen Prismas lässt sich aus der Grundfläche G und der Höhe h berechnen.



Volumen = Grundfläche mal Höhe

$V_{Prisma} = G \cdot h$

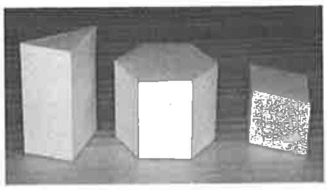
■ Die Formel gilt auch für Prismen mit beliebiger Grundfläche, weil sich diese in lauter dreiseitige Prismen zerlegen lassen.



Es gilt dann beispielsweise:

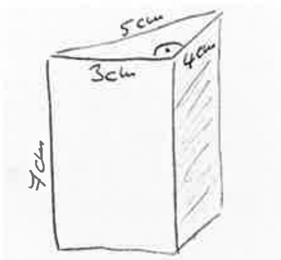
$G_1 \cdot h + G_2 \cdot h + G_3 \cdot h + G_4 \cdot h = (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \cdot h = G \cdot h$

J38



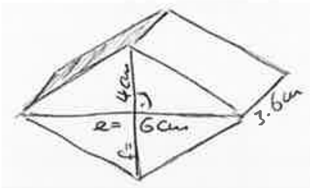
■ Dreiseitiges, rechtwinkliges Prisma

Grundfläche:	$G = 3\,cm \cdot 4\,cm : 2 = 6\,cm^2$
Höhe:	$h = 7\,cm$
Volumen:	$V = G \cdot h =$ **$42\,cm^3$**



■ Vierseitiges Prisma mit rhombenförmiger Grundfläche

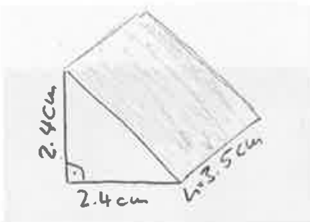
Grundfläche:	$G = 6\,cm \cdot 4\,cm : 2 = 12\,cm^2$
Höhe:	$h = 3.6\,cm$
Volumen:	$V = G \cdot h =$ **$43.2\,cm^3$**



J39

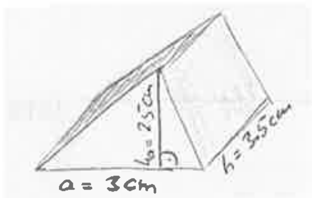
■

Grundfläche:	$G = 2.4\,cm \cdot 2.4\,cm : 2 = 2.88\,cm^2$
Höhe:	$h = 3.5\,cm$
Volumen:	$V = G \cdot h =$ **$10.08\,cm^3$**



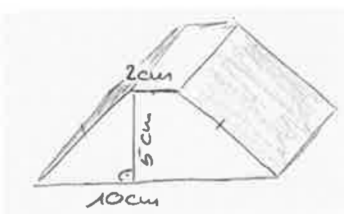
■

Grundfläche:	$G = 3\,cm \cdot 2.5\,cm : 2 = 3.75\,cm^2$
Höhe:	$h = 3.5\,cm$
Volumen:	$V = G \cdot h =$ **$13.125\,cm^3$**



■

Grundfläche:	$G = 6\,cm \cdot 5\,cm = 30\,cm^2$
Höhe:	$h = 3.5\,cm$
Volumen:	$V = G \cdot h =$ **$105\,cm^3$**

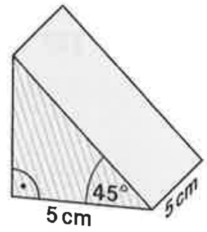


Dreiseitige, rechtwinklige Prismen

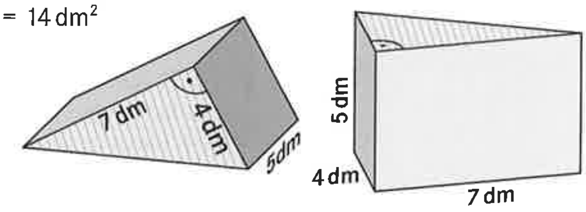
Für die **Spuren II und III** sind zu diesem Thema erst später Aufgaben vorgesehen, wenn gleichzeitig Mantel und Oberfläche berechnet werden können.

Für die **Spur I** wird dann das Thema nochmals aufgegriffen.

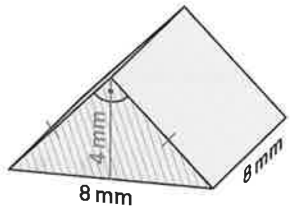
J310 **a** Grundfläche: halbes Quadrat
$G = (5\,\text{cm})^2 : 2 = 12.5\,\text{cm}^2$
Höhe: $h = 5\,\text{cm}$
Volumen: $\mathbf{V = G \cdot h = 62.5\,cm^3}$



b Grundfläche: $G = 7\,\text{dm} \cdot 4\,\text{dm} : 2 = 14\,\text{dm}^2$
Höhe: $h = 5\,\text{dm}$
Volumen: $\mathbf{V = G \cdot h = 70\,dm^3}$



c Grundfläche: halbes Quadrat
$G = 8\,\text{mm} \cdot 4\,\text{mm} : 2 = 16\,\text{mm}^2$
Höhe: $h = 8\,\text{dm}$
Volumen: $\mathbf{V = G \cdot h = 128\,mm^3}$

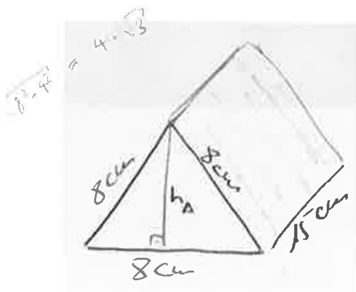


J311 Grundfläche: gleichseitiges Dreieck mit $s = 8\,\text{cm}$
$h_\triangle = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = 4\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} = 6.928...\,\text{cm}$

$G = \frac{s \cdot h_\triangle}{2} = 4\,\text{cm} \cdot h_\triangle = 27.712...\,\text{cm}^2$

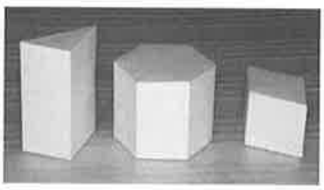
Höhe: $h = 15\,\text{cm}$

Volumen: $\mathbf{V = G \cdot h \approx 415.69\,cm^3}$



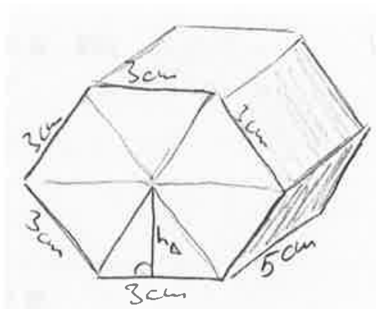
J312 Grundfläche: $6 \cdot$ gleichseitiges Dreieck mit $s = 3\,\text{cm}$
$h_\triangle = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = 1.5\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} = 2.598...\,\text{cm}$

$G = 6 \cdot \frac{s \cdot h_\triangle}{2} = 6 \cdot 1.5\,\text{cm} \cdot h_\triangle = 23.382...\,\text{cm}^2$



Höhe: $h = 5\,\text{cm}$

Volumen: $\mathbf{V = G \cdot h \approx 116.91\,cm^3}$

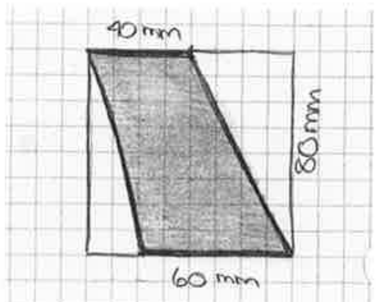


J313 **a** **1. möglicher Lösungsweg: mit Trapez**

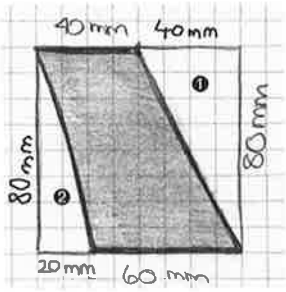
Grundfläche: Trapez mit $m = 50\,\text{mm}$, $h_{\text{⏢}} = 80\text{mm}$
$G = m \cdot h_{\text{⏢}} = 4\,000\,\text{mm}^2$

Höhe: $h = 80\,\text{mm}$

Volumen: $V = G \cdot h = 320\,000\,\text{mm}^3 = \mathbf{320\,cm^3}$



2. möglicher Lösungsweg: mit Dreiecken

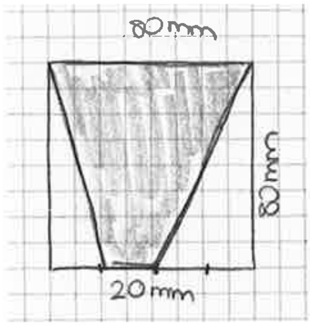


Grundfläche: Quadrat – Dreieck❶ – Dreieck❷
$G = 6\,400\,mm^2 - 1\,600\,mm^2 - 800\,mm^2$
$= 4\,000\,mm^2$

Höhe: $h = 80\,mm$

Volumen: **V** $= G \cdot h = 320\,000\,mm^3 =$ **320 cm³**

b 1. möglicher Lösungsweg: mit Trapez

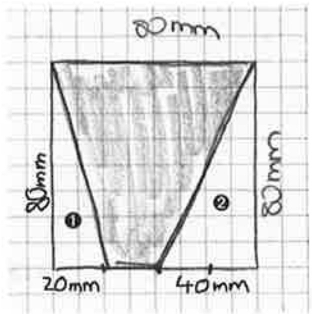


Grundfläche: Trapez mit $m = 50\,mm$, $h_{\triangle} = 80mm$
$G = m \cdot h_{\triangle} = 4\,000\,mm^2$

Höhe: $h = 80\,mm$

Volumen: **V** $= G \cdot h = 320\,000\,mm^3 =$ **320 cm³**

2. möglicher Lösungsweg: mit Dreiecken



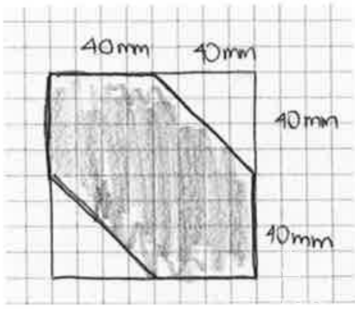
Grundfläche: Quadrat – Dreieck❶ – Dreieck❷
$G = 6\,400\,mm^2 - 800\,mm^2 - 1\,600\,mm^2$
$= 4\,000\,mm^2$

$8^2 - 4^2$

Höhe: $h = 80\,mm$

Volumen: **V** $= G \cdot h = 320\,000\,mm^3 =$ **320 cm³**

c Grundfläche: Quadrat – zwei gleiche Dreiecke
$G = 6\,400\,mm^2 - 1\,600\,mm^2$
$= 4\,800\,mm^2$



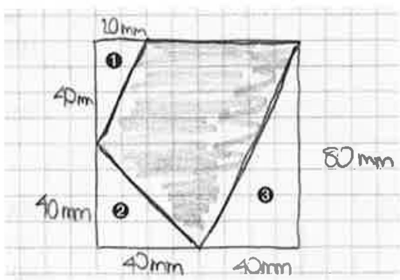
Höhe: $h = 80\,mm$

Volumen: **V** $= G \cdot h = 384\,000\,mm^3 =$ **384 cm³**

d Grundfläche: Quadrat – Dreieck❶ – Dreieck❷ – Dreieck❸
$G = 6\,400\,mm^2 - 400\,mm^2 - 800\,mm^2 - 1\,600\,mm^2$
$= 3\,600\,mm^2$

Höhe: $h = 80\,mm$

Volumen: **V** $= G \cdot h = 288\,000\,mm^3 =$ **288 cm³**



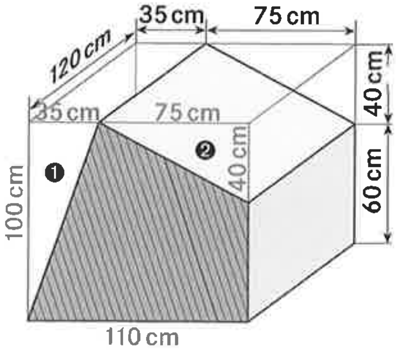
J314 Grundfäche = Rechteck(!) – Dreieck❶ – Dreieck❷

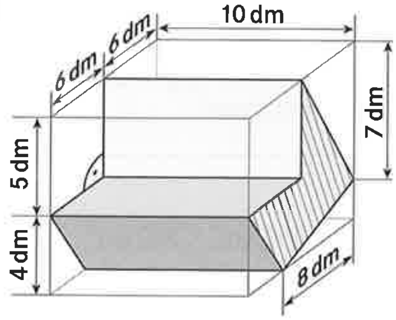
G = $11\,000\,cm^2 - 1\,750\,cm^2 - 1\,500\,cm^2$

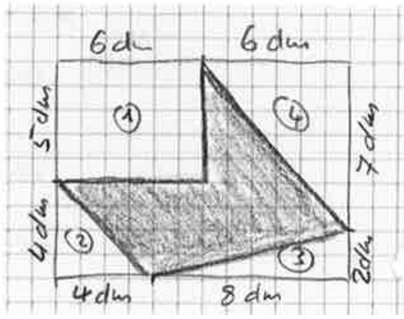
= $7\,750\,cm^2$

Höhe h = 120 cm

Volumen **V** = G · h = $930\,000\,cm^3$ = **$930\,dm^3$**







Grundfäche = Rechteck – Rechteck❶ – Dreieck❷ – Dreieck❸ – Dreieck❹

G = $108\,dm^2 - 30\,dm^2 - 8\,dm^2 - 8\,dm^2 - 21\,dm^2$

= $41\,dm^2$

Höhe h = 10 dm

Volumen **V** = G · h = **$410\,dm^3$**

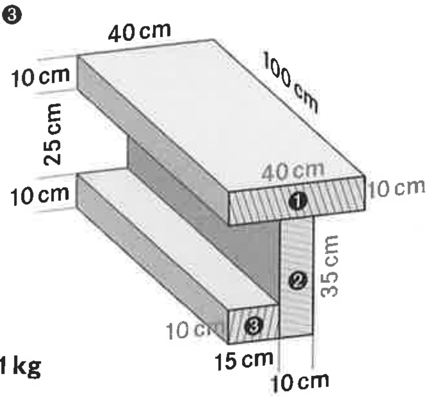
J315 Grundfäche = Rechteck❶ + Rechteck❷ + Rechteck❸

G = $400\,cm^2 + 350\,cm^2 + 150\,cm^2$

= $900\,cm^2$

Höhe h = 100 cm

Volumen **V** = G · h = **$90\,000\,cm^3$**



Masse

$1\,cm^3$ wiegt 7.9 g

$90\,000\,cm^3$ wiegen $90\,000 \cdot 7.9\,g = 711\,000\,g$ = **711 kg**

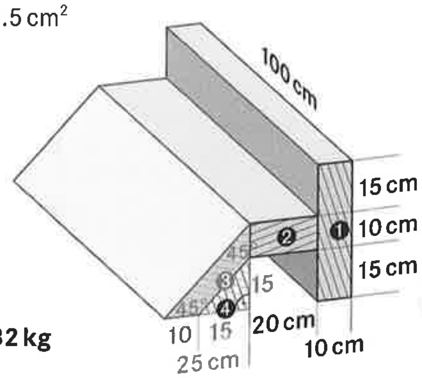
Grundfäche = Rechteck❶ + Rechteck❷ + halbes Quadrat❸ – halbes Quadrat❹

G = $400\,cm^2 + 200\,cm^2 + 312.5\,cm^2 - 112.5\,cm^2$

= $800\,cm^2$

Höhe h = 100 cm

Volumen **V** = G · h = **$80\,000\,cm^3$**



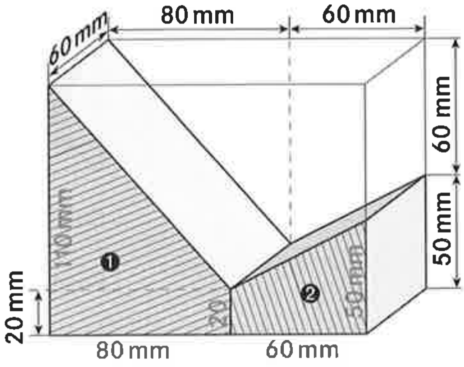
Masse

$1\,cm^3$ wiegt 7.9 g

$80\,000\,cm^3$ wiegen $80\,000 \cdot 7.9\,g = 632\,000\,g$ = **632 kg**

J316 Arbeitsblatt

J317 Grundfläche = Trapez ❶ + Trapez ❷



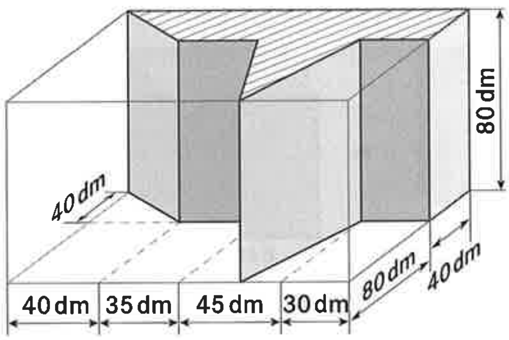
Trapez ❶ $m_1 = 65\,mm \quad h_1 = 80\,mm$
$A_❶ = m_1 \cdot h_1 = 5\,200\,mm^2$

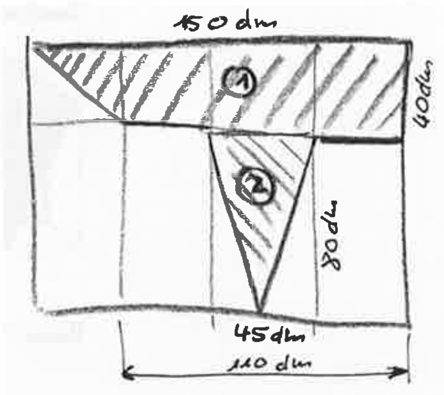
Trapez ❷ $m_2 = 35\,mm \quad h_2 = 60\,mm$
$A_❷ = m_2 \cdot h_2 = 2\,100\,mm^2$

$G = A_❶ + A_❷ = 7\,300\,mm^2$

Höhe $h = 60\,m$

Volumen $V = G \cdot h = 7\,300\,mm^2 \cdot 60\,mm = 438\,000\,mm^3 = \mathbf{438\,cm^3}$





Grundfläche = Trapez ❶ + Dreieck ❷

Trapez ❶ $m_1 = 130\,dm \quad h_1 = 40\,dm$
$A_❶ = m_1 \cdot h_1 = 5\,200\,mm^2$

Dreieck ❷ $a = 45\,dm \quad h_a = 80\,dm$
$A_❷ = a \cdot h_a : 2 = 1\,800\,dm^2$

$G = A_❶ + A_❷ = 7\,000\,dm^2$

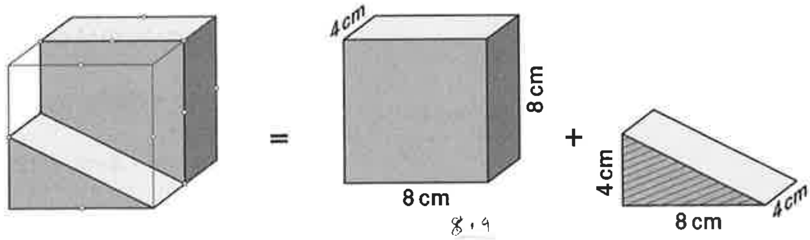
Höhe $h = 80\,dm$

Volumen $V = G \cdot h = 7\,000\,dm^2 \cdot 80\,dm = 560\,000\,dm^3 = \mathbf{560\,m^3}$

J318 Arbeitsblatt

J319 Die Volumen lassen sich **grundsätzlich auf zwei Arten** berechnen: Durch **Zerlegen** des ganzen Körpers **in Teilkörper** oder durch **Wegrechnen der weggeschnittenen Würfelteile.**

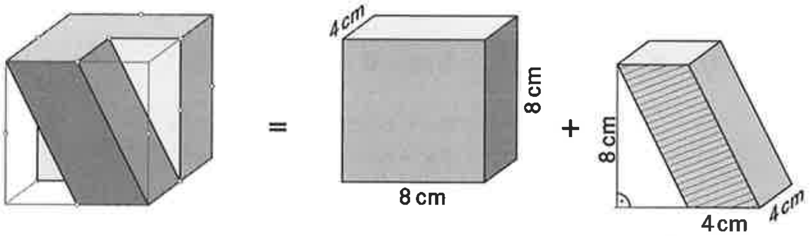
1 Einfachster Lösungsweg: Zerlegen



8 · 4

$V = V_{Quader} + V_{Prisma} = 8\,cm \cdot 8\,cm \cdot 4\,cm + 16\,cm^2 \cdot 4\,cm = \mathbf{320\,cm^3}$ →

2 Erster Lösungsweg: Zerlegen

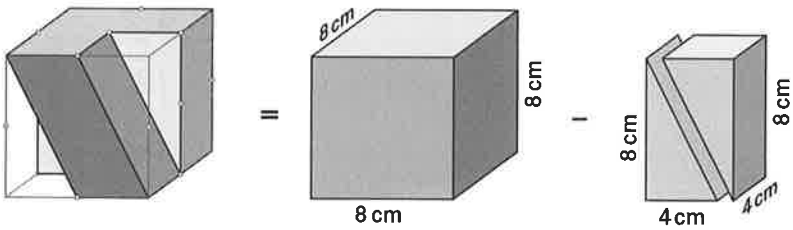


Quader: $V_{\text{Quader}} = 8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 256\,\text{cm}^3$

Prisma: Grundfläche = Rhomboid = $4\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} = 32\,\text{cm}^2$
Höhe = 4 cm
$V_{\text{Prisma}} = 32\,\text{cm}^2 \cdot 4\,\text{cm} = 128\,\text{cm}^3$

$V_{\text{Körper}} = V_{\text{Quader}} + V_{\text{Prisma}} = \mathbf{384\,cm^3}$

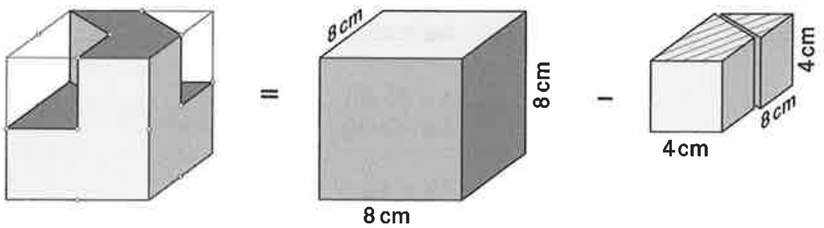
Zweiter Lösungsweg: Würfelteile wegschneiden



Die beiden weggeschnittenen Prismen ergänzen sich zum Quader.

$V_{\text{Körper}} = V_{\text{Würfel}} - V_{\text{Quader}} = 8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} - 4\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} = \mathbf{384\,cm^3}$

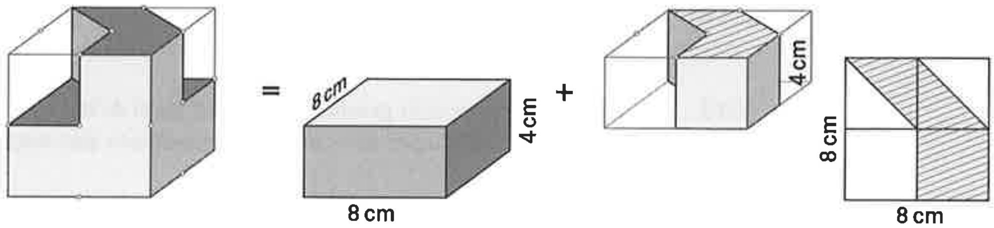
3 Erster Lösungsweg: Würfelteile wegschneiden



Die beiden weggeschnittenen Prismen ergänzen sich zum Quader.

$V_{\text{Körper}} = V_{\text{Würfel}} - V_{\text{Quader}} = 8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} - 4\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = \mathbf{384\,cm^3}$

Zweiter Lösungsweg: Zerlegen



Quader: $V_{\text{Quader}} = 8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 256\,\text{cm}^3$

Prisma: Grundfläche = Hälfte des Quadrates = $32\,\text{cm}^2$
Höhe = 4 cm
$V_{\text{Prisma}} = 32\,\text{cm}^2 \cdot 4\,\text{cm} = 128\,\text{cm}^3$

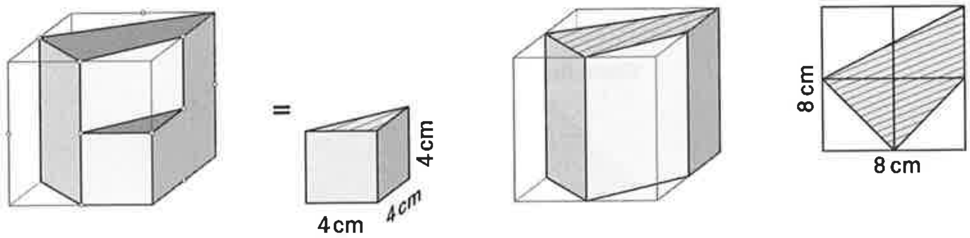
$V_{\text{Körper}} = V_{\text{Quader}} + V_{\text{Prisma}} = \mathbf{384\,cm^3}$

Verdeckte Form

Wir gehen davon aus, dass die hintere Kante des Würfels über die ganze Höhe weggeschnitten wurde.

Grundsätzlich wäre es aber auch möglich, dass die Kante nur bis zur halben Höhe weggeschnitten wurde. Die Lösungswege lassen sich unter dieser Annahme relativ leicht anpassen. Das Volumen würde sich um $32\,cm^3$ auf $\mathbf{320\,cm^3}$ vergrössern.

4 Erster Lösungsweg: Zerlegen

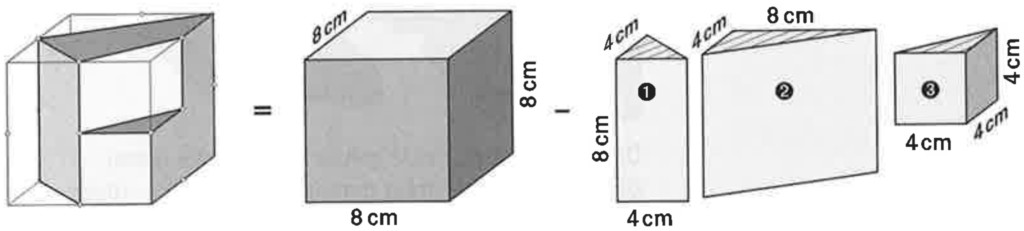


Dreiseitiges Prisma: $V_{PrismaD} = 8\,cm^2 \cdot 4\,cm = 32\,cm^3$

Vierseitiges Prisma: Grundfläche = Hälfte des Quadrates = $32\,cm^2$
Höhe = 8 cm
$V_{PrismaV} = 32\,cm^2 \cdot 8\,cm = 256\,cm^3$

$\mathbf{V_{Körper}} = V_{PrismaD} + V_{PrismaV} = \mathbf{288\,cm^3}$

Zweiter Lösungsweg: Würfelteile wegschneiden



Würfel: $V_{Würfel} = 8\,cm \cdot 8\,cm \cdot 8\,cm = 512\,cm^3$

Prisma ❶: $V_❶ = 8\,cm^2 \cdot 8\,cm = 64\,cm^3$
Prisma ❷: $V_❷ = 16\,cm^2 \cdot 8\,cm = 128\,cm^3$
Prisma ❸: $V_❸ = 8\,cm^2 \cdot 4\,cm = 32\,cm^3$

$\mathbf{V_{Körper}} = V_{Würfel} - V_❶ - V_❷ - V_❸ = \mathbf{288\,cm^3}$

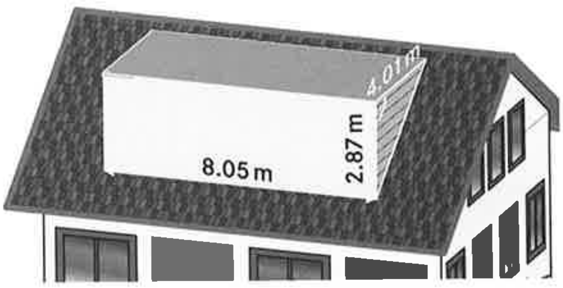
J320 Arbeitsblatt

J321 **a** Der Anbau ist prismenförmig.

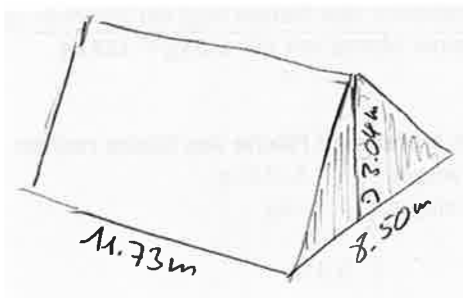
$G = 2.87\,m \cdot 4.01\,m : 2 = 5.754...\,m^2$

$h = 8.05\,m$

$\mathbf{V_{Anbau}} = G \cdot h = 5.754...\,m^2 \cdot 8.05\,m$
$= 46.322...\,m^3 \approx \mathbf{46.32\,m^3}$



b



Der Dachraum selbst ist auch prismenförmig:

$G = 8.50\,m \cdot 3.04\,m : 2 = 12.92\,m^2$

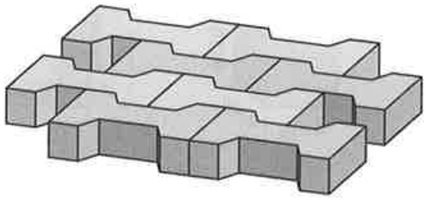
$h = 11.73\,m$

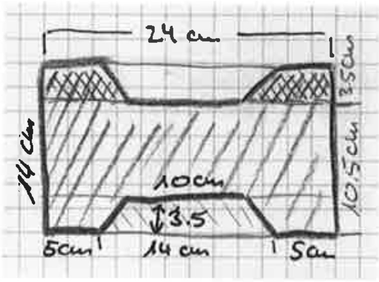
$\mathbf{V_{Dach}} = G \cdot h = 12.92\,m^2 \cdot 11.73\,m$
$= 151.551...\,m^2 \approx \mathbf{151.55\,m^3}$

Dachraumvergrösserung: $\frac{V_{Anbau}}{V_{Dach}} \approx \frac{46.322...\,m^3}{151.551...\,m^3} \approx 0.306 = \mathbf{30.6\,\%}$

J322 **a** Um zu entscheiden, welcher Verbundstein leichter ist, genügt es, ihre Grundflächen zu vergleichen.

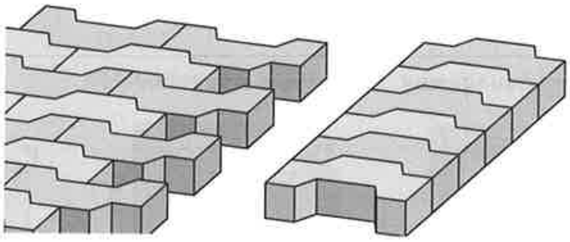
Stein links

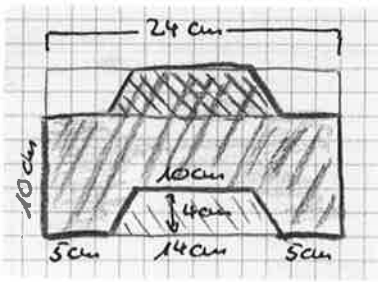




Die beiden Trapeze oben passen genau in die Lücke unten.
Die Grundfläche beträgt demnach: G_{links} = 10.5 cm · 24 cm = **252 cm²**

Stein rechts





Das Trapez oben passt genau in die Lücke unten.
Die Grundfläche beträgt demnach: G_{rechts} = 10 cm · 24 cm = **240 cm²**

Der Stein **rechts** ist leichter als derjenige links.

b Dichte = 2.3 kg/dm³

Stein links: V_{links} = 252 cm² · 6 cm = 1 512 cm³ = 1.512 dm³

1 dm³	wiegt	2.3 kg
1.512 dm³	wiegen	1.512 · 2.3 kg = 3.4776 kg

Der Stein ist ungefähr **3.480 kg** schwer.

Stein rechts: V_{rechts} = 240 cm² · 6 cm = 1 440 cm³ = 1.440 dm³

1 dm³	wiegt	2.3 kg
1.440 dm³	wiegen	1.440 · 2.3 kg = 3.312 kg

Der Stein ist ungefähr **3.310 kg** schwer.

c Es sind ganz verschiedene Lösungswege möglich. Zwei Beispiele:

Einfachster Lösungsweg:
Auf einem Quadratmeter des Platzes liegt ein Volumen von 100 dm² · 0.6 dm = 60 dm³.
Dies entspricht einer Masse von 60 · 2.3 kg = **138 kg.**

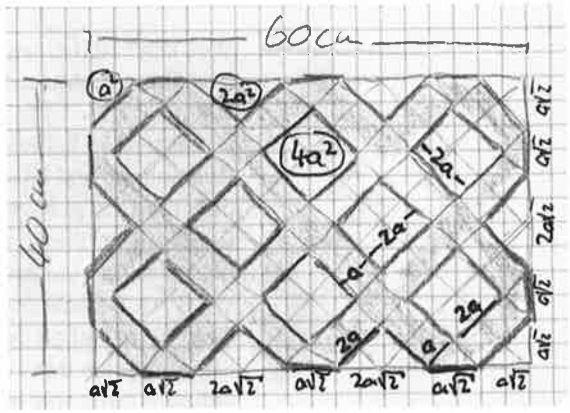
Lösungsweg mit Masse und Fläche des Steins rechts:

240 cm²	wiegen	3.312 kg
10 000 cm²	wiegen	x kg

$$\frac{x}{3.312} = \frac{10\,000}{240} \quad | \cdot 3.312$$
$$x = 138$$

Auf einem Quadratmeter des Platzes liegen **138 kg** Verbundsteine.

J323 Eine Skizze hilft, den Aufbau der Grundfläche besser zu durchschauen.



Mit Hilfe der Randgrössen lässt sich a bestimmen (Längeneinheiten in cm):

$6 \cdot a\sqrt{2} = 40 \qquad |: 6\sqrt{2}$

$$a = \frac{40}{6\sqrt{2}} = \frac{20}{3\sqrt{2}} = 4.714\ldots \text{cm}$$

Damit lässt sich die Grundfläche berechnen:

$G = 40 \cdot 60 - 8 \cdot 4a^2 - 6 \cdot 2a^2 - 4 \cdot a^2$
$= 2400 - 48a^2 = 1333.333\ldots \text{ cm}^2$

$h = 10$ cm
$V = G \cdot h = 13333.33\ldots \text{ cm}^3 = 13.333\ldots \text{ dm}^3$

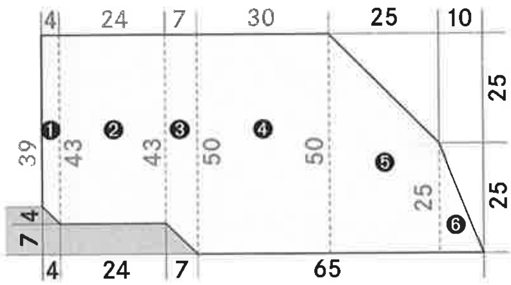
Dichte: 2.6 kg/dm³

1 dm³	wiegt	2.6 kg
13.333... dm³	wiegen	13.333... · 2.6 kg ≈ 34.667 kg

Der Stein ist ungefähr **34.7 kg** (!) schwer.

J324 Die Schaufel ist prismenförmig mit der Höhe 110 cm.
Zur Ermittlung der Grundfläche gibt es verschiedene Lösungswege. Zwei Beispiele.

1. Lösungsweg: Fläche zerlegen

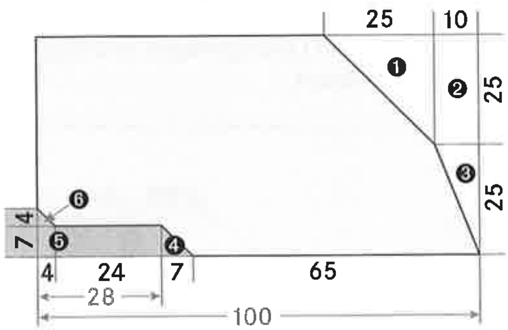


❶ Trapez: m = 41 cm h = 4 cm
A❶ = m·h = **164 cm²**
❷ Rechteck: A❷ = 24 cm·43 cm = **1 032 cm²**
❸ Trapez: m = 46.5 cm h = 7 cm
A❸ = m·h = **325.5 cm²**
❹ Rechteck: A❹ = 30 cm·50 cm = **1 500 cm²**
❺ Trapez: m = 37.5 cm h = 25 cm
A❺ = m·h = **937.5 cm²**
❻ Dreieck: m = 37.5 cm h = 25 cm
A❻ = 10 cm·25 cm : 2 = **125 cm²**

Grundfläche total: G = A❶ + A❷ + A❸ + A❹ + A❺ + A❻ = 4 084 cm²

Volumen: V = G·h = 4 084 cm² · 110 cm = 449 240 cm³ = **449.24 dm³**
Die Schüttgutschaufel fasst ein Volumen von ungefähr **450 dm³** oder **450 Liter**.

2. Lösungsweg: Rechteck minus Teile ausserhalb der Fläche



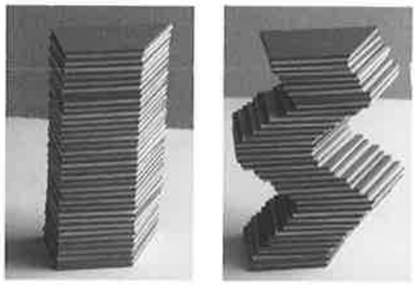
Rechteck: 100 cm·50 cm = **5 000 cm²**

❶ Dreieck: A❶ = 25 cm·25 cm : 2 = **312.5 cm²**
❷ Rechteck: A❷ = 25 cm·10 cm = **250 cm²**
❸ Dreieck: A❸ = 10 cm·25 cm : 2 = **125 cm²**
❹ Dreieck: A❹ = 7 cm·7 cm : 2 = **24.5 cm²**
❺ Rechteck: A❺ = 28 cm·7 cm = **196 cm²**
❻ Dreieck: A❻ = 4 cm·4 cm : 2 = **8 cm²**
Rest total = **916 cm²**

Grundfäche total:
G = 5 000 cm² – 916 cm² = 4 084 cm²

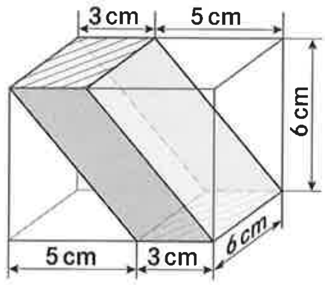
Volumen: V = G·h = 4 084 cm² · 110 cm = 449 240 cm³ = **449.24 dm³**
Die Schüttgutschaufel fasst ein Volumen von ungefähr **450 dm³** oder **450 Liter**.

J325 Ja, alle 8 Wasserkrüge haben dasselbe Fassungsvermögen von $62\,cm^2 \cdot 18\,cm = \mathbf{1\,116\,cm^3} \approx \mathbf{1.1\,Liter}$



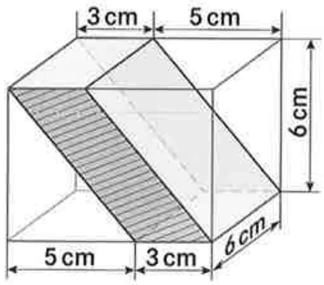
Dies lässt sich einsehen, wenn man sich die Krüge bzw. ihren Innenraum in Schichten geschnitten vorstellt.
Die einzelnen Schichten haben immer denselben Querschnitt und lassen sich gegeneinander verschieben. Sind sie genügend dünn, haben sie annähernd Quaderform. Sie können dann insbesondere so verschoben werden, dass ein gerades Prisma entsteht. Das Volumen dieses geraden Prismas lässt sich nach der bekannten Formel $V = G \cdot h$ berechnen.
Beim Verschieben der Schichten bleibt das Gesamtvolumen erhalten, da es die Summe aller Einzelvolumen der kleinen Quader ist. Stellt man sich dabei die einzelnen Schichten sogar **beliebig dünn mit einer Höhe annähernd Null vor**, so erhält die Form eine annähernd glatte Oberfläche. Sie **nähert** sich beispielsweise der Form eines schiefen Prismas **an**.

J326 **a** **1** **1. Weg**
Gemäss den Überlegungen in **J325** sollte das Volumen eines schiefen Prismas mit der bekannten Formel $V = G \cdot h$ berechnet werden können:



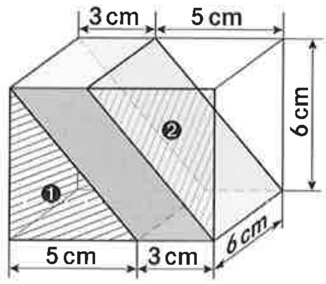
$G = 3\,cm \cdot 6\,cm = 18\,cm^2$
$h = 6\,cm$
$\mathbf{V} = 18\,cm^2 \cdot 6\,cm = \mathbf{108\,cm^3}$

2. Weg
Der Körper kann auch als gerades Prisma mit dem Rhomboid als Grundfläche angesehen werden.



$G = 3\,cm \cdot 6\,cm = 18\,cm^2$
$h = 6\,cm$
$\mathbf{V} = 18\,cm^2 \cdot 6\,cm = \mathbf{108\,cm^3}$

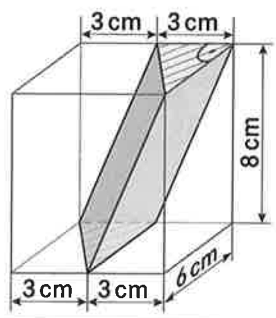
3. Weg
Der Körper kann ausgehend vom Quader durch Wegschneiden von zwei dreiseitigen Prismen berechnet werden. Diese ergänzen sich zu einem kleinen Quader, wie die markierten Grundflächen ❶ und ❷ zeigen.



$\mathbf{V} = V_{Quader} - V_{Prisma❶} - V_{Prisma❷}$
$= V_{Quader} - V_{Quader\ klein}$
$= 8\,cm \cdot 6\,cm \cdot 6\,cm - 5\,cm \cdot 6\,cm \cdot 6\,cm = \mathbf{108\,cm^3}$

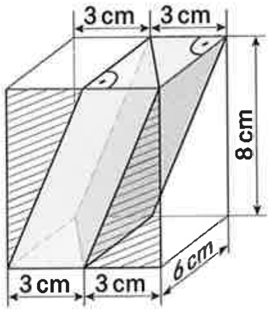
Die Resultate des zweiten und dritten Lösungsweges bestätigen, dass die Formel in diesem Fall das richtige Volumen liefert.

2 **1. Weg**
Mit $V = G \cdot h$

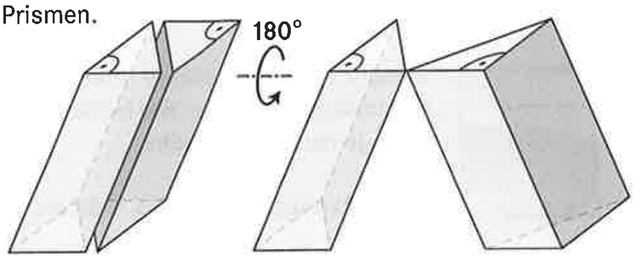


$G = 3\,cm \cdot 6\,cm : 2 = 9\,cm^2$
$h = 8\,cm$
$\mathbf{V} = 9\,cm^2 \cdot 8\,cm = \mathbf{72\,cm^3}$

2. Weg



Schneidet man vom Quader zwei dreiseitige Prismen mit den schraffierten Flächen als Grundflächen weg, so bleibt die Hälfte des Quaders übrig.
Dieser Restkörper besteht aus zwei symmetrischen schiefen Prismen.



Es gilt demnach:

$\mathbf{V} = \frac{1}{4} \cdot V_{\text{Quader}}$

$= \frac{1}{4} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm}$

$= \mathbf{72\,cm^3}$

Das Resultat des zweiten Lösungsweges bestätigt, dass die Formel in diesem Fall das richtige Volumen liefert.

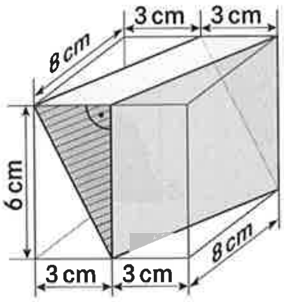
■ **1. Weg**

Mit $V = G \cdot h$

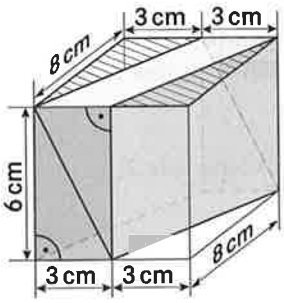
$G = 3\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} : 2 = 9\,\text{cm}^2$

$h = 8\,\text{cm}$

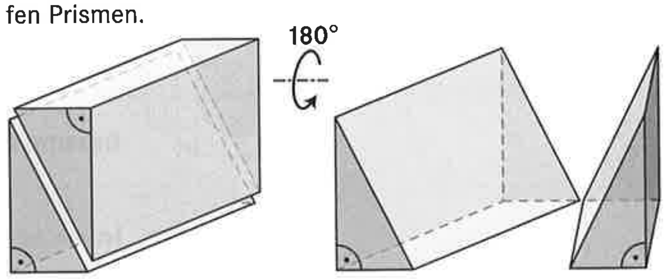
$\mathbf{V} = 9\,\text{cm}^2 \cdot 8\,\text{cm} = \mathbf{72\,cm^3}$



2. Weg



Schneidet man vom Quader zwei dreiseitige Prismen mit den schraffierten Deckflächen weg, so bleibt die Hälfte des Quaders übrig.
Dieser Restkörper besteht aus zwei symmetrischen schiefen Prismen.



Es gilt demnach:

$\mathbf{V} = \frac{1}{4} \cdot V_{\text{Quader}}$

$= \frac{1}{4} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm}$

$= \mathbf{72\,cm^3}$

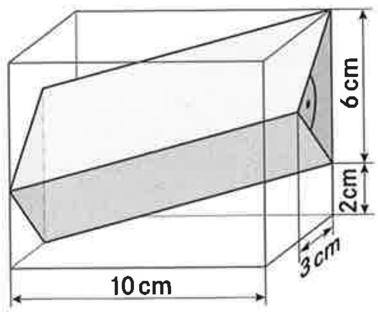
Das Resultat des zweiten Lösungsweges bestätigt auch hier, dass die Formel in diesem Fall das richtige Volumen liefert.

■ Gemäss den Überlegungen oben lässt sich auch bei diesem schiefen Prisma das Volumen mit der Formel $V = G \cdot h$ berechnen.

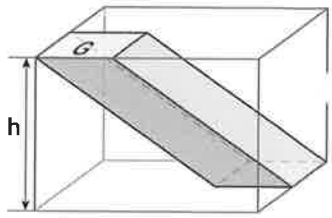
$G = 3\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} : 2 = 9\,\text{cm}^2$

$h = 10\,\text{cm}$

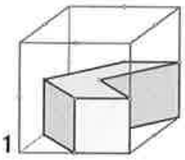
$\mathbf{V} = 9\,\text{cm}^2 \cdot 10\,\text{cm} = \mathbf{90\,cm^3}$



d Das Volumen eines schiefen Prismas lässt sich mit der gleichen Formel berechnen wie das Volumen eines geraden Prismas: **$V = G \cdot h$**
Bei einem schiefen Prisma ist es allerdings nicht immer einfach, anhand einer Darstellung sofort zu sehen, welches die Grundfläche und welches die Höhe ist.

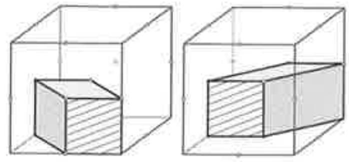


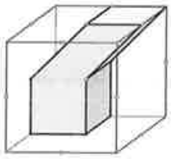
J327

1 

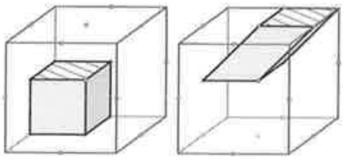
Besteht aus zwei schiefen Prismen:
Grundfläche je $\frac{1}{4}$ der Würfelfläche
Höhe je halbe Würfelhöhe

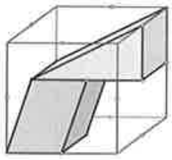
Gesamtvolumen = $\frac{1}{4}$ des Würfels



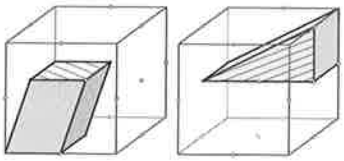
2 

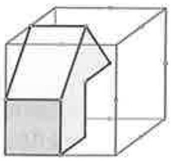
Besteht aus einem geraden Prisma (Würfel) und einem schiefen Prisma:
Grundfläche je $\frac{1}{4}$ der Würfelfläche
Höhe je halbe Würfelhöhe
Gesamtvolumen = $\frac{1}{4}$ des Würfels



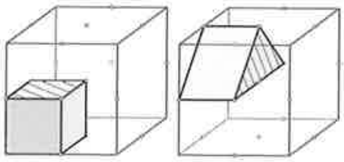
3 

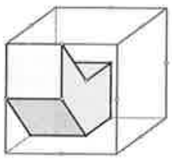
Besteht aus einem schiefen Prisma und einem geraden dreiseitigen Prisma:
Grundfläche je $\frac{1}{4}$ der Würfelfläche
Höhe je halbe Würfelhöhe
Gesamtvolumen = $\frac{1}{4}$ des Würfels



4 

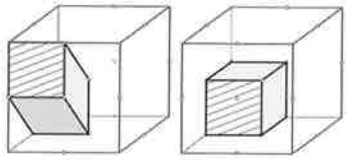
Besteht aus zwei geraden Prismen (Würfel und dreiseitiges Prisma):
Grundfläche je $\frac{1}{4}$ der Würfelfläche
Höhe je halbe Würfelhöhe
Gesamtvolumen = $\frac{1}{4}$ des Würfels

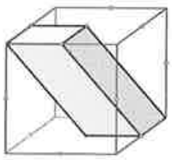


5 

Ist der gleiche Körper wie **2**:

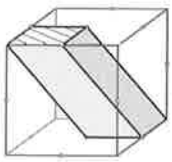
Gesamtvolumen = $\frac{1}{4}$ des Würfels

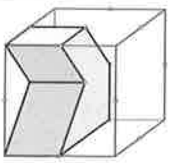


6 

Ist ein schiefes Prisma:

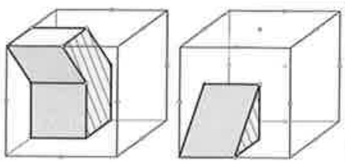
Grundfläche = $\frac{1}{4}$ der Würfelfläche
Höhe = Würfelhöhe
Gesamtvolumen = $\frac{1}{4}$ des Würfels

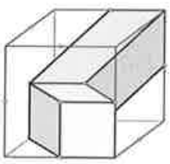


7 

Lässt sich aus dem Körper **2** und einem dreiseitigen Prisma zusammensetzen.

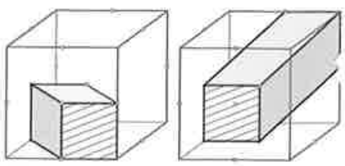
Das **Gesamtvolumen** ist **grösser** als das der andern Körper (**$\frac{3}{8}$ des Würfels**).



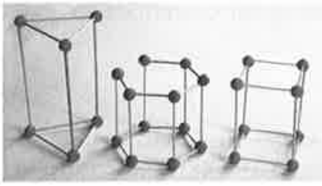
8 

Besteht aus zwei schiefen Prismen:
Grundfläche je $\frac{1}{4}$ der Würfelfläche
Höhe je halbe Würfelhöhe

Gesamtvolumen = $\frac{1}{4}$ des Würfels



J328 ■ Um die Mantelfläche (gerastert) zu berechnen muss die Länge und die Breite des Mantelrechtecks bekannt sein. Dessen Länge entspricht dem **Umfang der Grundfläche**, dessen Breite der **Höhe des Prismas**.
Da alle drei Körper regelmässig sind, genügt es in diesen Beispielen, je eine Grundkante und eine Seitenkante zu messen.

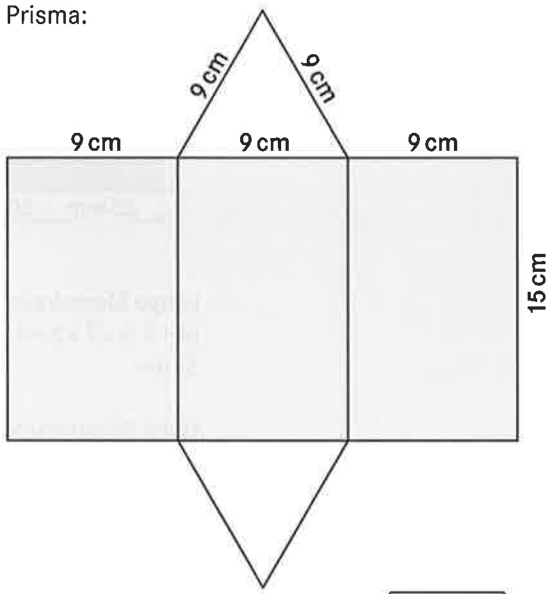


■ Das **Netz** umfasst neben dem **Mantel** jeweils zusätzlich die **Grund**- und die **Deckfläche**.

Beispiel für ein regelmässiges dreiseitiges Prisma:

Mantel = 27 cm · 15 cm = **405 cm²**

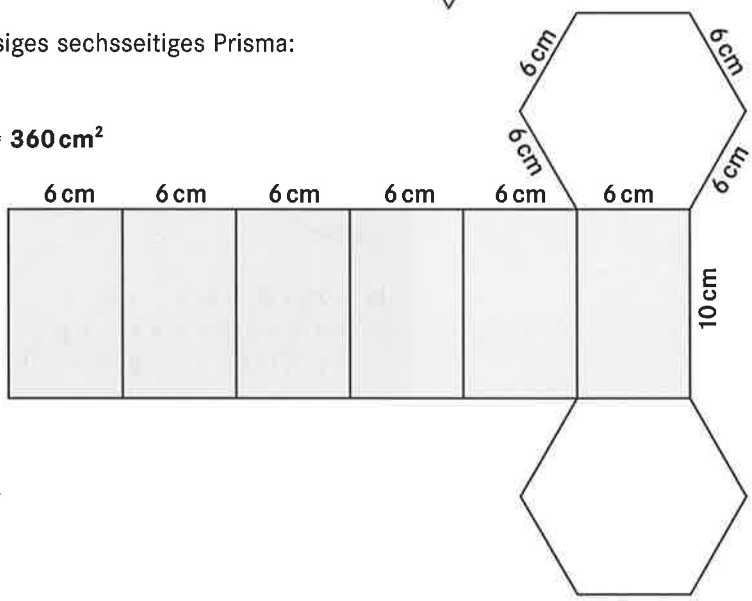
Zeichnung: Massstab 1:4



Beispiel für ein regelmässiges sechsseitiges Prisma:

Mantel = 36 cm · 10 cm = **360 cm²**

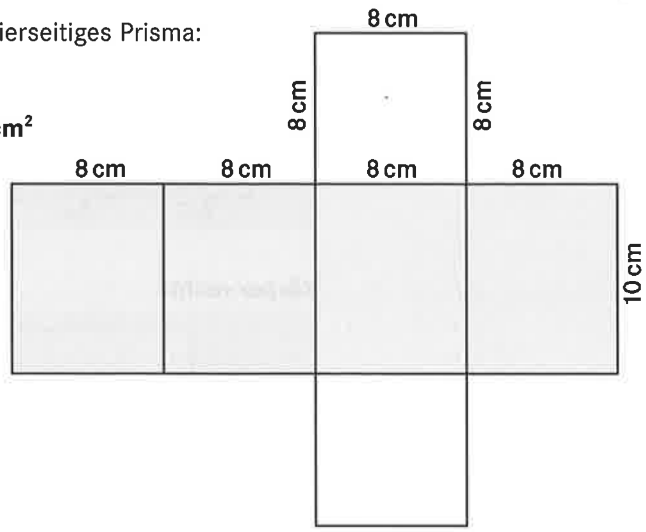
Zeichnung: Massstab 1:4



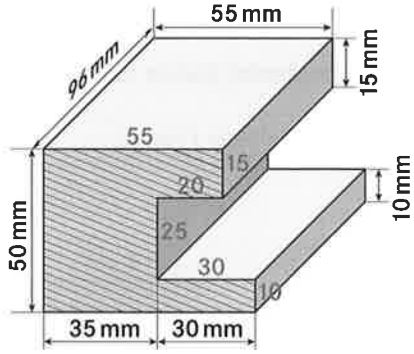
Beispiel für ein regelmässiges vierseitiges Prisma:

Mantel = 32 cm · 10 cm = **320 cm²**

Zeichnung: Massstab 1:4



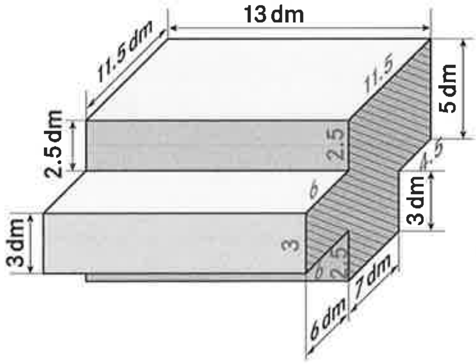
J329 ■ Alle Seitenrechtecke aneinander gereiht ergeben den Mantel.
Die Länge des gesamten Mantelrechtecks entspricht dem Umfang der Grundfläche.
Die Höhe des Mantelrechtecks entspricht der Prismenhöhe.



Länge Mantelrechteck = Umfang Grundfläche =
(50 + 65 + 10 + 30 + 25 + 20 + 15 + 55) mm = 270 mm

Höhe Mantelrechteck = Höhe Prisma = 96 mm

Mantel M = 270 mm · 96 mm = **25 920 mm²**



Länge Mantelrechteck = Umfang Grundfläche =
(6 + 2.5 + 7 + 3 + 4.5 + 5 + 11.5 + 2.5 + 6 + 3) dm =
51 dm

Höhe Mantelrechteck = Höhe Prisma = 13 dm

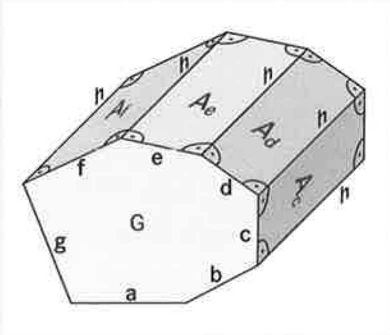
Mantel M = 51 dm · 13 dm = **663 dm²**

M_{Prisma}

■ **Der Mantel eines geraden Prismas**

Der Mantel M eines geraden Prismas besteht aus Rechtecken der Höhe h. Anstatt die Flächen all dieser Rechtecke einzeln zu berechnen, kann man auf den Umfang u der Grundfläche zurückgreifen:

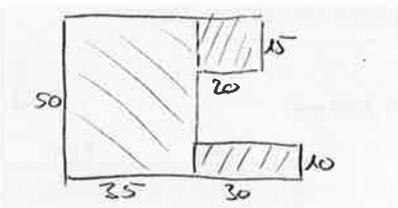
$$\begin{aligned} M &= A_a + A_b + A_c + \dots + A_g \\ &= a \cdot h + b \cdot h + c \cdot h + \dots + g \cdot h \\ &= (a + b + c + \dots + g) \cdot h = u \cdot h \end{aligned}$$



Kurz: **M = u · h** **Mantel = Umfang$_{\text{Grundfläche}}$ mal Höhe$_{\text{Prisma}}$**

■ Die Oberfläche besteht aus dem Mantel sowie der Grund- und der Deckfläche.

Körper links

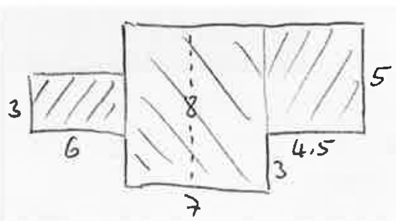


Mantel: M = 25 920 mm² (siehe ■)

Grundfläche (= Deckfläche)
G = (35 · 50 + 30 · 10 + 20 · 15) mm² = 2 350 mm²

Oberfläche:
S = 25 920 mm² + 2 · 2 350 mm² = **30 620 mm²**

Körper rechts



Mantel: M = 663 dm² (siehe ■)

Grundfläche (= Deckfläche)
G = (6 · 3 + 7 · 8 + 4.5 · 5) dm² = 96.5 dm²

Oberfläche:
S = 663 dm² + 2 · 96.5 dm² = **856 dm²**

Die Oberfläche eines geraden Prismas

Die Oberfläche S des Prismas besteht aus dem Mantel M sowie der Grund- und der Deckfläche. Da Grund- und Deckfläche kongruent sind, kürzt man beide mit G ab.

$S = M + 2 \cdot G$ **Oberfläche = Mantel plus 2 mal Grundfläche**

J330 Arbeitsblatt

J331 a = 3 cm c = 5 cm h = 9 cm zu berechnen: b, G, M, S, V

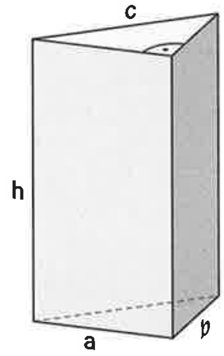
b: $\mathbf{b} = \sqrt{c^2 - a^2} = \mathbf{4\,cm}$

G: $\mathbf{G} = a \cdot b : 2 = \mathbf{6\,cm^2}$

V: $\mathbf{V} = G \cdot h = \mathbf{54\,cm^3}$

M: $u = a + b + c = 12\,cm$
$\mathbf{M} = u \cdot h = \mathbf{108\,cm^2}$

S: $\mathbf{S} = M + 2 \cdot G = \mathbf{120\,cm^2}$



a = 2.5 dm h = 8 dm G = 7.5 dm² zu berechnen: b, c, M, S, V

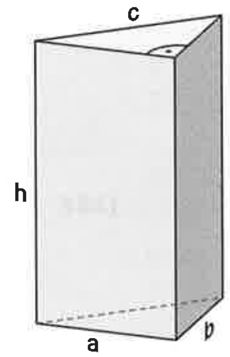
V: $\mathbf{V} = G \cdot h = \mathbf{60\,dm^3}$

b: $G = a \cdot b : 2 \quad | \cdot 2 : a$
$\mathbf{b} = G \cdot 2 : a$
$= \mathbf{6\,dm}$

c: $\mathbf{c} = \sqrt{a^2 + b^2} = \mathbf{6.5\,dm}$

M: $u = a + b + c = 15\,dm$
$\mathbf{M} = u \cdot h = \mathbf{120\,dm^2}$

S: $\mathbf{S} = M + 2 \cdot G = \mathbf{135\,dm^2}$



b = 15 mm c = 17 mm M = 400 mm² zu berechnen: a, h, G, S, V

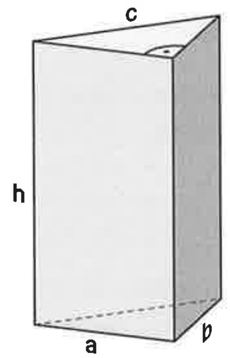
a: $\mathbf{a} = \sqrt{c^2 - b^2} = \mathbf{8\,mm}$

G: $\mathbf{G} = a \cdot b : 2 = \mathbf{60\,mm^2}$

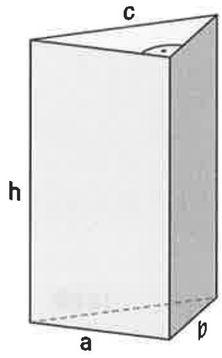
h: $M = u \cdot h \quad | : u \qquad u = a + b + c = 40\,mm$
$\mathbf{h} = M : u$
$= \mathbf{10\,mm}$

V: $\mathbf{V} = G \cdot h = \mathbf{600\,mm^3}$

S: $\mathbf{S} = M + 2 \cdot G = \mathbf{520\,mm^2}$



■ $a = 9\,\text{cm}$ $h = 7\,\text{cm}$ $V = 378\,\text{cm}^3$ zu berechnen: b, c, G, M, S



G: $V = G \cdot h \quad | : h$
$\mathbf{G} = V : h$
$= \mathbf{54\,cm^2}$

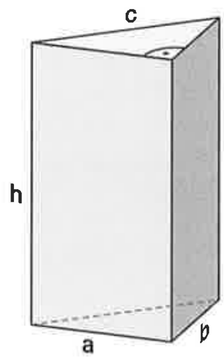
b: $G = a \cdot b : 2 \quad | \cdot 2 : a$
$\mathbf{b} = G \cdot 2 : a$
$= \mathbf{12\,cm}$

c: $\mathbf{c} = \sqrt{a^2 + b^2} = \mathbf{15\,cm}$

M: $u = a + b + c = 36\,\text{cm}$
$\mathbf{M} = u \cdot h = \mathbf{252\,cm^2}$

S: $\mathbf{S} = M + 2 \cdot G = \mathbf{360\,cm^2}$

■ $b = 4.8\,\text{cm}$ $M = 144\,\text{cm}^2$ $S = 153.6\,\text{cm}^2$ $V = 57.6\,\text{cm}^3$ zu berechnen: a, c, h, G



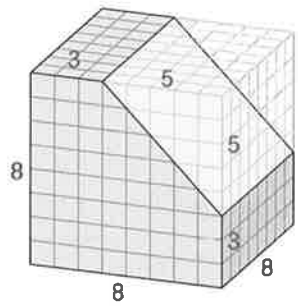
G: $S = M + 2 \cdot G \quad | - M \quad | : 2$
$\mathbf{G} = (S - M) : 2$
$= \mathbf{4.8\,cm^2}$

h: $V = G \cdot h \quad | : G$
$\mathbf{h} = V : G$
$= \mathbf{12\,cm}$

a: $G = a \cdot b : 2 \quad | \cdot 2 : b$
$\mathbf{a} = G \cdot 2 : a$
$= \mathbf{2\,cm}$

c: $\mathbf{c} = \sqrt{a^2 + b^2} = \mathbf{5.2\,cm}$

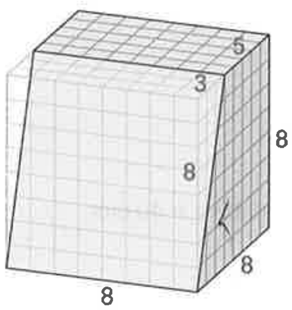
J332



$G = 8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} - \frac{5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm}}{2} = 51.5\,\text{cm}$

$u = 22\,\text{cm} + \sqrt{5^2 + 5^2}\,\text{cm} = 29.071...\,\text{cm}$
$h = 8\,\text{cm}$
$\mathbf{M} = u \cdot h = 232.568...\,\text{cm} \approx \mathbf{232.57\,cm^2}$

$\mathbf{S} = M + 2G \approx \mathbf{335.57\,cm^2}$



$G = 8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} - \frac{3\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm}}{2} = 52\,\text{cm}$

$u = 21\,\text{cm} + \sqrt{3^2 + 8^2}\,\text{cm} = 29.544...\,\text{cm}$
$h = 8\,\text{cm}$
$\mathbf{M} = u \cdot h = 236.352...\,\text{cm} \approx \mathbf{236.35\,cm^2}$

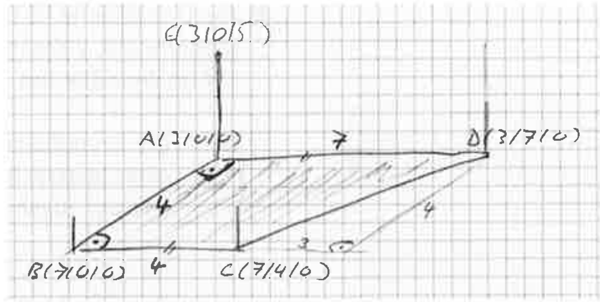
$\mathbf{S} = M + 2G \approx \mathbf{340.35\,cm^2}$

J333 Arbeitsblatt

Einheiten

Wir lassen bei dieser und der folgenden Aufgabe im Koordinatensystem die Angabe der Einheiten weg. Alle Längenangaben sind in **Koordinaten-Einheiten**, alle Flächenangaben in **Flächen-Einheiten**, alle Volumenangaben in **Volumen-Einheiten**.

J334 **a** Die Grundfläche ABCD liegt in der xy-Ebene (z-Koordinaten = 0). Die Höhe des geraden Prismas lässt sich an AE ablesen: E liegt 5 Einheiten über A. Es genügt deshalb, die Grundfläche zu skizzieren.

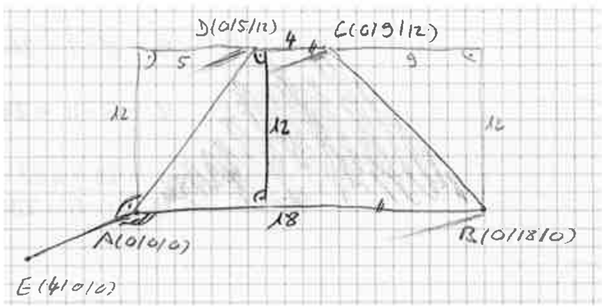


G: Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Trapez mit Parallelseiten der Länge 4 und 7 und der Höhe 4: $m_{⏢} = 5.5$ $h_{⏢} = 4$
$\mathbf{G} = m_{⏢} \cdot h_{⏢} = 5.5 \cdot 4 = \mathbf{22}$

V: $h = AE = 5$
$\mathbf{V} = G \cdot h = 22 \cdot 5 = \mathbf{110}$

M: $CD = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ $u = 7 + 4 + 4 + 5 = 20$
$\mathbf{M} = u \cdot h = 20 \cdot 5 = \mathbf{100}$

b Die Grundfläche ABCD liegt in der yz-Ebene (Rückwand, x-Koordinaten = 0).
Die Höhe des geraden Prismas lässt sich an AE ablesen: E liegt 4 Einheiten vor A.
Es genügt, die Grundfläche zu skizzieren.

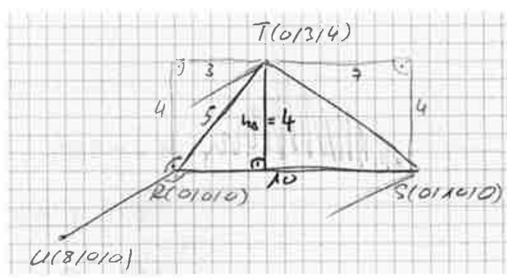


G: Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Trapez mit Parallelseiten der Länge 18 und 4 und der Höhe 12: $m_{⏢} = 11$ $h_{⏢} = 12$
$\mathbf{G} = m_{⏢} \cdot h_{⏢} = 11 \cdot 12 = \mathbf{132}$

V: $h = AE = 4$
$\mathbf{V} = G \cdot h = 132 \cdot 4 = \mathbf{528}$

M: $AD = \sqrt{12^2+5^2} = 13$ $BC = \sqrt{12^2+9^2} = 15$ $u = 18 + 15 + 4 + 13 = 50$
$\mathbf{M} = u \cdot h = 50 \cdot 4 = \mathbf{200}$

J335 **a** Die Grundfläche RST liegt in der yz-Ebene (Rückwand, x-Koordinaten = 0).
RU ist die Höhe des Prismas.

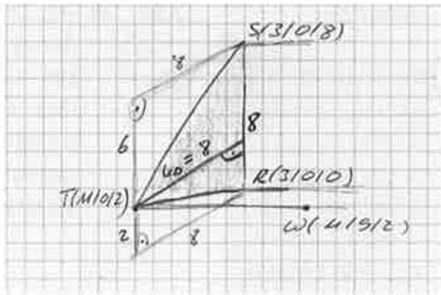


G: Die Grundfläche ist ein Dreieck mit einer waagrechten Seite der Länge 10 und der zugehörigen Höhe 4:
$RS = 10$ $h_\triangle = 4$
$\mathbf{G} = RS \cdot h_\triangle : 2 = 10 \cdot 4 : 2 = \mathbf{20}$

V: $h = RU = 8$
$\mathbf{V} = G \cdot h = 20 \cdot 8 = \mathbf{160}$

M: $RT = \sqrt{4^2+3^2} = 5$ $ST = \sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{65} = 8.062\ldots$
$u = 10 + 5 + \sqrt{65} = 23.062\ldots$
$\mathbf{M} = u \cdot h = 23.062\ldots \cdot 8 \approx \mathbf{184.50}$

■ Die Grundfläche RST liegt in der xz-Ebene (Seitenwand, y-Koordinaten = 0).
TW ist die Höhe des Prismas.



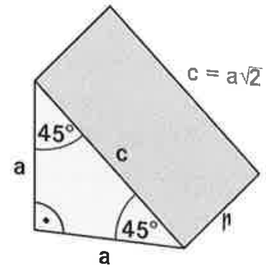
G: Die Grundfläche ist ein Dreieck mit einer senkrechten Seite der Länge 8 und der zugehörigen Höhe 8:

$RS = 8 \qquad h_\triangle = 8$
$\mathbf{G} = RS \cdot h_\triangle : 2 = 8 \cdot 8 : 2 = \mathbf{32}$

V: $h = TW = 9$
$\mathbf{V} = G \cdot h = 32 \cdot 9 = \mathbf{288}$

M: $ST = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \qquad RT = \sqrt{2^2 + 8^2} = \sqrt{68} = 8.246\ldots$
$u = 8 + 10 + \sqrt{68} = 26.246\ldots$
$\mathbf{M} = u \cdot h = 26.246\ldots \cdot 9 \approx \mathbf{236.22}$

J336 ■ $a = 7\,\text{dm} \qquad h = 10\,\text{dm}$ zu berechnen: c, G, M, V



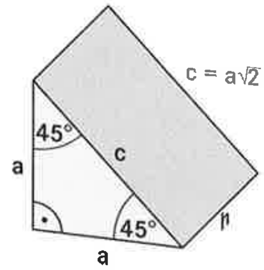
c: $\mathbf{c} = a\sqrt{2} = 9.899\ldots\,\text{dm} \approx \mathbf{9.90\,dm}$

G: $\mathbf{G} = a^2 : 2 = \mathbf{24.5\,dm^2}$

V: $\mathbf{V} = G \cdot h = \mathbf{245\,dm^3}$

M: $u = 2a + a\sqrt{2} = 23.899\ldots\,\text{dm}$
$\mathbf{M} = u \cdot h \approx \mathbf{238.99\,dm^2}$

■ $c = 65\,\text{mm} \qquad h = 92\,\text{mm}$ zu berechnen: a, G, M, V



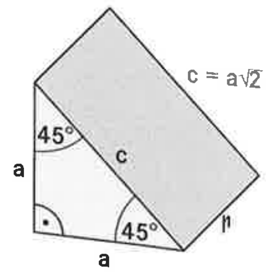
a: $c = a\sqrt{2} \qquad | : \sqrt{2}$
$\mathbf{a} = c : \sqrt{2} = 45.961\ldots\,\text{cm} \approx \mathbf{45.96\,mm}$

G: $\mathbf{G} = a^2 : 2 = \mathbf{1\,056.25\,mm^2}$

V: $\mathbf{V} = G \cdot h = \mathbf{97\,175\,mm^3}$

M: $u = 2a + c = 156.923\ldots\,\text{mm}$
$\mathbf{M} = u \cdot h \approx \mathbf{14\,437\,mm^2}$

■ $a = 5\,\text{cm} \qquad V = 1\,\text{dm}^3 = 1\,000\,\text{cm}^3$ zu berechnen: c, h, G, M



c: $\mathbf{c} = a\sqrt{2} = 7.071\ldots\,\text{cm} \approx \mathbf{7.07\,cm}$

G: $\mathbf{G} = a^2 : 2 = \mathbf{12.5\,cm^2}$

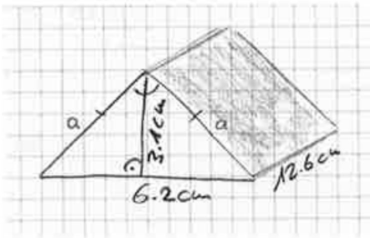
h: $V = G \cdot h \qquad | : G$
$\mathbf{h} = V : G = \mathbf{80\,cm}$

M: $u = 2a + a\sqrt{2} = 17.071\ldots\,\text{cm}$
$\mathbf{M} = u \cdot h \approx \mathbf{1\,365.69\,cm^2}$

J337 ■ V: $G = 6.2\,\text{cm} \cdot 3.1\,\text{cm} : 2 = 9.61\,\text{cm}^2$

$h = 12.6\,\text{cm}$

$\mathbf{V} = G \cdot h = 121.086\,\text{cm}^3 \approx \mathbf{121.09\,cm^3}$



M: $a = 3.1\sqrt{2}\,\text{cm} = 4.384\ldots\text{cm}$

$u = 6.2\,\text{cm} + 2a = 14.968\ldots\text{cm}$

$\mathbf{M} = u \cdot h = 188.598\ldots\text{cm}^2 \approx \mathbf{188.60\,cm^2}$

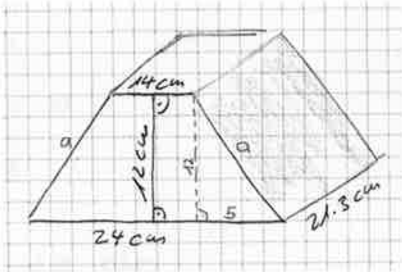
S: $\mathbf{S} = M + 2 \cdot G \approx \mathbf{207.82\,cm^2}$

■ V: $m = 19\,\text{cm}$ $\quad h_{\triangle} = 12\,\text{cm}$

$G = m_{\triangle} \cdot h_{\triangle} = 228\,\text{cm}^2$

$h = 21.3\,\text{cm}$

$\mathbf{V} = G \cdot h = \mathbf{4\,856.4\,cm^3}$



M: $a = \sqrt{12^2+5^2}\,\text{cm} = 13\,\text{cm}$

$u = (24 + 2 \cdot 13 + 14)\,\text{cm} = 64\,\text{cm}$

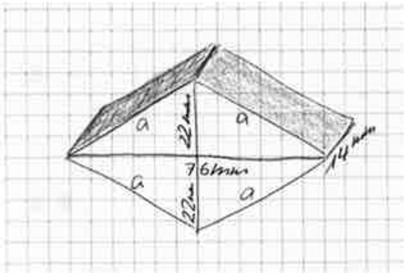
$\mathbf{M} = u \cdot h = \mathbf{1\,363.2\,cm^2}$

S: $\mathbf{S} = M + 2 \cdot G \approx \mathbf{1\,819.2\,cm^2}$

■ V: $G = 76\,\text{mm} \cdot 44\,\text{mm} : 2 = 1\,672\,\text{mm}^2$

$h = 14\,\text{mm}$

$\mathbf{V} = G \cdot h = \mathbf{23\,408\,mm^3}$



M: $a = \sqrt{38^2+22^2}\,\text{mm} = 43.908\ldots\text{mm}$

$u = 4a = 175.635\ldots\text{mm}$

$\mathbf{M} = u \cdot h = 2458.903\ldots\text{mm}^2 \approx \mathbf{2\,458.90\,mm^2}$

S: $\mathbf{S} = M + 2 \cdot G \approx \mathbf{5802.90\,mm^2}$

J338 Beide Prismen haben ein **halbes gleichseitiges Dreieck** als Grundfläche.

■ S: $s = 18.6\,\text{cm}$ $\quad s/2 = 9.3\,\text{cm}$

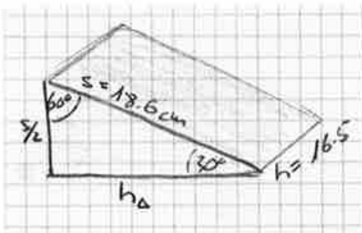
$h_{\triangle} = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = 16.108\ldots\text{cm}$

oder (Spur I):

$h_{\triangle} = \sqrt{18.6^2 - 9.3^2}\,\text{cm} = 16.108\ldots\text{cm}$

$u = s + \frac{s}{2} + h_{\triangle} = 44.008\ldots\text{cm}$

$h = 16.5\,\text{cm}$



$M = u \cdot h = 726.13\ldots\text{cm}^2$

$G = \frac{s}{2} \cdot h_{\triangle} : 2 = \frac{s^2}{8} \cdot \sqrt{3} = 74.902\ldots\text{cm}^2$

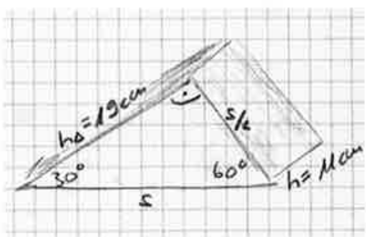
$\mathbf{S} = M + 2 \cdot G \approx \mathbf{875.94\,cm^2}$

■ M: $h_{\triangle} = 19\,\text{cm}$ $\qquad h = 11\,\text{cm}$

$\frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = h_{\triangle} \qquad | \cdot 2 : \sqrt{3}$

$s = h_{\triangle} \cdot 2 : \sqrt{3}$

$s = 19\,\text{cm} \cdot 2 : \sqrt{3} = 21.939\ldots\text{cm}$



$u = h_{\triangle} + 1.5\,s = 51.908\ldots\text{cm}$

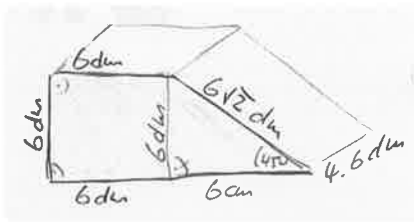
$\mathbf{M} = u \cdot h \approx \mathbf{571.00\,cm^2}$

V: $G = \frac{s}{2} \cdot h_{\triangle} : 2 = 104.211\ldots\text{cm}^2$

$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{1\,146.33\,cm^3}$

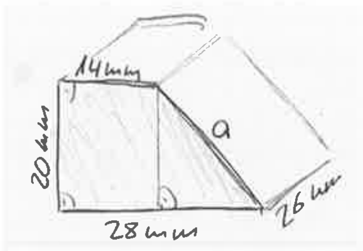
J339 V: $G = 36\,dm^2 + 18\,dm^2 = 54\,dm^2$
$h = 4.6\,dm$
$V = G \cdot h = \mathbf{248.4\,dm^3}$

M: $u = 4 \cdot 6\,dm + 6\sqrt{2}\,dm = 32.485...\,dm$
$M = u \cdot h = \mathbf{149.43\,dm^2}$



V: Trapez: $m = 21\,mm$ $h_{\triangle} = 20\,mm$
$G = m \cdot h_{\triangle} = 420\,mm^2$
$h = 26\,mm$
$V = G \cdot h = \mathbf{10\,920\,mm^3}$

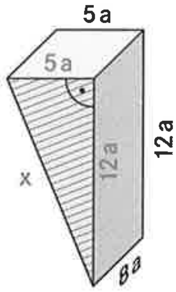
M: $a = \sqrt{14^2 + 20^2}\,mm$
$u = (14 + 20 + 28 + \sqrt{14^2 + 20^2})mm = 86.413...\,mm$
$M = u \cdot h \approx \mathbf{2246.74\,mm^2}$



J340 a V: $G = 5a \cdot 12a : 2 = 30a^2$
$h = 8a$
$V = G \cdot h = \mathbf{240\,a^3}$

M: $x = \sqrt{(5a)^2 + (12a)^2} = 13a$
$M = u \cdot h = (5a + 12a + 13a) \cdot 8a = 30a \cdot 8a = \mathbf{240\,a^2}$

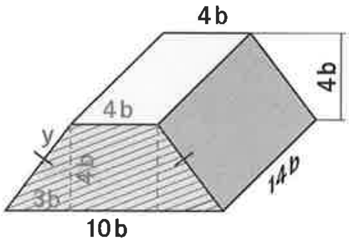
S: $S = M + 2G = 240\,a^2 + 60\,a^2 = \mathbf{300\,a^2}$



b V: Trapez: $m = 7b$ $h_{\triangle} = 4b$
$G = 7b \cdot 4b = 28\,b^2$
$h = 14b$
$V = G \cdot h = \mathbf{392\,b^3}$

M: $y = \sqrt{(3b)^2 + (4b)^2} = 5b$
$M = u \cdot h = 24b \cdot 14b = \mathbf{336\,b^2}$

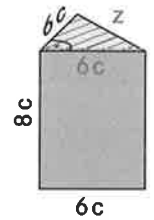
S: $S = M + 2G = 336b^2 + 56b^2 = \mathbf{392\,b^2}$



c V: $G = 6c \cdot 6c : 2 = 18c^2$
$h = 8c$
$V = G \cdot h = \mathbf{144\,c^3}$

M: $z = 6c\sqrt{2}$
$M = u \cdot h = (12c + 6c\sqrt{2}) \cdot 8c = 163.882...\,c^2 \approx \mathbf{163.88\,c^2}$

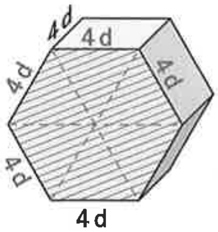
S: $S = M + 2G \approx 163.88\,c^2 + 36\,c^2 = \mathbf{199.88\,c^2}$



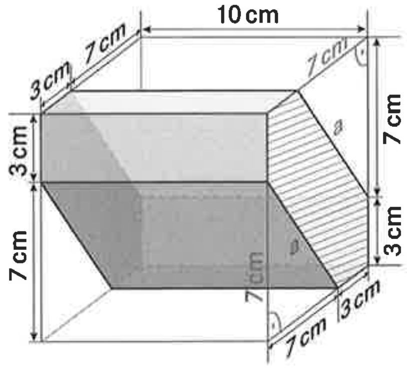
d M: $u = 6 \cdot 4d = 24d$
$h = 4d$
$M = u \cdot h = 24d \cdot 4d = \mathbf{96\,d^2}$

V: $G = 6 \cdot 4d \cdot 2d \cdot \sqrt{3} : 2 = 24d^2 \cdot \sqrt{3}$
$V = G \cdot h = 24d^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4d = 96d^2 \cdot \sqrt{3} \approx \mathbf{166.28\,d^3}$

S: $S = M + 2G = 96d^2 + 2 \cdot 24d^2 \cdot \sqrt{3} = \mathbf{179.14\,d^2}$



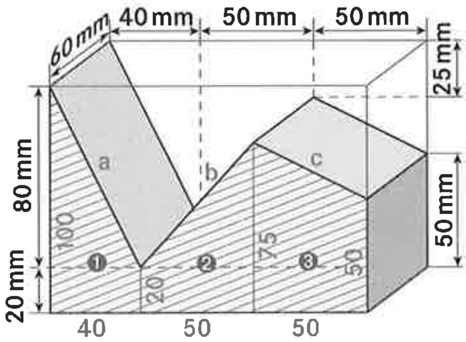
J341 **V:** $G = (10\,\text{cm})^2 - (7\,\text{cm})^2 = 51\,\text{cm}^2$
$h = 10\,\text{cm}$
$\mathbf{V = G \cdot h = 510\,cm^3}$



M: $a = 7\sqrt{2}\ \text{cm}$ oder $a = \sqrt{7^2+7^2}\ \text{cm} = 9.899...\text{cm}$
$u = 12\,\text{cm} + 2 \cdot a = 31.798...\ \text{cm}$
$\mathbf{M} = u \cdot h = 317.989...\ \text{cm}^2 \approx \mathbf{317.99\,cm^2}$

S: $\mathbf{S} = M + 2G = 317.989...\ \text{cm}^2 + 102\,\text{cm}^2$
$= \mathbf{419.99\,cm^2}$

J342 G: G = Trapez❶ + Trapez❷ + Trapez❸

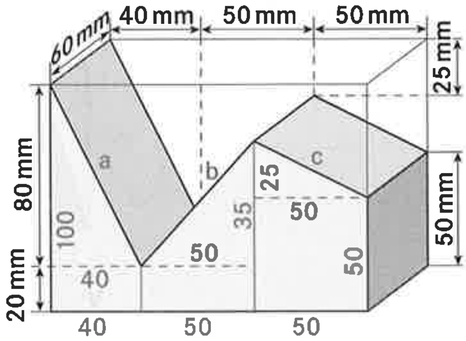


Trapez❶: $m_1 = 60\,\text{mm},\ h_1 = 40\,\text{mm}$
$A_❶ = m_1 \cdot h_1 = 2\,400\,\text{mm}^2$

Trapez❷: $m_2 = 47.5\,\text{mm},\ h_2 = 50\,\text{mm}$
$A_❷ = m_2 \cdot h_2 = 2\,375\,\text{mm}^2$

Trapez❸: $m_3 = 62.5\,\text{mm},\ h_3 = 50\,\text{mm}$
$A_❸ = m_3 \cdot h_3 = 3\,125\,\text{mm}^2$

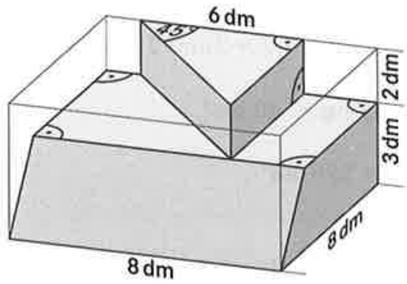
$G = A_❶ + A_❷ + A_❸ = 7\,900\,\text{mm}^2$

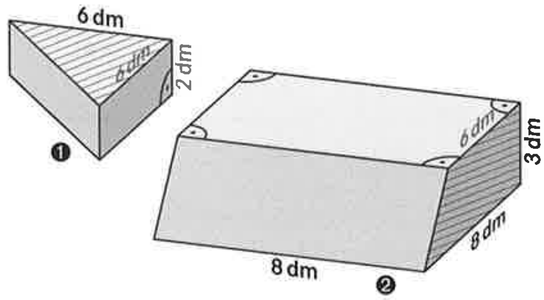


M: $a = \sqrt{80^2+40^2}\,\text{mm}$
$b = \sqrt{35^2+50^2}\,\text{mm}$
$c = \sqrt{25^2+50^2}\,\text{mm}$
$u = 100\,\text{mm} + 140\,\text{mm} + 50\,\text{mm} + c + b + a$
$= 509.674...\,\text{mm}$
$h = 60\,\text{mm}$
$\mathbf{M} = u \cdot h = 60\,\text{mm} \cdot 509.674...\ \text{mm}$
$= 30\,580.485...\,\text{mm}^2 \approx \mathbf{30\,580.49\,mm^2}$

S: $\mathbf{S} = M + 2G$
$= 30\,580.485...\,\text{mm}^2 + 15\,800\,\text{mm}^2 \approx \mathbf{46\,380.49\,mm^2}$

J343 ■





V: Der Körper kann beispielsweise in die beiden Prismen ❶ und ❷ zerlegt werden.
$\mathbf{V_{gesamt}} = V_❶ + V_❷$

$V_❶$: $G_❶ = 6\,\text{dm} \cdot 6\,\text{dm} : 2 = 18\,\text{dm}^2$
$h_❶ = 2\,\text{dm}$
$V_❶ = G_❶ \cdot h_❶ = 36\,\text{dm}^3$

$V_❷$: $G_❷ = 7\,\text{dm} \cdot 3\,\text{dm} = 21\,\text{dm}^2$
$h_❷ = 8\,\text{dm}$
$V_❷ = G_❷ \cdot h_❷ = 168\,\text{dm}^3$

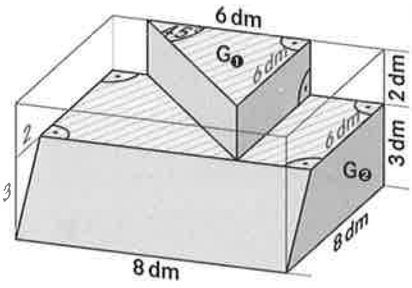
$\mathbf{V_{gesamt}} = V_❶ + V_❷ = \mathbf{204\,dm^3}$

→

→ **S:** **Lösungsweg 1: mit den Mänteln der beiden Teilprismen**

S = Mantel❷ + 2·G❷ + Mantel❶

G❶ ist im Mantel❷ «enthalten».



Mantel❷ = (17 dm + $\sqrt{3^2+2^2}$ dm) · 8 dm = 164.844... dm^2

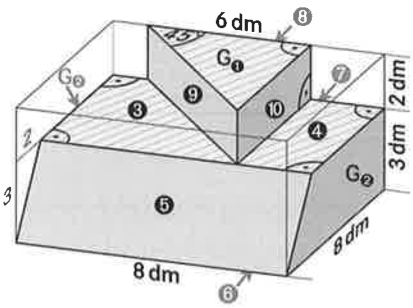
2·G❷ = 42 dm^2

Mantel❶ = (12 dm + 6·$\sqrt{2}$dm) · 2 dm = 40.970... dm^2

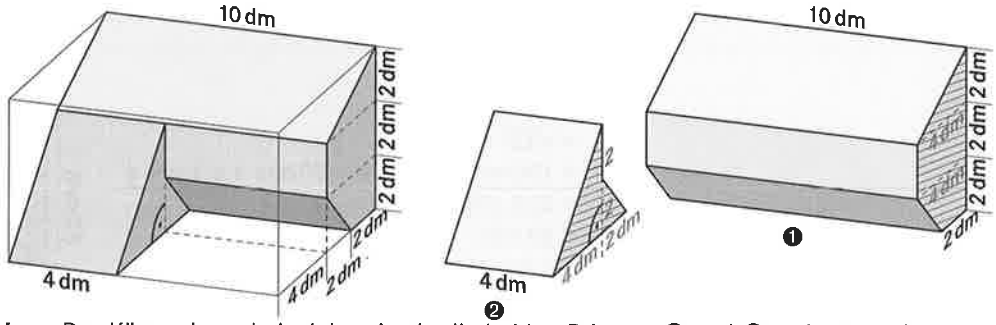
S_{gesamt} ≈ **247.81 dm^2**

Lösungsweg 2: alle Flächen einzeln

S = (G❶ + ❸ + ❹) + 2·G❷ + ❺ + ❻ + ❼ + ❽ + ❾ + ❿



G❶ + ❸ + ❹ = 8 dm·6 dm	=	48 dm^2
2·G❷	=	42 dm^2
❺ = 8 dm· $\sqrt{3^2+2^2}$ dm	=	28.844... dm^2
❻ = 8 dm·8 dm	=	64 dm^2
❼ = 8 dm·3 dm	=	24 dm^2
❽ = 6 dm·2 dm	=	12 dm^2
❾ = $\sqrt{6^2+6^2}$ dm·2 dm	=	16.970... dm^2
❿ = 6 dm·2 dm	=	12 dm^2
S_{gesamt}	≈	**247.81 dm^2**



V: Der Körper kann beispielsweise in die beiden Prismen ❶ und ❷ zerlegt werden.

V_{gesamt} = V❶ + V❷

V❶: G❶ = 3 dm · 2 dm + 4 dm · 2 dm + 4 dm · 2 dm : 2 = 18 dm^2

h❶ = 10 dm

V❶ = G❶ · h❶ = 180 dm^3

V❷: G❷ = 4 dm · 4 dm : 2 + 2 dm · 2 dm : 2 = 10 dm^2

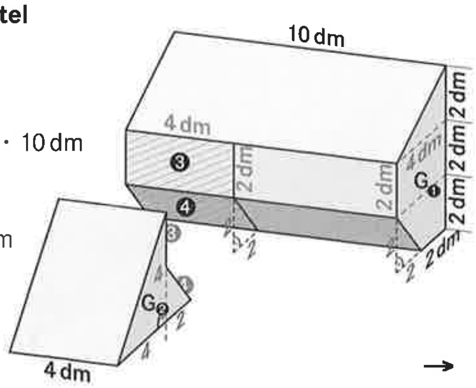
h❷ = 4 dm

V❷ = G❷ · h❷ = 40 dm^3

V_{gesamt} = V❶ + V❷ = **220 dm^3**

S: **Lösungsweg 1: mit Mantel und Teilmantel**

S = Mantel❶ − ❸ − ❹ + 2·G❶
+ 2·G❷ + Teilmantel❷ ohne ❸ und ❹



Mantel❶ = (10 dm + $\sqrt{4^2+2^2}$ dm + 2·$\sqrt{2}$dm) · 10 dm = 173.005... dm^2

2·G❶ + 2·G❷ = 56 dm^2

minus ❸ und ❹ = − (2 dm + 2·$\sqrt{2}$dm) · 4 dm = −19.313... dm^2

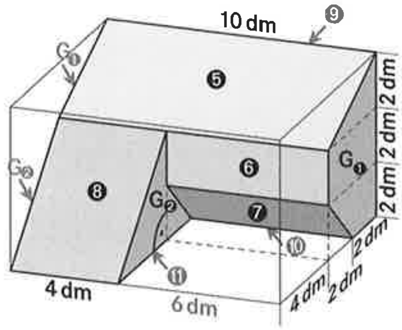
Teilmantel❷ = (6 dm + 4·$\sqrt{2}$dm) · 4 dm = 46.627... dm^2

S_{gesamt} ≈ **256.32 dm^2** →

→ **Lösungsweg 2: alle Flächen einzeln**

S = 2·G❶ + 2·G❷ + ❺ + ❻ + ❼ + ❽ + ❾ + ❿ + ⓫

2·G❶	=	$36\,dm^2$
2·G❷	=	$20\,dm^2$
❺ = $10\,dm \cdot \sqrt{4^2+2^2}\,dm$	=	$44.721...\,dm^2$
❻ = $6\,dm \cdot 2\,dm$	=	$12\,dm^2$
❼ = $6\,dm \cdot \sqrt{2^2+2^2}\,dm$	=	$16.970...\,dm^2$
❽ = $4\,dm \cdot \sqrt{4^2+4^2}\,dm$	=	$22.627...\,dm^2$
❾ = $10\,dm \cdot 6\,dm$	=	$60\,dm^2$
❿ = $10\,dm \cdot 2\,dm$	=	$20\,dm^2$
⓫ = $4\,dm \cdot 6\,dm$	=	$24\,dm^2$
S_{gesamt}	≈	**$256.32\,dm^2$**



J344 Arbeitsblatt

J345 **a** V: Grundfläche = Rechteck − Dreieck

$G = 18a \cdot 10a - \frac{15a \cdot 8a}{2} = 120\,a^2$

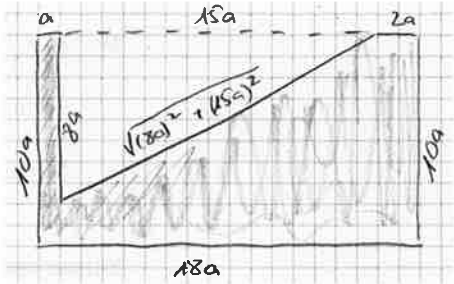
$h = 9a$

V $= 120a^2 \cdot 9a =$ **$1080\,a^3$**

S: $u = 49a + \sqrt{(15a)^2+(8a)^2} = 49a + 17a = 66a$

$M = u \cdot h = 66a \cdot 9a =$ **$594\,a^2$**

S $= M + 2G = 594a^2 + 240a^2 =$ **$834\,a^2$**



b V: Der Körper lässt sich beispielsweise in den Quader unten und das Prisma oben zerlegen.

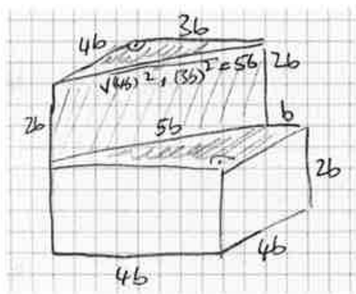
$V_{Quader} = 4b \cdot 4b \cdot 2b = 32b^3$

$V_{Prisma} = \frac{4b \cdot 3b}{2} \cdot 2b = 12b^3$

V $= 32b^3 + 12b^3 =$ **$44b^3$**

S: S = Grundfläche$_{Quader}$ + beide Deckflächen + Mantel$_{Quader}$ + Mantel$_{Prisma}$

S $= 16b^2 + 16b^2 + 16b \cdot 2b + 12b \cdot 2b =$ **$88b^2$**



J346 **a** V: Grundfläche = Quadrat − 2Dreiecke

$G = (2a)^2 - a^2 = 3a^2$

$h = 2a$

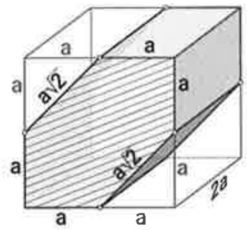
V $= 3a^2 \cdot 2a =$ **$6\,a^3$**

M: $u = 4a + 2 \cdot a\sqrt{2}$

M $= u \cdot h = (4a + 2 \cdot a\sqrt{2}) \cdot 2a = 8a^2 + 4a^2\sqrt{2} =$ **$4a^2(2 + \sqrt{2})$**

$\approx 13.66a^2$

S: **S** $= M + 2G = 8a^2 + 4a^2\sqrt{2} + 2 \cdot 3a^2 = 14a^2 + 4a^2\sqrt{2} =$ **$2a^2(7 + 2\sqrt{2}) \approx 19.66a^2$**



b V: Grundfläche = Rechteck + Dreieck

$G = a \cdot 2a + \frac{a^2}{2} = 2.5a^2$

$h = 2a$

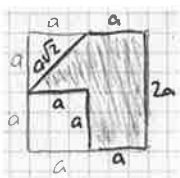
V $= 2.5a^2 \cdot 2a =$ **$5\,a^3$**

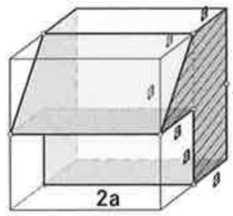
M: $u = 6a + a\sqrt{2}$

M $= u \cdot h = (6a + a\sqrt{2}) \cdot 2a = 12a^2 + 2a^2\sqrt{2} =$ **$2a^2(6 + \sqrt{2})$**

$\approx 14.83a^2$

S: **S** $= M + 2G = 12a^2 + 2a^2\sqrt{2} + 2 \cdot 2.5a^2 = 17a^2 + 2a^2\sqrt{2} =$ **$a^2(17 + 2\sqrt{2}) \approx 19.83a^2$**



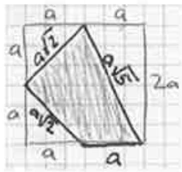


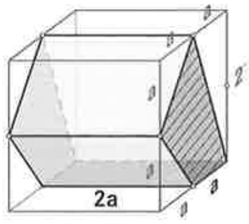
■ **V:** Grundfläche = Quadrat − 3Dreiecke

$G = 4a^2 - 2\cdot\frac{a^2}{2} - \frac{2a^2}{2} = 2a^2$

$h = 2a$

$\mathbf{V} = 2a^2\cdot 2a = \mathbf{4a^3}$





M: $u = a + a\sqrt{5} + 2\cdot a\sqrt{2}$

$\mathbf{M} = u\cdot h = (a + a\sqrt{5} + 2a\sqrt{2})\cdot 2a = 2a^2 + 2a^2\sqrt{5} + 4a^2\sqrt{2}$

$= \mathbf{2a^2(1+\sqrt{5}+2\sqrt{2})} \approx \mathbf{12.13a^2}$

S: $\mathbf{S} = M + 2G = 2a^2 + 2a^2\sqrt{5} + 4a^2\sqrt{2} + 2\cdot 2a^2 = 6a^2 + 2a^2\sqrt{5} + 4a^2\sqrt{2}$

$= \mathbf{2a^2(3+\sqrt{5}+2\sqrt{2})} \approx \mathbf{16.13a^2}$

J347 **Körper links**

G: $G = a\sqrt{2}\cdot 2a : 2 = \mathbf{a^2\sqrt{2}}$

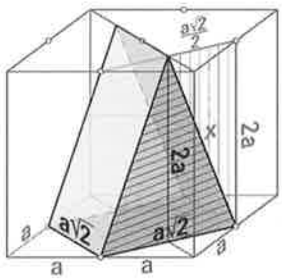
V: $h = a\sqrt{2}$

$\mathbf{V} = G\cdot h = a^2\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2} = \mathbf{2a^3}$

M: $x = \sqrt{(2a)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{4a^2+\frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{9a^2}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$

$u = a\sqrt{2} + 2x = a\sqrt{2} + 2\cdot\frac{3a}{\sqrt{2}} = 4a\sqrt{2}$

$\mathbf{M} = u\cdot h = 4a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2} = \mathbf{8a^2}$



Körper rechts

G: $G = a\sqrt{2}\cdot 2a : 2 = \mathbf{a^2\sqrt{2}}$

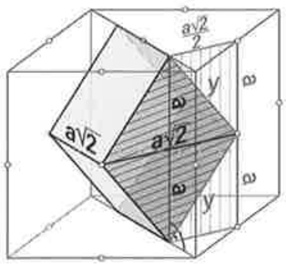
V: $h = a\sqrt{2}$

$\mathbf{V} = G\cdot h = a^2\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2} = \mathbf{2a^3}$

M: $y = \sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{3a^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot a$

$u = 4\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot a = 4a\sqrt{1.5}$

$\mathbf{M} = u\cdot h = 4\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot a\cdot a\sqrt{2} = \mathbf{4a^2\sqrt{3}} \approx \mathbf{6.93a^2}$



Beide Körper haben die gleich grosse Grundfläche und die gleiche Höhe, also das gleiche Volumen. Das vierseitige Prisma hat aber den kleineren Mantel, da der Umfang der Grundfläche kleiner ist als beim dreiseitigen ($4a\sqrt{1.5} < 4a\sqrt{2}$).

J348 ■ **V:** Grundfläche = Rechteck + Dreieck

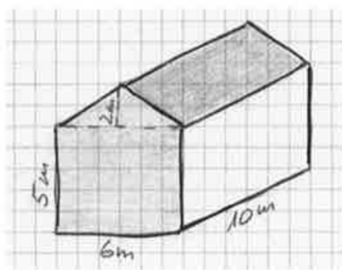
$G = 6\,m\cdot 5\,m + \frac{6\,m\cdot 2\,m}{2} = 36\,m^2$

$h = 10\,m$

$\mathbf{V} = G\cdot h = 36\,m^2\cdot 10\,m = \mathbf{360\,m^3}$

$\mathbf{A_{Dach}}$: $x = \sqrt{3^2+2^2}\,m = \sqrt{13}\,m = 3.605...\,m$

$\mathbf{A_{Dach}} = 2x\cdot 10\,m = 2\cdot\sqrt{13}\,m\cdot 10\,m \approx \mathbf{72.11\,m^2}$



■ **V:** Grundfläche = Rechteck + Trapez + Dreieck

$G = 8\,m\cdot 4\,m + 7\,m\cdot 2\,m + \frac{6\,m\cdot 2\,m}{2} = 52\,m^2$

$h = 9\,m$

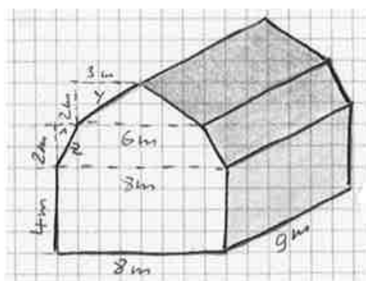
$\mathbf{V} = G\cdot h = 52\,m^2\cdot 9\,m = \mathbf{468\,m^3}$

$\mathbf{A_{Dach}}$: $y = \sqrt{3^2+2^2}\,m = \sqrt{13}\,m = 3.605...\,m$

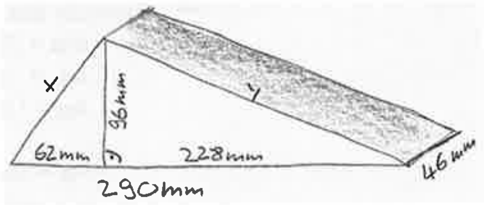
$z = \sqrt{1^2+2^2}\,m = \sqrt{5}\,m = 2.236...\,m$

$\mathbf{A_{Dach}} = (2x+2y)\cdot 9\,m = (2\cdot\sqrt{13}\,m + 2\cdot\sqrt{5}\,m)\cdot 9\,m$

$\approx \mathbf{105.15\,m^2}$



J349 **V:** $G = \dfrac{290\,\text{mm} \cdot 96\,\text{mm}}{2} = 13\,920\,\text{mm}^2$



$h = 46\,\text{mm}$

$\mathbf{V} = G \cdot h = \mathbf{640\,320\,mm^3}$

M: $x = \sqrt{62^2+96^2}\,\text{mm}$

$y = \sqrt{228^2+96^2}\,\text{mm}$

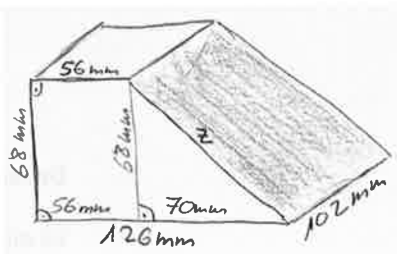
$u = 290\,\text{mm} + x + y =$

$= (290 + \sqrt{62^2+96^2} + \sqrt{228^2+96^2})\,\text{mm} = 651.666\ldots\,\text{mm}$

$\mathbf{M} = u \cdot h = 29\,976.666\ldots\,\text{mm}^2 \approx \mathbf{29\,976.67\,mm^2}$

S: $\mathbf{S} = M + 2G \approx \mathbf{57\,816.67\,mm^2}$

V: $G = \dfrac{126\,\text{mm} + 56\,\text{mm}}{2} \cdot 68\,\text{mm} = 6\,188\,\text{mm}^2$



$h = 102\,\text{mm}$

$\mathbf{V} = G \cdot h = \mathbf{631\,176\,mm^3}$

M: $z = \sqrt{70^2+68^2}\,\text{mm}$

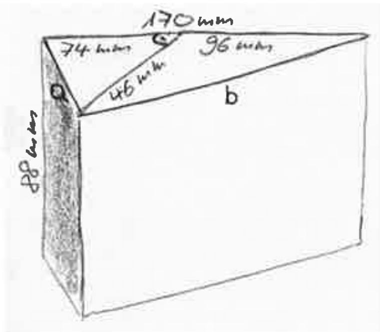
$u = (56 + 68 + 126 + \sqrt{70^2+68^2})\,\text{mm}$

$= 347.590\ldots\,\text{mm}$

$\mathbf{M} = u \cdot h = 35\,454.280\ldots\,\text{mm}^2 \approx \mathbf{35\,454.28\,mm^2}$

S: $\mathbf{S} = M + 2G \approx \mathbf{47830.28\,mm^2}$

V: $G = \dfrac{170\,\text{mm} \cdot 46\,\text{mm}}{2} = 3\,910\,\text{mm}^2$



$h = 88\,\text{mm}$

$\mathbf{V} = G \cdot h = \mathbf{344\,080\,mm^3}$

M: $a = \sqrt{74^2+46^2}\,\text{mm}$

$b = \sqrt{96^2+46^2}\,\text{mm}$

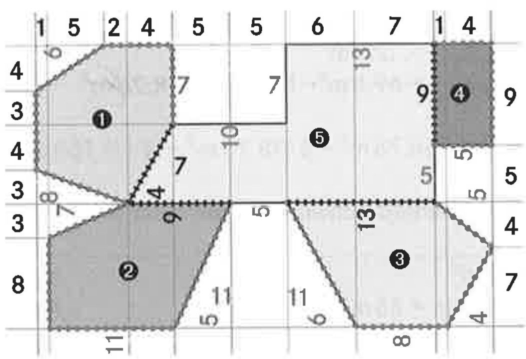
$u = (170 + \sqrt{74^2+46^2} + \sqrt{96^2+46^2})\,\text{mm}$

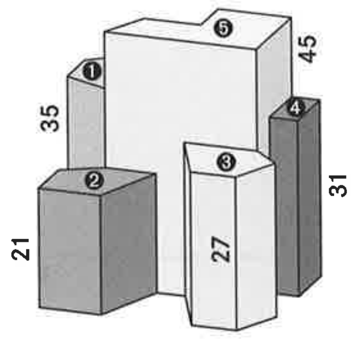
$= 363.583\ldots\,\text{mm}$

$\mathbf{M} = u \cdot h = 31\,995.387\ldots\,\text{mm}^2 \approx \mathbf{31\,995.39\,mm^2}$

S: $\mathbf{S} = M + 2G \approx \mathbf{39815.39\,mm^2}$

J350





Fassade der angebauten Gebäude

angebaute Flächen

Fassade der angebauten Gebäude (in Quadratmetern)

❶: $F_{❶} = (7 + 6 + \sqrt{6^2+4^2} + 7 + \sqrt{8^2+3^2}) \cdot 35 = (20 + \sqrt{52} + \sqrt{73}) \cdot 35 =$ 1 251.428...

❷: $F_{❷} = (\sqrt{7^2+3^2} + 8 + 11 + \sqrt{11^2+5^2}) \cdot 21 = (19 + \sqrt{58} + \sqrt{146}) \cdot 21 =$ 812.675...

❸: $F_{❸} = (\sqrt{11^2+6^2} + 8 + \sqrt{4^2+7^2} + \sqrt{5^2+4^2}) \cdot 27 = (8 + \sqrt{157} + \sqrt{65} + \sqrt{41}) \cdot 27 =$ 944.874...

❹: $F_{❹} = (5 + 9 + 5) \cdot 31 = 19 \cdot 31 =$ 589

→

→ **Fassade des Kerngebäudes = Mantel – angebaute Flächen** (in Quadratmetern)

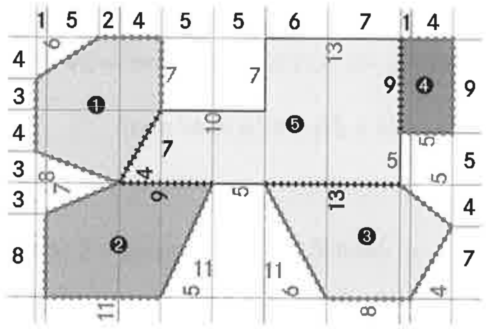
❺: $M_{\text{❺}} = (27 + 14 + 13 + 7 + 10 + \sqrt{4^2+7^2}) \cdot 45 = (71 + \sqrt{65}) \cdot 45$

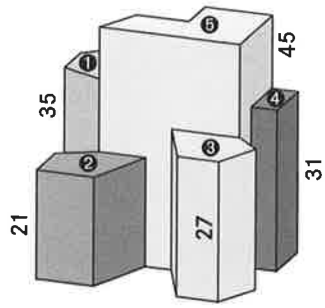
$A_{\text{❶}} = \sqrt{4^2+7^2} \cdot 35 = \sqrt{65} \cdot 35$

$A_{\text{❷}} = 9 \cdot 21 = 189$ $\quad A_{\text{❸}} = 13 \cdot 27 = 351$ $\quad A_{\text{❹}} = 9 \cdot 31 = 279$

$F_{\text{❺}} = M_{\text{❺}} - A_{\text{❶}} - A_{\text{❷}} - A_{\text{❸}} - A_{\text{❹}}$

$= (71 + \sqrt{65}) \cdot 45 - \sqrt{65} \cdot 35 - 189 - 351 - 279 = 2456.622...$



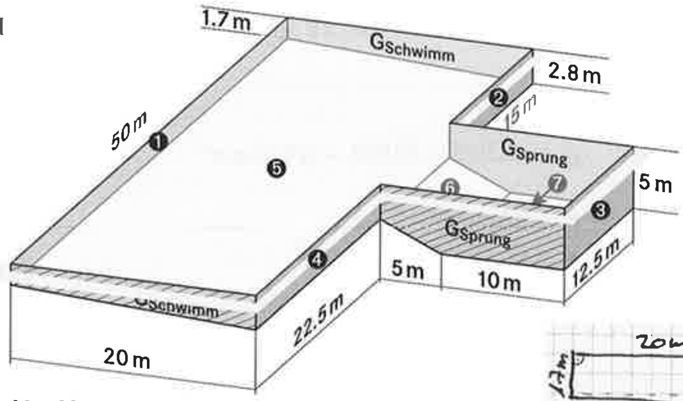


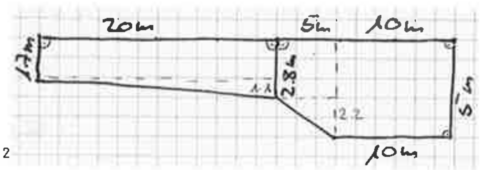
•••••••• Fassade der angebauten Gebäude ⁞⁞⁞⁞⁞⁞⁞⁞ angebaute Flächen

Gesamte Fassade $= F_{\text{❶}} + F_{\text{❷}} + F_{\text{❸}} + F_{\text{❹}} + F_{\text{❺}} \approx$ **6 054.60 m²**

Es müssen **6 055 Quadratmeter Glasfläche** budgetiert werden.

J351 a





$\mathbf{V = V_{Schwimm} + V_{Sprung}}$

$\mathbf{V_{Schwimm}}$: $G_{Schwimm} = \frac{2.8\,m + 1.7\,m}{2} \cdot 20\,m = 45\,m^2$

$h_{Schwimm} = 50\,m$

$V_{Schwimm} = 45\,m^2 \cdot 50\,m = \mathbf{2250\,m^3}$

$\mathbf{V_{Sprung}}$: $G_{Sprung} = \frac{5\,m + 2.8\,m}{2} \cdot 5\,m + 10\,m \cdot 5\,m = 69.5\,m^2$

$h_{Sprung} = 12.5\,m$

$V_{Sprung} = 69.5\,m^2 \cdot 12.5\,m = \mathbf{868.75\,m^3}$

$\mathbf{V} = 2250\,m^3 + 868.75\,m^3 = 3\,118.75\,m^3 = 3\,118\,750\,dm^3 = \mathbf{3\,118\,750\,l}$

Das gesamte Überlauf-Schwimmbassin fasst **3 118 750 Liter** Wasser.

b $G_{Schwimm} = 45\,m^2$ $\qquad G_{Sprung} = 69.5\,m^2$

$A_{\text{❶}} = 50\,m \cdot 1.7\,m = 85\,m^2$ $\qquad A_{\text{❷}} = 15\,m \cdot 2.8\,m = 42\,m^2$

$A_{\text{❸}} = 12.5\,m \cdot 5\,m = 62.5\,m^2$ $\qquad A_{\text{❹}} = 22.5\,m \cdot 2.8\,m = 63\,m^2$

$A_{\text{❺}} = \sqrt{1.1^2+20^2} \cdot 50\,m = 1\,001.511...\,m^2$ $\qquad A_{\text{❻}} = \sqrt{2.2^2+5^2} \cdot 12.5\,m = 68.282...\,m^2$

$A_{\text{❼}} = 10\,m \cdot 12.5\,m = 125\,m^2$

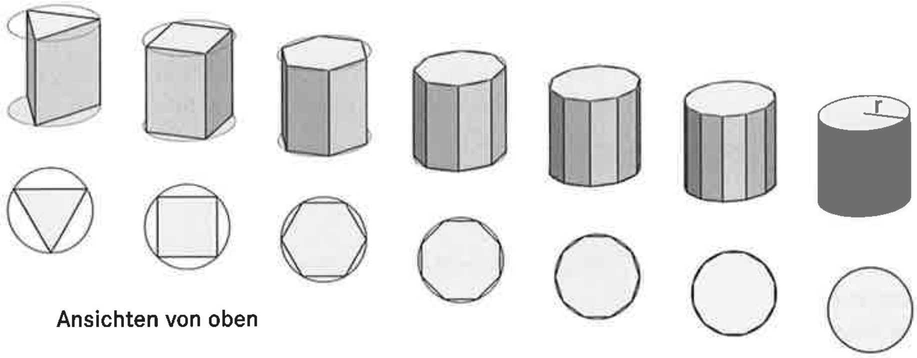
$\mathbf{A_{Total}} = 2 \cdot G_{Schwimm} + 2 \cdot G_{Sprung} + A_{\text{❶}} + A_{\text{❷}} + A_{\text{❸}} + A_{\text{❹}} + A_{\text{❺}} + A_{\text{❻}} + A_{\text{❼}} \approx \mathbf{1\,676.293\,m^2}$

Im **Innenbereich** des Überlauf-Bassins müssen **1 676.293 m²** Fläche behandelt werden. Da anzunehmen ist, dass der Überlauf-Bereich auch aussen behandelt wird, dürfte es sich um rund **1 700 m²** handeln.

Annäherung von aussen

Anstatt von innen kann der Zylinder auch von aussen mit regelmässigen Prismen angenähert werden. Dem Zylinderradius entspricht dann der Inkreisradius der Prismengrundfläche. Die weiteren Überlegungen bleiben gleich.

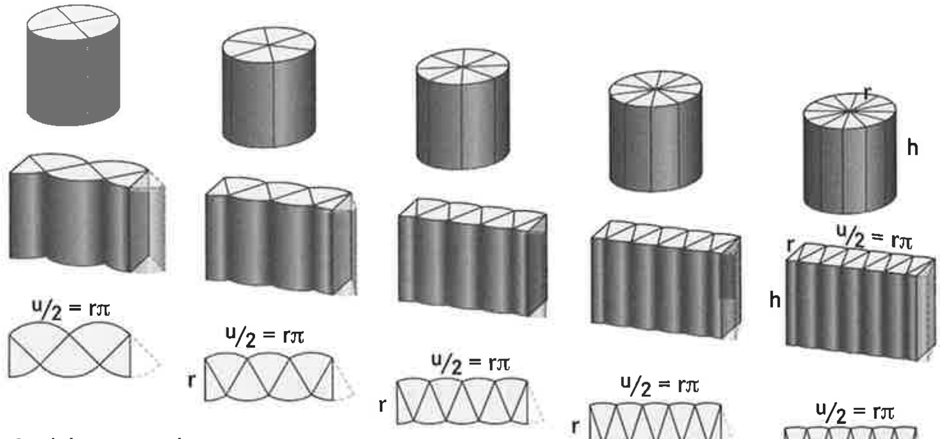
J352 **a** **1. Herleitung des Zylindervolumens:**



Ansichten von oben

Die Abbildung zeigt, dass ein Zylinder durch ein regelmässiges Prisma **angenähert** werden kann, das dem Zylinder einbeschrieben ist. Der Umkreis der Prismen-Grundfläche hat dabei den gleichen Radius wie der Zylinder.
Je mehr Kanten das Prisma hat und je schmaler seine Seitenflächen sind, desto weniger unterscheidet sich seine Grundfläche und sein Volumen von der Grundfläche und dem Volumen des geraden Zylinders. Es ist deshalb offensichtlich, dass das Volumen des Zylinders auf die gleiche Art als Produkt von Grundfläche und Höhe berechnet werden kann, wie das Volumen des Prismas: $V_{Zylinder} = V_{Prisma}$ = Grundfläche mal Höhe, wobei die Grundfläche = $r^2\pi$ ist.

2. Herleitung des Zylindervolumens:



Ansichten von oben

In dieser Abbildung wird das Zylindervolumen auf das Volumen eines Quaders zurückgeführt. Dazu schneidet man den Zylinder in immer kleinere «Kuchenstücke» und ordnet diese quaderförmig an. Je feiner die Unterteilung und je kleiner damit die Stücke, umso besser wird der Quader angenähert und umso weniger unterscheidet sich das Quadervolumen vom Zylindervolumen.
Die drei Abmessungen des Quaders entsprechen der Zylinderhöhe h, dem Zylinderradius r und dem halben Zylinderumfang $u/2 = r\pi$.
Es gilt somit: $V_{Zylinder} = V_{Quader} = r\pi \cdot r \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$

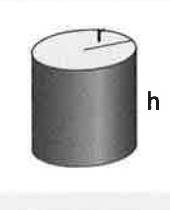
$V_{Zylinder}$

Das Volumen eines Zylinders

Das Volumen eines Zylinders lässt sich analog zu denselben Grössen eines Prismas berechnen.

Volumen = Grundfläche mal Höhe

$$V_{Zylinder} = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

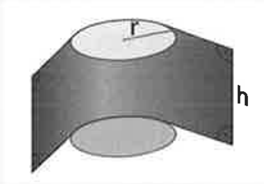


$M_{Zylinder}$ $S_{Zylinder}$

Fehlerhinweis:

In der 1. Auflage des Arbeits- und Theorieheftes J und im Begleitordner hat sich leider im **Theorieteil** bei der **Formeln für die Oberfläche** ein Fehler eingeschlichen! Bitte machen Sie die Lernenden darauf aufmerksam. Wir entschuldigen uns dafür.

Der Mantel und die Oberfläche eines Zylinders



Mantel und Oberfläche eines Zylinders lassen sich analog zu denselben Grössen eines Prismas berechnen.

Der Mantel ist ein Rechteck der Höhe h. Seine Breite entspricht dem Kreisumfang $u = 2\pi r$.

Mantel = Umfang mal Höhe

$M_{Zylinder} = \mathbf{u \cdot h = 2\pi r \cdot h}$

Oberfläche = Mantel plus 2 mal Grundfläche

$S_{Zylinder} = \mathbf{M + 2 \cdot G = 2\pi rh + 2\pi r^2}$

1 $r = 2.4\,cm \quad h = 14.2\,cm$ zu berechnen: u, G, M, S, V

$G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (2.4\,cm)^2 = 18.095...\,cm^2 \approx \mathbf{18.10\,cm^2}$

$V = G \cdot h \approx \mathbf{256.96\,cm^3}$

$u = 2\pi r = 2\pi \cdot 2.4\,cm = 15.079...\,cm \approx \mathbf{15.08\,cm}$

$M = u \cdot h = 214.130...\,cm^2 \approx \mathbf{214.13\,cm^2}$

$S = M + 2 \cdot G \approx \mathbf{250.32\,cm^2}$

2 $r = 1.7\,m \quad h = 2.3\,m$ zu berechnen: u, G, M, S, V

$G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1.7\,m)^2 = 9.079...\,m \approx \mathbf{9.08\,m^2}$

$V = G \cdot h \approx \mathbf{20.88\,m^3}$

$u = 2\pi r = 2\pi \cdot 1.7\,m = 10.681...\,m \approx \mathbf{10.68\,m}$

$M = u \cdot h = 24.567...\,m^2 \approx \mathbf{24.57\,m^2}$

$S = M + 2 \cdot G \approx \mathbf{42.73\,m^2}$

3 $r = 0.3\,dm \quad h = 1.7\,m = \mathbf{17\,dm}$ zu berechnen: u, G, M, S, V

$G = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (0.3\,dm)^2 = 0.282...\,dm \approx \mathbf{0.28\,dm^2}$

$V = G \cdot h \approx \mathbf{4.81\,dm^3}$

$u = 2\pi r = 2\pi \cdot 0.3\,dm = 1.884...\,dm \approx \mathbf{1.88\,dm}$

$M = u \cdot h = 32.044...\,dm^2 \approx \mathbf{32.04\,dm^2}$

$S = M + 2 \cdot G \approx \mathbf{32.61\,dm^2}$

4 $d = 45\,cm \quad h = 97\,cm$
zu berechnen: u, G, M, S, V
$r = 22.5\,cm$
$G \approx \mathbf{1590.43\,cm^2}$
$V \approx \mathbf{154\,271.83\,cm^3}$
$u \approx \mathbf{141.37\,cm}$
$M \approx \mathbf{13\,713.05\,cm^2}$
$S \approx \mathbf{16\,893.91\,cm^2}$

5 $d = 62\,mm \quad h = 145\,mm$
zu berechnen: u, G, M, S, V
$r = 31\,mm$
$G \approx \mathbf{3\,019.07\,mm^2}$
$V \approx \mathbf{437\,765.23\,mm^3}$
$u \approx \mathbf{194.78\,mm}$
$M \approx \mathbf{28\,242.92\,mm^2}$
$S \approx \mathbf{34\,281.06\,mm^2}$

J353 **a** $u = 14\,\text{cm}$ $h = 23\,\text{cm}$
zu berechnen: M, S, V

M: $\mathbf{M = u \cdot h = 322\,cm^2}$

r: $u = 2\pi r$
$r = \frac{u}{2\pi} = 2.228\ldots\,\text{cm}$

G: $G = \pi \cdot r^2 = \frac{u^2}{4\pi} = 15.597\ldots\,\text{cm}^2$

V: $\mathbf{V = G \cdot h \approx 358.74\,cm^3}$

S: $\mathbf{S = M + 2 \cdot G \approx 353.19\,cm^2}$

b $h = 26.5\,\text{cm}$ $V = 5\,060\,\text{cm}^3$
zu berechnen: r, M, S

G: $V = G \cdot h$
$G = \frac{V}{h} = 190.943\ldots\,\text{cm}^2$

r: $G = \pi \cdot r^2$
$r = \sqrt{\frac{G}{\pi}} = \sqrt{\frac{V}{h\pi}} = 7.796\ldots\,\text{cm} \approx \mathbf{7.80\,cm}$

u: $u = 2\pi r = 48.984\ldots\,\text{cm}$

M: $\mathbf{M = u \cdot h \approx 1298.09\,cm^2}$

S: $\mathbf{S = M + 2 \cdot G \approx 1\,679.97\,cm^2}$

c $r = 12.3\,\text{dm}$ $V = 3\,422.1\,\text{dm}^3$
zu berechnen: h, M, S

G: $G = \pi \cdot r^2 = 475.291\ldots\,\text{dm}^2$

h: $V = G \cdot h$
$h = \frac{V}{G} = 7.200\ldots\,\text{dm} \approx \mathbf{7.20\,dm}$

M: $M = u \cdot h = 2\pi r \cdot h = 556.439\ldots\,\text{dm}^2$
$\approx \mathbf{556.44\,dm^2}$

S: $\mathbf{S = M + 2 \cdot G \approx 1\,507.02\,dm^2}$

oder

h: $V = \pi r^2 \cdot h$
$h = \frac{V}{G} = \frac{V}{\pi r^2} \approx \mathbf{7.20\,dm}$

M: $M = u \cdot h = 2\pi r \cdot h = \frac{2V}{r} \approx \mathbf{556.44\,dm^2}$

S: $S = M + 2 \cdot G = \frac{2V}{r} + 2 \cdot \pi r^2$
$\approx \mathbf{1\,507.02\,dm^2}$

d $d = 56\,\text{mm}$ $V = 251.227\,\text{cm}^3$
zu berechnen: h, M, S

r: $r = d : 2 = 28\,\text{mm} = 2.8\,\text{cm}$

G: $G = \pi \cdot r^2 = 24.630\ldots\,\text{cm}^2$

h: $V = G \cdot h$
$h = \frac{V}{G} = 10.200\ldots\,\text{mm} \approx \mathbf{10.2\,cm}$

M: $M = u \cdot h = 2\pi r \cdot h = 179.447\ldots\,\text{cm}^2$
$\approx \mathbf{179.45\,cm^2}$

S: $\mathbf{S = M + 2 \cdot G \approx 228.71\,cm^2}$

oder

r: $r = d : 2 = 28\,\text{mm} = 2.8\,\text{cm}$

h: $V = \pi r^2 \cdot h$
$h = \frac{V}{G} = \frac{V}{\pi r^2} \approx \mathbf{10.2\,cm}$

M: $M = 2\pi r \cdot h = \frac{2V}{r} \approx \mathbf{179.45\,cm^2}$

S: $S = M + 2 \cdot G = \frac{2V}{r} + 2 \cdot \pi r^2$
$\approx \mathbf{228.71\,cm^2}$

J354 **a** -

b **Breiter, niedriger Zylinder**
$h_{br} = 7\,\text{cm}$ $d_{br} = 5\,\text{cm}$ $\Rightarrow$ $r_{br} = 2.5\,\text{cm}$

$\mathbf{V_{br} = \pi r_{br}^2 \cdot h_{br} \approx 137.44\,cm^3}$

Schmaler, hoher Zylinder
$u_{sch} = h_{br} = 7\,\text{cm}$ $\Rightarrow$ $r_{sch} = h_{br} : 2\pi = 1.114\ldots\,\text{cm}$

$h_{sch} = u_{br} = 2\pi r_{br} = 15.707\ldots\,\text{cm}$
$\mathbf{V_{sch} = \pi r_{sch}^2 \cdot h_{sch} = 61.25\,cm^3}$ $\left(V_{sch} = \frac{h_{br}^2 \cdot r_{br}}{2}\right)$

$\mathbf{V_{br} : V_{sch} \approx 2.24}$

$\left(V_{br} : V_{sch} = \frac{2\pi \cdot r_{br}}{h_{br}}\right)$

Der breite, niedrige Zylinder hat das grössere Volumen. Es ist 2.24 mal so gross wie dasjenige des schmalen, hohen Zylinders.

J355 **a**

a	b	schmal hoch $h = a$	$r = \frac{b}{2\pi}$	$V = \pi r^2 \cdot h$	breit niedrig $h = b$	$r = \frac{a}{2\pi}$	$V = \pi r^2 \cdot h$
2	1	2	0.159...	**0.159...**	1	0.318...	**0.318...**
3	2	3	0.318...	**0.954...**	2	0.477...	**1.432...**
4	3	4	0.477...	**2.864...**	3	0.636...	**3.819...**
4	2	4	0.318...	**1.273...**	2	0.636...	**2.546...**
4	1	4	0.159...	**0.318...**	1	0.636...	**1.273...**
10	2	10	0.318...	**3.183...**	2	1.591...	**15.915...**
100	5	100	0.795...	**198.943...**	5	15.915...	**3 978.873...**

b **Schmaler, hoher Zylinder**

$h_{sch} = a$

$u_{sch} = b \quad \Rightarrow \quad r_{sch} = \frac{b}{2\pi}$

$\mathbf{V_{sch}} = \pi r_{sch}^2 \cdot h_{sch} = \pi \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot a = \mathbf{\frac{ab^2}{4\pi}}$

$\mathbf{V_{sch} = b \cdot} \frac{ab}{4\pi}$

Breiter, niedriger Zylinder

$h_{br} = b$

$u_{br} = a \quad \Rightarrow \quad r_{br} = \frac{a}{2\pi}$

$\mathbf{V_{br}} = \pi r_{br}^2 \cdot h_{br} = \pi \frac{a^2}{4\pi^2} \cdot b = \mathbf{\frac{a^2 b}{4\pi}}$

$\mathbf{V_{br} = a \cdot} \frac{ab}{4\pi}$

Weil gemäss Vorausetzung $b<a$ ist, folgt aus der Volumendarstellung in der letzten Zeile sofort, dass der schmale, hohe Zylinder immer das kleinere Volumen hat.

Die beiden Volumen verhalten sich **umgekehrt proportional zu den Höhen.**
$\mathbf{V_{sch} : V_{br} = b : a}$

J356 **a** **Halbzylinder**

$h_H = 8\,cm \qquad d_H = 6\,cm \quad \Rightarrow \quad r_H = 3\,cm$

$V_H = 0.5 \cdot \pi r_H^2 \cdot h_H = 113.097...\,cm^3$

Zylinder

$h_Z = h_H = 8\,cm \qquad V_Z = V_H \qquad d_Z = 2r_Z = ?$

$V_Z = \pi r_Z^2 \cdot h_Z$

$r_Z = \sqrt{\frac{V_Z}{\pi h_Z}} = \sqrt{\frac{V_H}{\pi h_H}} = 2.121...\,cm$

$\mathbf{d_Z} = 2r_Z = 2 \cdot \sqrt{\frac{V_H}{\pi h_H}} \approx \mathbf{4.24\,cm}$

$V_Z = \pi r_Z^2 \cdot h_Z \qquad V_H = 0.5 \cdot \pi r_H^2 \cdot h_H$

und damit

$\cancel{\pi} r_Z^2 \cdot \cancel{h_Z} = 0.5 \cdot \cancel{\pi} r_H^2 \cdot \cancel{h_H} \qquad | \; h_Z = h_H$

$r_Z = \sqrt{0.5\,r_H^2} = 2.121...\,cm$

$\mathbf{d_Z} = 2r_Z = 2 \cdot \sqrt{0.5\,r_H^2} \approx \mathbf{4.24\,cm}$

Ein gleich hoher Zylinder muss einen **Durchmesser** von ungefähr **4.24 cm** haben, damit er das gleiche Volumen wie der Halbzylinder hat.

b **Mantel Halbzylinder**

$\mathbf{M_H} = (\pi r_H + d_H) \cdot h_H = (\pi \cdot 3\,cm + 6\,cm) \cdot 8\,cm = 123.398...\,cm^2 \approx \mathbf{123.40\,cm^2}$

Mantel Zylinder

$\mathbf{M_Z} = 2\pi r_Z \cdot h_Z = 2\pi \cdot 2.121...\,cm \cdot 8\,cm = 106.629...\,cm^2 \approx \mathbf{106.63\,cm^2}$

Der **Halbzylinder** hat die grössere Mantelfläche.

c **Oberfläche Halbzylinder**

$\mathbf{S_H} = M_H + \pi r_H^2 = 123.398...\,cm^2 + \pi \cdot (3\,cm)^2 \approx \mathbf{151.67\,cm^2}$

Oberfläche Zylinder

$\mathbf{S_Z} = M_Z + 2\pi r_Z^2 = 106.629...\,cm^2 + 2\pi \cdot (2.121...\,cm)^2 \approx \mathbf{134.90\,cm^2}$

Der **Halbzylinder** hat auch die grössere Oberfläche.

J357 ■ **Beispiele**: individuell

Allgemein:

Zylinder 1	r_1	h_1	$V_1 = \pi r_1^2 \cdot h_1$
Zylinder 2	$r_2 = r_1$	$h_2 = \mathbf{2h_1}$	$\mathbf{V_2} = \pi r_2^2 \cdot h_2 = \pi r_1^2 \cdot 2h_1 = \mathbf{2 \cdot V_1}$

Eine **Verdoppelung der Höhe** bewirkt eine **Verdoppelung des Volumens**.

■ **Beispiele**: individuell

Allgemein:

Zylinder 1	r_1	h_1	$V_1 = \pi r_1^2 \cdot h$
Zylinder 2	$r_2 = \mathbf{2r_1}$	$h_2 = h_1$	$\mathbf{V_2} = \pi r_2^2 \cdot h_2 = \pi \cdot (2r_1)^2 \cdot h_1 = \pi \cdot 4r_1^2 \cdot h_1 = \mathbf{4 \cdot V_1}$

Eine **Verdoppelung des Radius** bewirkt eine **Vervierfachung des Volumens**.

J358 Das Volumen verdoppelt sich, wenn der Radius mit $\sqrt{2}$ vervielfacht wird.
Denn: $\pi(r\sqrt{2})^2 \cdot h = \pi 2r^2 \cdot h = 2 \cdot \pi r^2 \cdot h$

oder rein formal:

Zylinder 1:	r_1	h_1	$V_1 = \pi r_1^2 \cdot h_1$	
Zylinder 2:	r_2	$h_2 = h_1$	$V_2 = 2 \cdot V_1$	$\cancel{\pi} r_2^2 \cdot \cancel{h_2} = 2 \cdot \cancel{\pi} r_1^2 \cdot \cancel{h_1}$ $\quad \mid h_1 = h_2$

$$r_2^2 = 2r_1^2$$
$$\mathbf{r_2 = r_1 \sqrt{2}}$$

45,96

J359 Alte Büchse: $d = 7.5\,\text{cm}$ $\quad h = 13.5\,\text{cm}$ $\quad V = \pi(3.75\,\text{cm})^2 \cdot 13.5\,\text{cm} = 596.411\ldots\,\text{cm}^3$

Neue Büchse: $V_{neu} = V + \frac{V}{3} = \frac{4}{3}V = 795.215\ldots\,\text{cm}^3$

Vorschlag 1
Höhe um einen Drittel vergrössern: $\mathbf{h_1 = 18\,cm}$ $\quad \mathbf{d_1 = 7.5\,cm}$
Kontrolle: $V_1 = \pi(3.75\,\text{cm})^2 \cdot 18\,\text{cm} = 795.215\ldots\,\text{cm}^3 = V_{neu}$ ✓

Vorschlag 2
Höhe belassen: $\mathbf{h_2 = 13.5\,cm}$ $\quad \mathbf{d_2 = ?}$

$$V_{neu} = \frac{4}{3}V \quad \Rightarrow \quad \pi r_2^2 \cdot h_2 = \frac{4}{3}\pi r^2 \cdot h \quad \mid h_2 = h$$
$$r_2^2 = \frac{4}{3}r^2$$
$$r_2 = 2r\sqrt{\frac{1}{3}} \qquad \mathbf{d_2} = 2d\sqrt{\frac{1}{3}} \approx \mathbf{8.66\,cm}$$

Andere Vorschläge
Eine der beiden Grössen beliebig wählen, die andere analog zu oben berechnen.

Fazit
Beim Zylinder mit dem grösseren Radius nehmen Volumen und Mantel prozentual weniger zu.
Absolut vergrössert sich aber das Volumen stärker.
Der Mantel wird bei beiden Zylindern absolut um gleich viel vergrössert.

J360 **Zylinder 1**
$r_{10} = 10\,\text{cm}$ $\quad h = 32\,\text{cm}$
$V_{10} = 10\,053.096\ldots\,\text{cm}^3$
$M_{10} = 2\,010.619\ldots\,\text{cm}^2$

$r_{11} = 11\,\text{cm}$ $\quad h = 32\,\text{cm}$
$V_{11} = 12\,164.246\ldots\,\text{cm}^3$
$M_{11} = 2\,211.681\ldots\,\text{cm}^2$

■ Volumenzunahme: $\approx$ **2 111.15 cm³**
Das ist eine Zunahme um genau **21%**.

■ Mantelzunahme: $\approx$ **201.06 cm²**
Zunahme um genau **10%**.

Zylinder 2
$r_{20} = 20\,\text{cm}$ $\quad h = 32\,\text{cm}$
$V_{20} = 40\,212.385\ldots\,\text{cm}^3$
$M_{20} = 4021.238\ldots\,\text{cm}^2$

$r_{21} = 21\,\text{cm}$ $\quad h = 32\,\text{cm}$
$V_{21} = 44\,334.155\ldots\,\text{cm}^3$
$M_{21} = 4\,222.300\ldots\,\text{cm}^2$

Volumenzunahme: $\approx$ **4 121.77 cm³**
Zunahme um genau **10.25%**.

Mantelzunahme: $\approx$ **201.06 cm²**
Das sind genau **5%**.

J361 Der Zylinder hat für alle Radien eine Höhe von 20 cm.

Radius in cm	Volumen in cm^3	Zunahme in cm^3	Zunahme in %	Mantel in cm^2	Zunahme in cm^2	Zunahme in %
10	2 000π			400π		
11	2 420π	420π	21	440π	40π	10
12	2880π	460π	19.01	480π	40π	9.09
13	3 380π	500π	17.36	520π	40π	8.33
14	3 920π	540π	15.98	560π	40π	7.69
15	4 500π	580π	14.80	600π	40π	7.14

Das **Volumen** nimmt bei jedem Schritt um $40\pi\,cm^3 = 125.66\,cm^3$ **mehr** zu. Prozentual nimmt das Volumen bei jedem Schritt **weniger** zu.
Kurz: Je grösser der Radius desto grösser die absolute Zunahme des Volumens,
desto kleiner aber die prozentuale Zunahme.

Der **Mantel** nimmt bei jedem Schritt um **gleichviel**, nämlich um $40\pi\,cm^3 = 125.66\,cm^2$ zu.
Die prozentuale Zunahme wird wiederum bei jedem Schritt etwas kleiner.
Kurz: Die absolute Zunahme des Mantels hängt nicht vom Radius ab,
die prozentuale Zunahme wird kleiner je grösser der Radius.

J362 ■

Radius in cm	Höhe in cm	Volumen in cm^3	Abnahme in cm^3	Abnahme in %
71	73	367 993π ≈ 1 156 084.11		
71	68	342 788π ≈ 1 076 900.26	25 205π ≈ 79 183.84	6.85
71	63	317 583π ≈ 997 716.42	25 205π ≈ 79 183.84	7.35
71	58	292 378π ≈ 918 532.58	25 205π ≈ 79 183.84	7.93
71	53	267 173π ≈ 839 348.73	25 205π ≈ 79 183.84	8.62
71	48	241 968π ≈ 760 164.89	25 205π ≈ 79 183.84	9.43
71	43	216 763π ≈ 680 981.05	25 205π ≈ 79 183.84	10.42
71	38	191 558π ≈ 601 797.21	25 205π ≈ 79 183.84	11.63

Das Volumen nimmt bei jedem Schritt um gleich viel ab, nämlich um $r^2\pi\cdot 5\,cm$, wobei r immer gleich bleibt (71 cm). Die prozentuale Abnahme wird immer grösser.

■

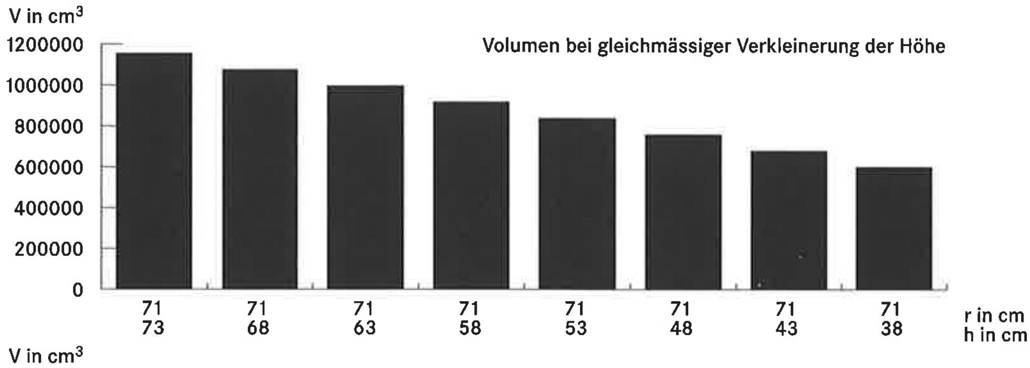
Radius in cm	Höhe in cm	Volumen in cm^3	Abnahme in cm^3	Abnahme in %
71	73	367 993π = 1 156 084.11		
61	73	271 633π = 853 360.24	96 360π = 302 723.87	26.19
51	73	189 873π = 596 503.62	81 760π = 256 856.62	30.10
41	73	122 713π = 385 514.26	67 160π = 210 989.36	35.37
31	73	70 153π = 220 392.15	52 560π = 165 122.11	42.83
21	73	32 193π = 101 137.29	37 960π = 119 254.86	54.11
11	73	8 833π = 27 749.69	23 360π = 73 387.60	72.56
1	73	73π = 229.34	8 760π = 27 520.35	99.17

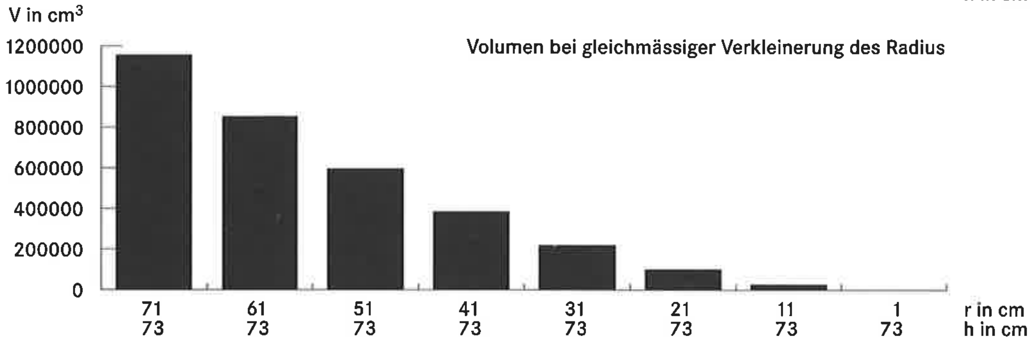
Das Volumen nimmt bei jedem Schritt absolut weniger ab, die prozentuale Abnahme wird massiv grösser. Absolute Abnahme: $(r\cdot 20\,cm - 100\,cm^2)h\pi$ wobei h=73 cm und r variabel

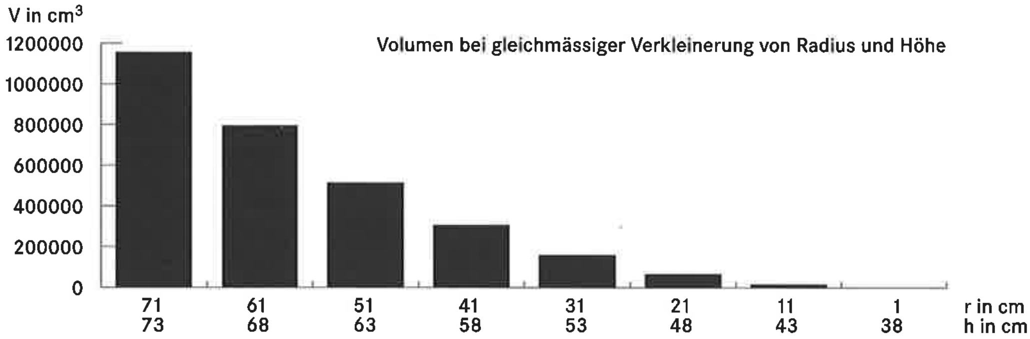
■

Radius in cm	Höhe in cm	Volumen in cm^3	Abnahme in cm^3	Abnahme in %
71	73	367 993π = 1 156 084.11		
61	68	253 028π = 794 910.91	114 965π = 361 173.20	31.24
51	63	163 863π = 514 790.80	89 165π = 280 120.19	35.24
41	58	97 498π = 306 299.00	66 365π = 208 491.80	40.50
31	53	50 933π = 160 010.74	46 565π = 146 288.26	52.24
21	48	21 168π = 66 501.23	29 765π = 93 509.51	60.17
11	43	5 203π = 16 345.71	15 965π = 50 155.53	74.35
1	38	38π = 119.38	5 165π = 16 226.33	99.27

Die Feststellung von ■ gilt verstärkt auch hier. →







J363 **Vermutung:** Das Volumen vergrössert sich mehr, wenn der Radius um 1 cm zunimmt, da der Radius in der Volumenformel quadratisch auftritt.

Einige Beispiele: x, y in cm V, ZU in cm³

x	10	10	20	20
y	20	10	20	30
V	2000π	1000π	8000π	12000π
x+1	11	11	21	21
y	20	10	20	30
$\mathbf{V_{x+1}}$	2420π	1210π	8820π	13230π
$\mathbf{ZU_{x+1}}$	$\mathbf{420\pi}$	$\mathbf{210\pi}$	$\mathbf{820\pi}$	$\mathbf{1230\pi}$
x	10	10	20	20
y+1	21	11	21	31
$\mathbf{V_{y+1}}$	2100π	1100π	8400π	12400π
$\mathbf{ZU_{y+1}}$	$\mathbf{100\pi}$	$\mathbf{100\pi}$	$\mathbf{400\pi}$	$\mathbf{400\pi}$

Die Beispiele bestätigen die Vermutung. Die Vergrösserung des Radius um 1 cm bewirkt immer eine stärkere Zunahme des Volumens als die Vergrösserung der Höhe um 1 cm.

x = 30	y = 10	$V = 9000\pi$		
x = 31	y = 10	$V_{x+1} = 9610\pi$	$\mathbf{ZU_{x+1} = 610\pi}$	
x = 30	y = 11	$V_{y+1} = 9900\pi$	$\mathbf{ZU_{y+1} = 900\pi}$	**grössere Zunahme**

Fazit: Vermutungen müssen sorgfältig überprüft werden. Ein paar Beispiele sind kein Beweis, aber ein einziges gut gewähltes Gegenbeispiel kann eine Vermutung widerlegen.
Auf der Suche nach einem Gegenbeispiel lohnt es sich jeweils, extreme Werte zu prüfen.

J364 **Büchse 1:** $r = 5\,cm$ $h_{aussen} = 11.8\,cm$ $h_{innen} = 11.4\,cm$
Ananas Anzahl $a = 8$ $r_{Scheibe} = 4.5\,cm$ $r_{Loch} = 1.5\,cm$ Dicke $b = 1.2\,cm$

Büchse 2: $r = 4.2\,cm$ $h_{aussen} = 11.5\,cm$ $h_{innen} = 11.1\,cm$
Ananas Anzahl $a = 10$ $r_{Scheibe} = 3.7\,cm$ $r_{Loch} = 1.35\,cm$ Dicke $b = 1\,cm$

Büchse 3: $r = 4.2\,cm$ $h_{aussen} = 8.9\,cm$ $h_{innen} = 8.5\,cm$
Ananas Anzahl $a = 8$ $r_{Scheibe} = 3.7\,cm$ $r_{Loch} = 1.35\,cm$ Dicke $b = 1\,cm$

Büchse 4: $r = 4.2\,cm$ $h_{aussen} = 5.2\,cm$ $h_{innen} = 4.8\,cm$
Ananas Anzahl $a = 4$ $r_{Scheibe} = 3.7\,cm$ $r_{Loch} = 1.35\,cm$ Dicke $b = 1\,cm$

a Volumen Büchse $V_{Büchse} = \pi r^2 \cdot h_{innen}$
Volumen Ananas $V_{Ananas} = \text{Anzahl} \cdot (V_{Scheibe} - V_{Loch})$
$= a \cdot (\pi r_{Scheibe}^2 \cdot b - \pi r_{Loch}^2 \cdot b) = a \cdot \pi b \cdot (r_{Scheibe}^2 - r_{Loch}^2)$

Büchse 1: $V_{Büchse} = 285\pi\,cm^3$ $V_{Ananas} = 172.8\pi\,cm^3$ **Anteil$_{Ananas}$** $= \frac{V_{Ananas}}{V_{Büchse}}$ = **60.63%**

Büchse 2: $V_{Büchse} = 195.804\pi\,cm^3$ $V_{Ananas} = 118.675\pi\,cm^3$ **Anteil$_{Ananas}$** $= \frac{V_{Ananas}}{V_{Büchse}}$ = **60.61%**

Büchse 3: $V_{Büchse} = 149.94\pi\,cm^3$ $V_{Ananas} = 94.94\pi\,cm^3$ **Anteil$_{Ananas}$** $= \frac{V_{Ananas}}{V_{Büchse}}$ = **63.32%**

Büchse 4: $V_{Büchse} = 84.672\pi\,cm^3$ $V_{Ananas} = 47.47\pi\,cm^3$ **Anteil$_{Ananas}$** $= \frac{V_{Ananas}}{V_{Büchse}}$ = **56.06%**

b Anteil des abgetropften Inhalts am Gesamtinhalt inkl. Saft $= \frac{\text{Abtropfgewicht}}{\text{Inhalt inkl. Saft}}$

Büchse 1: $\frac{510\,g}{820\,g} = 62.20\%$ **Büchse 2:** $\frac{360\,g}{560\,g} = 64.29\%$

Büchse 3: $\frac{275\,g}{432\,g} = 63.66\%$ **Büchse 4:** $\frac{140\,g}{220\,g} = 63.64\%$

Der Anteil der Ananas am gesamten Inhalt stimmt nur bei Büchse 3 mit dem Volumenanteil der Ananas an der Büchse überein. Bei Büchse 4 ist der Anteil gar viel grösser. Die Büchse ist also schlecht gefüllt. Die Angabe auf der Etikette täuscht.

Man könnte auch die Inhaltsangaben mit dem Gesamtvolumen vergleichen.
Mit $\frac{\text{Abtropfgewicht}}{\text{Büchsenvolumen}}$ lassen sich die Ananas-Füllgrade der Büchsen **untereinander** vergleichen, mit $\frac{\text{Gesamtinhalt}}{\text{Büchsenvolumen}}$ diejenigen der Gesamtmenge. Beide Quotienten sagen aber nichts aus über den Füllanteil einer einzelnen Büchse, da der Umrechnungsfaktor von der Menge zum Volumen nicht berücksichtigt wird.

$\frac{\text{Gesamtinhalt}}{\text{Büchsenvolumen}}$: **1** 0.915... **2** 0.910... **3** 0.917... **4** 0.827...

$\frac{\text{Abtropfgewicht}}{\text{Büchsenvolumen}}$: **1** 0.569... **2** 0.585... **3** 0.583... **4** 0.526...

Die Vergleichszahlen zeigen, dass die kleinste Büchse – sowohl in Bezug auf den Gesamtinhalt als auch in Bezug auf die Ananasmenge – am schlechtesten gefüllt ist.

c Blechverbrauch: $B = 2\pi r \cdot h_{aussen} + 2 \cdot \pi (r+0.4)^2$ (r+0.4, da Deckel über Rand gezogen wird)
$= 2\pi\,(r \cdot h_{aussen} + (r+0.4)^2)$

$\frac{\text{Blechverbrauch}}{\text{Büchsenvolumen}}$: **1** 0.618... **2** 0.709.... **3** 0.780... **4** 1.015....

Je grösser die Büchse umso besser (d.h. kleiner) das Verhältnis «Blechverbrauch zu Volumen». Grosse Büchsen sind also herstellungsmässig günstiger.

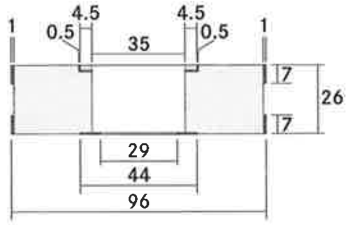
J365 $r_{Stein} = 6\,dm$ $r_{Loch} = 1\,dm$ $h = 4.5\,dm$ Dichte = $2.7\ kg/dm^3$

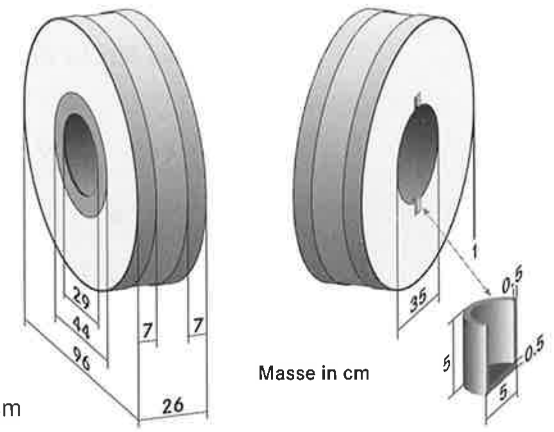
$V = V_{Stein} - V_{Loch} = \pi r_{Stein}^2 \cdot h - \pi r_{Loch}^2 \cdot h = \pi h (r_{Stein}^2 - r_{Loch}^2) \approx 494.80\,dm^3$

Masse: $m \approx 494.80 \cdot 2.7\,kg \approx$ **1336 kg**
Der Stein ist ungefähr 1 336 kg schwer.

J366

Querschnitt





a $\mathbf{V_{Granit} = V_{Stein} - V_{Loch} - 2V_{HZylinder} - V_{Ring}}$

V_{Stein}	$\pi (47\,cm)^2 \cdot 26\,cm$
V_{Loch}	$-\pi (17.5\,cm)^2 \cdot 26\,cm$
$2V_{HZylinder}$	$-\pi (2.5\,cm)^2 \cdot 5\,cm$
V_{Ring}	$-\pi ((22\,cm)^2 - (17.5\,cm)^2) \cdot 0.6\,cm$

$V_{Granit} = 49333.6\pi\,cm^3 \approx 154\,986\,cm^3$ $\Rightarrow$ $m_{Granit} \approx 154.986 \cdot 2.7\,kg \approx$ **418.5 kg**

$\mathbf{V_{Eisen} = 2V_{Band} + V_{Platte} + 2V_{HZylEisen}}$

$2V_{Band}$	$2 \cdot (\pi \cdot 95\,cm) \cdot 7\,cm \cdot 1\,cm$ (95 cm = Durchschnitt äusserer und innerer Ø)
V_{Platte}	$+\pi ((22\,cm)^2 - (14.5\,cm)^2) \cdot 0.6\,cm$
$2V_{HZylEisen}$	$+\pi (2.5\,cm)^2 \cdot 5\,cm - \pi (2\,cm)^2 \cdot 4.5\,cm$

$V_{Eisen} = 1507.5\pi\,cm^3 \approx 4735.95\,cm^3$ $\Rightarrow$ $m_{Eisen} \approx 4.736 \cdot 7.8\,kg \approx$ **36.9 kg**

$m_{gesamt} \approx 418.5\,kg + 36.9\,kg =$ **455.4 kg**

Der Mahlstein ist insgesamt **ungefähr 455 kg** schwer.

b $\frac{m_{Eisen}}{m_{gesamt}} \approx \frac{36.9\,kg}{455.4\,kg} \approx 0.081 =$ **8.1 %**

Der Anteil des Eisen an der ganzen Masse beträgt ungefähr 8.1 %.

c Wer weiss – vielleicht war er ein Mathe-Freak …
Um die Anwendung von Formeln zu üben, kann es interessant sein, Gegenstände, die in der Umwelt vorkommen genauer zu untersuchen. Für den praktischen Nutzen genügt eine grobe Rechnung, für das Gesamtvolumen etwa $V_{Stein} - V_{Loch}$.

Zusatzfrage
Schätze, wie viel es ausmacht, wenn du den vorspringenden Eisenring in **a** vernachlässigst.

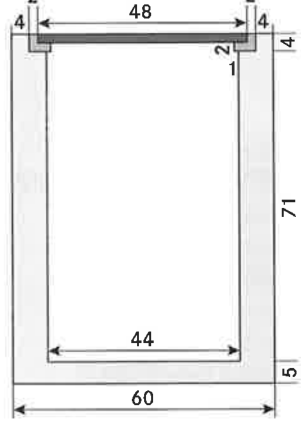
V_{Wasser}
$\approx \pi (22\,cm)^2 \cdot 73\,cm$
$\approx 110\,999\,cm^3$
≈ 111 Liter

Es macht nur etwa ¼ l Unterschied. Für die Praxis genügt diese Berechnung durchaus.

J367

a $V_{Wasser} = \pi (22\,cm)^2 \cdot 71\,cm + \pi (21\,cm)^2 \cdot 2\,cm$
$\approx 110\,728\,cm^3 \approx$ **110.7 l**

Der Schacht kann **ungefähr 110 Liter** Wasser «schlucken».



b $V_{Beton} = \pi (30\,cm)^2 \cdot 80\,cm - \pi (22\,cm)^2 \cdot 71\,cm - \pi (26\,cm)^2 \cdot 4\,cm$
$= 34\,932\pi\ cm^3$
$m_{Beton} = 34\,932\pi \cdot 2.2\,g \approx$ **241.433 kg**

Der vorproduzierte Betonschacht ist **ungefähr 240 kg** schwer.

c $V_{Deckel} = \pi (24\,cm)^2 \cdot 2\,cm = 1\,152\pi\,cm^3$
$V_{Löcher} = 61 \cdot \pi (1.5\,cm)^2 \cdot 2\,cm = 274.5\pi\,cm^3$
1 $V_{Deckel\ unverziert} = 1\,152\pi \cdot 7.3\,g \approx$ **26.420 kg**
2 $V_{Deckel\ mit\ Löcher} = (1\,152 - 274.5)\pi \cdot 7.3\,g \approx$ **20.124 kg**

Ein **unverzierter** Deckel wiegt **ungefähr 26.4 kg**, einer **mit Löcher ungefähr 20.1 kg**.

J368 **a** $r = 1\,cm$ $V = 1\,cm^3$ $h = ?$

$V = \pi r^2 \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{1\,cm^3}{\pi \cdot 1\,cm^2} = 0.318...\,cm$

Die Striche müssen in einem Abstand von **3.2 mm** angebracht werden.

b $r = 0.5\,cm$ $V = 1\,cm^3$ $h = ?$

$V = \pi r^2 \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{1\,cm^3}{\pi \cdot 0.25\,cm^2} = 1.273...\,cm$

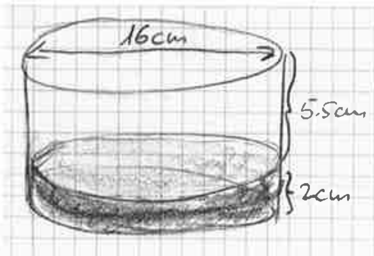
Die Striche müssen in einem Abstand von **12.7 mm** angebracht werden.

J369 $r = 8\,cm$ $V = 1\,l = 1\,dm^3 = 1\,000\,cm^3$

$V = \pi r^2 \cdot h$

$\mathbf{h} = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{1\,000\,cm^3}{\pi \cdot 64\,cm^2} \approx \mathbf{5\,cm}$

Ja es gelingt.
Sarah muss die Milch beim Wärmen aber gut überwachen.



Erweiterbar
Die Gedankenexperimente können bei Bedarf beliebig erweitert werden:
- Steigt die Oberfläche wirklich um soviel? Eis hat doch das grössere Volumen als Wasser.
- Wie sieht die Sache mit gewöhnlichen Eiswürfeln aus Wasser aus? Wenn sie schwimmen? wenn sie geschmolzen sind?
- ...

Wir verzichten in unseren Lösungen auf solche Überlegungen.

J370 **a** $r = 4.8\,cm$ $V = 1\,l = 1\,000\,cm^3$

$V = \pi r^2 \cdot h$

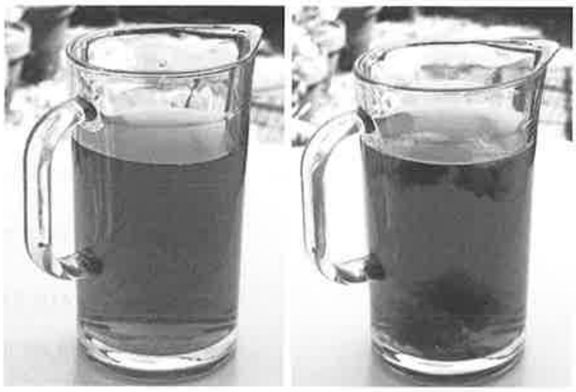
$\mathbf{h} = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{1\,000\,cm^3}{\pi \cdot (4.8\,cm)^2} \approx \mathbf{13.8\,cm}$

Man muss **ungefähr 14 cm** hoch Wasser einfüllen.

b $V_{Eiswürfel} = 10 \cdot (3\,cm)^3 = 270\,cm^3$

$h_{Anstieg} = \frac{V_{Eiswürfel}}{\pi r^2} = \frac{270\,cm^3}{\pi \cdot (4.8\,cm)^2} \approx \mathbf{3.7\,cm}$

Die Oberfläche des Tees steigt um **3.7 cm**.



Vorher – nachher mit vier Kiwi-Eiswürfel

J371 $V_{Suppe} = 10\,cm \cdot 8\,cm \cdot 18\,cm = \mathbf{1\,440\,cm^3}$ $V_{Pfanne} = \pi \cdot (9\,cm)^2 \cdot 8\,cm \approx \mathbf{2\,035.75\,cm^3}$

Die Suppe hat in der Pfanne Platz, auch wenn es aussieht, als hätte der Suppenklotz ein weit grösseres Volumen. (Die Zeichnung ist massstäblich!)

$h = \frac{V_{Suppe}}{\pi r^2} = \frac{1\,440\,cm^3}{\pi \cdot (9\,cm)^2} \approx \mathbf{5.7\,cm}$

Die Suppe steht aber - wenn sie aufgetaut ist – nur 2.3 cm unter dem Rand. Eine grössere Pfanne wäre daher sicherer. Mit dieser ist die Gefahr des Überlaufens gross.

Zusatzfrage
Wie viele dünnere Spaghetti der gleichen Sorte hat es in einem 500 g Paket, wenn diese einen Durchmesser von 1.7 mm haben und gleich lang sind?

Lösung: 625
Nachzählen erlaubt!

J372 **Pfanne:** $r = 12\,cm$ Platz bis Rand: $h = 4\,cm$

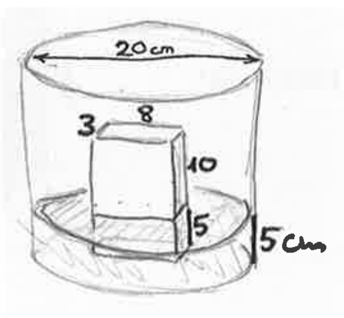
$V_{Platz} = \pi \cdot (12\,cm)^2 \cdot 4\,cm \approx \mathbf{1\,810\,cm^3}$

Spaghetti: $r = 0.95\,mm = 0.095\,cm$ Länge: $h = 25.5\,cm$ Anzahl: $4 \cdot 500$

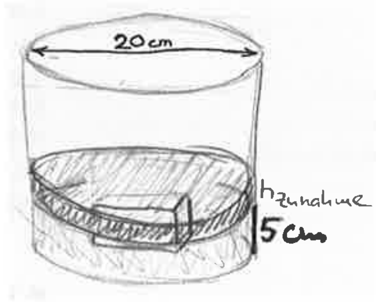
$V_{Spaghetti} = 2\,000 \cdot \pi \cdot (0.095\,cm)^2 \cdot 25.5\,cm \approx \mathbf{1446\,cm^3}$

Platz haben die Spaghetti zwar, aber das Wasser steht höchstens $\frac{1\,810\,cm^3 - 1\,446\,cm^3}{\pi \cdot (12\,cm)^2} \approx 0.8\,cm$ unter dem Rand. Wenn es kocht, vergrössert sich das Volumen noch und es sprudelt...

J373 **a**



Lösungsidee:
Wenn der Quader so hingelegt wird, dass er unter Wasser zu liegen kommt, dann braucht er gleich viel Platz, wie wenn er geschmolzen wäre.
Für den Wasseranstieg verantwortlich ist derjenige Teil des Quaders, der am Anfang oberhalb des Wasserspiegels steht. Es genügt deshalb, das Volumen des oberen Quaderteils in Gedanken «schmelzen zu lassen» und zu berechnen, wie hoch die zusätzliche zylinderförmige Flüssigkeitsschicht ist, die sich daraus ergibt.



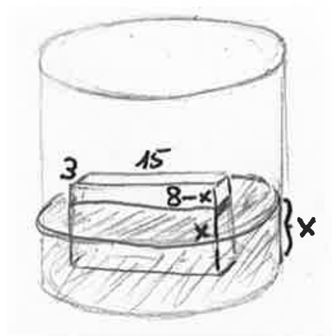
Volumen des Quaders oberhalb des Wassers:
$V_{oberhalb} = 10\,cm \cdot 8\,cm \cdot 3\,cm = 240\,cm^3$

Zunahme der Wasserhöhe:
$V_{oberhalb} = \pi r^2 \cdot h_{Zunahme}$

$$\mathbf{h_{Zunahme}} = \frac{V_{oberhalb}}{\pi r^2} = \frac{240\,cm^3}{\pi \cdot 100\,cm^2}$$
$$= 0.7639\ldots cm \approx \mathbf{0.8\,cm}$$

Wenn der Quader umgelegt ist, steht das Wasser **ungefähr 5.8 cm** hoch.

b **Lösungsidee:**
Das Volumen des Wassers lässt sich anhand der 1. Skizze bei **a** berechnen als Gesamtvolumen (Wasser und Quaderteil im Wasser **stehend**) minus Volumen des im Wasser stehenden Quaderteils.
Kennen wir das Volumen des Wassers, so lässt sich das Problem mit einer Gleichung angehen, bei der die zu bestimmende Wasserhöhe x die Unbekannte ist:
Das Gesamtvolumen (Wasser und Quaderteil im Wasser **liegend**) ist gleich den beiden Einzelvolumen vom Wasser und vom Quaderteil, der im Wasser liegt.



Volumen des Wasser:

Innenradius Gefäss	$r = 10\,cm$	
Wasserstand an Anfang	$h_a = 5\,cm$	(mit dem stehenden Quader in **a**)

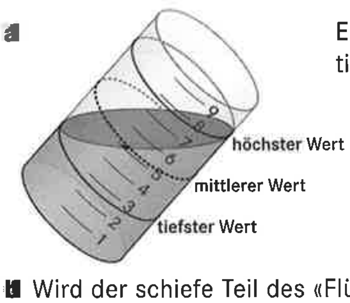
$$V_{Wasser} = \pi r^2 \cdot h_a - h_a \cdot 8\,cm \cdot 3\,cm = \pi(10\,cm)^2 \cdot 5\,cm - 5\,cm \cdot 8\,cm \cdot 3\,cm$$
$$= 500\pi\,cm^3 - 120\,cm^3 = 1\,450.796\ldots cm^3$$

Neuer Wasserstand: x
Gesamtvolumen − Volumen Quaderteil im Wasser = Volumen Wasser

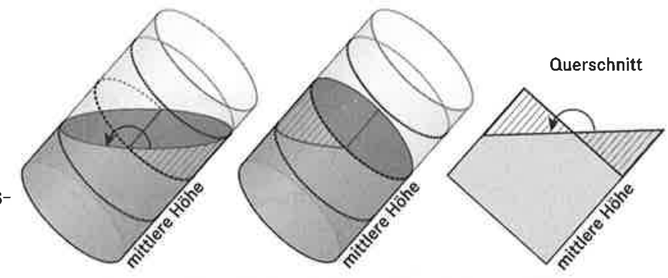
$$\pi r^2 \cdot x - x \cdot 15\,cm \cdot 3\,cm = V_{Wasser}$$
$$x \cdot (\pi \cdot (10\,cm)^2 - 15\,cm \cdot 3\,cm) = V_{Wasser}$$
$$\mathbf{x} = 1\,450.796\ldots cm^3 : (\pi \cdot (10\,cm)^2 - 15\,cm \cdot 3\,cm) \approx \mathbf{5.39\,cm}$$

Liegt der Quader auf der schmalen lange Seite, so steht er **ungefähr 5.4 cm** im Wasser.

J374 **a**



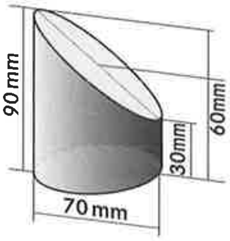
Es muss genau in der Mitte, zwischen dem höchsten und dem tiefsten Stand der Flüssigkeit im Messbecher abgelesen werden.



b Wird der schiefe Teil des «Flüssigkeit-Körpers» in der Mitte abgeschnitten und um 180° gedreht wieder angesetzt, so entsteht ein gerader Kreiszylinder mit mittlerer Höhe. →

d Mittlere Höhe h = 60 mm

$V = \pi \cdot (35\,\text{mm})^2 \cdot 60\,\text{mm} \approx 230\,907\,\text{mm}^3$



J375 **Lösungsidee**

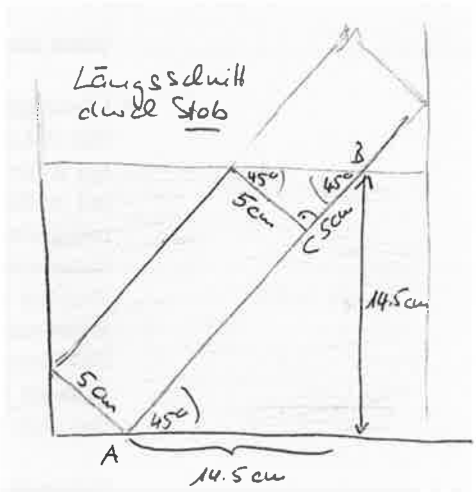
Zuerst muss das Volumen des eingetauchten Stabteils bestimmt werden. Dieses hat die Form eines schief abgeschnittenen Zylinders. Um dessen mittlere Höhe (Länge) zu bestimmen, wird **nur** die **Wasserhöhe** und der **Neigungswinkel** benötigt.
Kennt man dieses Volumen, so lässt sich damit berechnen, um wie viel der Wasserspiegel sinkt. Man kann sich dazu wiederum das Gesamtvolumen (Wasser plus eingetauchten Stab) als flüssiges Volumen vorstellen, von dem man man einen Teil (Stab in «flüssiger Form») wegnimmt.

a **Volumen des eingetauchten Stabteils**

$AB = 14.5\,\text{cm} \cdot \sqrt{2}$
$CB = 5\,\text{cm}$ (= Stabdurchmesser)

Mittlere Höhe $h = 14.5\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} - 2.5\,\text{cm}$
Radius $r = 2.5\,\text{cm}$

$V_{\text{eingetaucht}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$
$= \pi \cdot (2.5\,\text{cm})^2 \cdot (14.5\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} - 2.5\,\text{cm})$
$= 353.548\ldots\,\text{cm}^3$



Abnahme der Wasserhöhe
Grundfläche $G = (15\,\text{cm})^2 = 225\,\text{cm}^2$

$h_{\text{Abnahme}} = \frac{V_{\text{eingetaucht}}}{G} = \frac{353.548\ldots\,\text{cm}^3}{225\,\text{cm}^2} = 1.57\ldots\,\text{cm} \approx \mathbf{1.6\,cm}$

Das Wasser sinkt um ungefähr 1.6 cm.

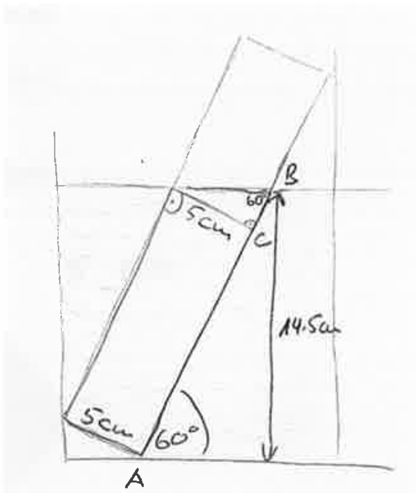
b **Volumen des eingetauchten Stabteils**

$\frac{AB}{2} \cdot \sqrt{3} = 14.5\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad AB = 29\,\text{cm} : \sqrt{3}$

$CB \cdot \sqrt{3} = 5\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad CB = 5\,\text{cm} : \sqrt{3}$

Mittlere Höhe $h = 26.5\,\text{cm} : \sqrt{3}$
Radius $r = 2.5\,\text{cm}$

$V_{\text{eingetaucht}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$
$= \pi \cdot (2.5\,\text{cm})^2 \cdot \frac{26.5\,\text{cm}}{\sqrt{3}} = 300.410\ldots\,\text{cm}^3$

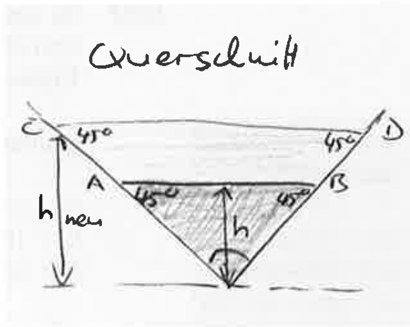


Abnahme der Wasserhöhe
Grundfläche $G = (15\,\text{cm})^2 = 225\,\text{cm}^2$

$h_{\text{Abnahme}} = \frac{V_{\text{eingetaucht}}}{G} = \frac{300.410\ldots\,\text{cm}^3}{225\,\text{cm}^2} = 1.335\ldots\,\text{cm} \approx \mathbf{1.3\,cm}$

Das Wasser sinkt um ungefähr 1.3 cm.

J376 **a** Da das Volumen der Wanne proportional zum Querschnitt (=Grundfläche) ist, genügt es diesen näher zu betrachten.
Wenn gleich viel Wasser dazu geleert wird, wie Flüssigkeit vorhanden ist, muss der Querschnitt des neuen Wasserstandes doppelt so gross sein, wie derjenige des alten.



Alter Wasserstand
(rechtwinklig-gleichschenkliges △):
$h = 30\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad AB = 60\,\text{cm}$
$G = 30\,\text{cm} \cdot 60\,\text{cm} : 2 = 900\,\text{cm}^2$

Neuer Wasserstand (rechtwinklig-gleichschenkliges △):
$h_{neu} = ? \quad \Rightarrow \quad AB = 2h_{neu}$
$G_{neu} = 2 \cdot G = 1\,800\,\text{cm}^2$
$h_{neu}^2 = 1\,800\,\text{cm}^2$
$\mathbf{h_{neu}} = \sqrt{1\,800}\,\text{cm} \approx \mathbf{42.4\,cm}$

Der Wasserspiegel steigt bis zu einer Höhe von 42.4 cm.

b Lösungsidee
Wenn die Stäbe vollständig im Wasser liegen, vergrössert sich das Gesamtvolumen um das Volumen der Stäbe. Damit lässt sich berechnen, wie hoch das Wasser steigt.
Anderseits lässt sich berechnen, bis zu welcher Höhe die Stäbe reichen, wenn sie in der Wanne liegen. Dieser Wert muss kleiner sein als die gesamte Wasserhöhe.
Hier genügt es **nicht**, nur mit dem Querschnitt zu rechnen, da die Stäbe nicht die gleiche Länge wie die Wanne haben.

Länge der Wanne $a = 200\,\text{cm}$
Länge der Stäbe $b = 150\,\text{cm}$
Radius der Stäbe $r = 10\,\text{cm}$

Gesamtvolumen = Volumen Wasser + Volumen Stäbe
$V_{Wasser} = G \cdot a = 900\,\text{cm}^2 \cdot 200\,\text{cm} = 180\,000\,\text{cm}^3$
$V_{Stäbe} = 3 \cdot \pi r^2 \cdot b = 3 \cdot \pi (10\,\text{cm})^2 \cdot 150\,\text{cm} = 141\,371.669\ldots\,\text{cm}^3$
$\mathbf{V_{gesamt}} = V_{Wasser} + V_{Stäbe} = 321\,371.669\ldots\,\text{cm}^3$

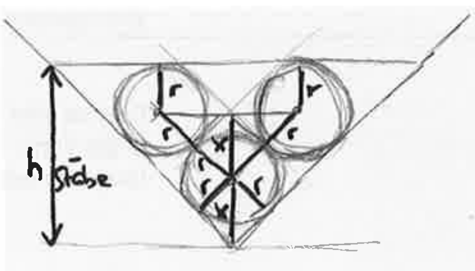
Gesamthöhe von Wasser mit Stäben

$$G_{gesamt} = \frac{V_{gesamt}}{a} = \frac{321\,371.669\ldots\,\text{cm}^3}{200\,\text{cm}} = 1606.858\ldots\,\text{cm}^2$$

$\mathbf{h_{gesamt}} = \sqrt{G_{gesamt}} \approx \mathbf{40.09\,cm}$

Gesamthöhe der Stäbe
$x = r \cdot \sqrt{2}$

$\mathbf{h_{Stäbe}} = 2x + r = 20\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} + 10\,\text{cm}$
$\approx \mathbf{38.28\,cm}$



Die Stäbe werden vollständig von der Flüssigkeit bedeckt.

J377 Da das Volumen bei einem Prisma proportional zur Prismenhöhe ist, genügt es anhand der Grundfläche zu rechnen. Die Grundfläche der Füllung muss halb so gross sein, wie die des Troges.

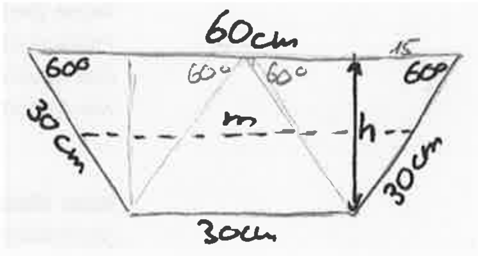
Hinweis für die Lehrperson

Diese Aufgabe ist **sehr schwierig** und eignet sich nur für Lernende, die speziell an der Mathematik interessiert sind.

Die 2. Lösungsidee wird vermutlich eher gefunden. Sie führt aber auf eine quadratische Gleichung.
Diese kann beispielsweise durch geschicktes Ausprobieren auf dem TR gelöst werden.

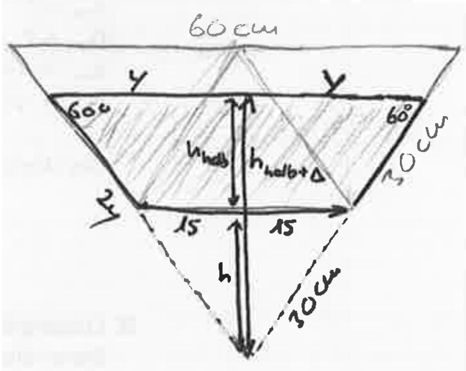
Grundfläche des Troges

$m = 45\,\text{cm}$
$h = 15\,\text{cm} \cdot \sqrt{3}$
$G = 45\,\text{cm} \cdot 15\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} = 675\,\text{cm}^2 \cdot \sqrt{3}$



Lösungsidee 1: Grundfläche zu einem gleichseitigen Dreieck ergänzen

Das Trapez besteht aus 3 gleichseitigen Dreiecken. Ergänzt man unten mit einem vierten, kongruenten Dreieck, so ergänzt dieses nicht nur den ganzen sondern auch den halb gefüllten Trog zu einem gleichseitigen Dreieck. Die Höhe lässt sich damit als Differenz der Höhen des grossen und des kleinen gleichseitigen Dreiecks berechnen.



$G_{halb} = G:2 = 337.5\,\text{cm}^2 \cdot \sqrt{3}$
$G_{\triangledown} = G:3 = 225\,\text{cm}^2 \cdot \sqrt{3}$
$G_{halb+\triangledown} = G_{halb} + G_{\triangledown} = 562.5\,\text{cm}^2 \cdot \sqrt{3}$

Es gilt aber auch: $G_{halb+\triangledown} = y \cdot h_{halb+\triangledown}$ wobei $h_{halb+\triangledown} = y \cdot \sqrt{3}$

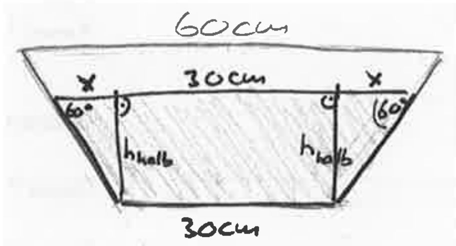
Also $y^2 \cdot \sqrt{3} = 562.5\,\text{cm}^2 \cdot \sqrt{3}$
und daraus $y = \sqrt{562.5}\,\text{cm} = 23.717\ldots\,\text{cm}$

$\mathbf{h_{halb}} = h_{halb+\triangledown} - h = y \cdot \sqrt{3} - 15\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} = 15.098\ldots\,\text{cm} \approx \mathbf{15.1\,cm}$

Das Wasser kommt bei der halben Füllmenge **15.1 cm hoch** zu stehen.

Lösungsidee 2: Direkt mit der halben Trapezfläche arbeiten

Obere Parallelseite der halben Fläche $30\,\text{cm} + 2x$
Mittellinie der halben Fläche $m_{halb} = 30\,\text{cm} + x$
Höhe der halben Fläche $h_{halb} = x \cdot \sqrt{3}$



Halbe Fläche $G_{halb} = m_{halb} \cdot h_{halb}$

auch $G_{halb} = \frac{G}{2}$

gleichgesetzt (ohne Einheiten) $(30 + x)\,x \cdot \sqrt{3} = 337.5 \cdot \sqrt{3}$
$(30 + x)\,x = 337.5$
$30x + x^2 = 337.5$

Dies ist eine quadratische Gleichung.
In der Form $(30 + x)\,x = 337.5$
lässt sich mit dem TR durch suksessive Annäherung eine Lösung finden:

$x = 8.717\ldots$

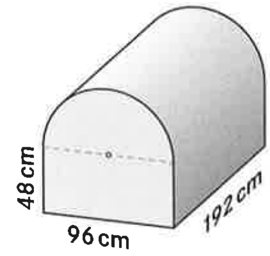
Dann: $\mathbf{h_{halb}} = x \cdot \sqrt{3} = \mathbf{15.098\ldots}$

Das Wasser kommt bei der halben Füllmenge **15.1 cm hoch** zu stehen.

J378 **1** $h = 192\,cm$

$G = \frac{1}{2}\bigcirc_{r=48\,cm} + \square$

$= 0.5 \cdot \pi \cdot (48\,cm)^2 + 96\,cm \cdot 48\,cm = 8\,227.114...\,cm^2$



$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{1\,579\,606\,cm^3}$

$u = \frac{1}{2}\bigcirc_{r=48\,cm} + 2 \cdot 48\,cm + 96\,cm$

$= \pi \cdot 48\,cm + 192\,cm = 342.796...\,cm$

$\mathbf{S} = 2G + u \cdot h$

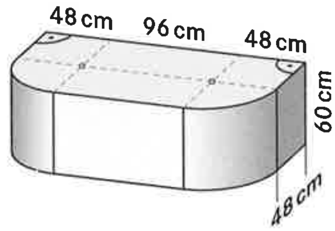
$= 2 \cdot 8\,227.114...\,cm^2 + 192\,cm \cdot 342.796...\,cm \approx \mathbf{82\,271\,cm^2}$

2 $h = 60\,cm$

$G = 2 \cdot \frac{1}{4}\bigcirc_{r=48\,cm} + 2 \cdot \square_{s=48\,cm} + \square_{s=96\,cm}$

$= 0.5 \cdot \pi \cdot (48\,cm)^2 + 2 \cdot (48\,cm)^2 + (96\,cm)^2$

$= 17\,443.114...\,cm^2$



$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{1\,046\,587\,cm^3}$

$u = 2 \cdot \frac{1}{4}\bigcirc_{r=48\,cm} + 2 \cdot 96\,cm + 4 \cdot 48\,cm$

$= \pi \cdot 48\,cm + 384\,cm = 534.796...\,cm$

$\mathbf{S} = 2G + u \cdot h$

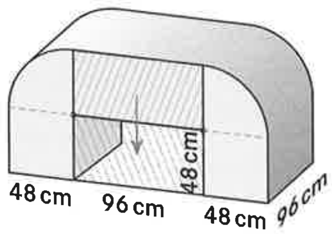
$= 2 \cdot 17\,443.114...\,cm^2 + 60\,cm \cdot 534.796...\,cm \approx \mathbf{66\,974\,cm^2}$

3 $h = 96\,cm$

$G = 2 \cdot \frac{1}{4}\bigcirc_{r=48\,cm} + \square$

$= 0.5 \cdot \pi \cdot (48\,cm)^2 + 48\,cm \cdot 192\,cm$

$= 12\,835.114...\,cm^2$



$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{1\,232\,171\,cm^3}$

$u = 2 \cdot \frac{1}{4}\bigcirc_{r=48\,cm} + 2 \cdot 96\,cm + 6 \cdot 48\,cm$

$= \pi \cdot 48\,cm + 480\,cm = 630.796...\,cm$

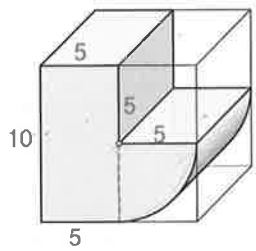
$\mathbf{S} = 2G + u \cdot h$

$= 2 \cdot 12\,835.114...\,cm^2 + 96\,cm \cdot 630.796...\,cm \approx \mathbf{86\,227\,cm^2}$

J379 Für alle Körper $h = 10\,cm$

1 $G = \square + \frac{1}{4}\bigcirc_{r=5\,cm}$

$= 50\,cm^2 + 0.25 \cdot \pi \cdot (5\,cm)^2 = 69.634...\,cm^2$



$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{696.35\,cm^3}$

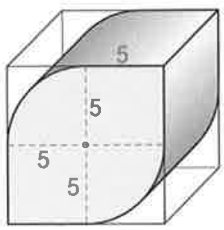
$u = \frac{1}{4}\bigcirc_{r=5\,cm} + 30\,cm$

$= 0.5 \cdot \pi \cdot 5\,cm + 30\,cm = 37.853...\,cm$

$\mathbf{S} = 2G + u \cdot h \approx \mathbf{517.81\,cm^2}$

2 $G = 2 \cdot \square + 2 \cdot \frac{1}{4}\bigcirc_{r=5\,cm}$

$= 50\,cm^2 + 0.5 \cdot \pi \cdot (5\,cm)^2 = 89.269...\,cm^2$



$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{892.70\,cm^3}$

$u = 2 \cdot \frac{1}{4}\bigcirc_{r=5\,cm} + 20\,cm$

$= \pi \cdot 5\,cm + 20\,cm = 35.707...\,cm$

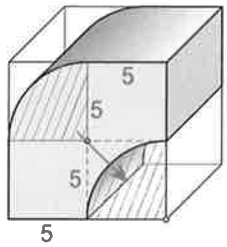
$\mathbf{S} = 2G + u \cdot h \approx \mathbf{535.62\,cm^2}$

■ $G = 3 \cdot \square = 75\,cm^2$

V $= G \cdot h =$ **$750\,cm^3$**

u $= 2 \cdot \frac{1}{4}\bigcirc_{r=5\,cm} + 20\,cm$
$= \pi \cdot 5\,cm + 20\,cm = 35.707...\,cm$

S $= 2G + u \cdot h \approx$ **$507.08\,cm^2$**

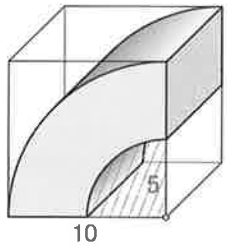


■ $G = \frac{1}{4}\bigcirc_{r=10\,cm} - \frac{1}{4}\bigcirc_{r=5\,cm}$
$= 0.25 \cdot \pi \cdot (10\,cm)^2 - 0.25 \cdot \pi \cdot (5\,cm)^2 = 58.904...\,cm^2$

V $= G \cdot h \approx$ **$589.05\,cm^3$**

u $= \frac{1}{4}\bigcirc_{r=10\,cm} + \frac{1}{4}\bigcirc_{r=5\,cm} + 10\,cm$
$= 0.5 \cdot \pi \cdot 10\,cm + 0.5 \cdot \pi \cdot 5\,cm + 10\,cm = 33.561...\,cm$

S $= 2G + u \cdot h \approx$ **$453.43\,cm^2$**

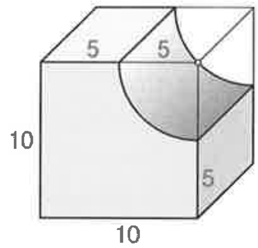


■ $G = \square - \frac{1}{4}\bigcirc_{r=5\,cm}$
$= 100\,cm^2 - 0.25 \cdot \pi \cdot (5\,cm)^2 = 80.365...\,cm^2$

V $= G \cdot h \approx$ **$803.65\,cm^3$**

u $= \frac{1}{4}\bigcirc_{r=5\,cm} + 30\,cm$
$= 0.5 \cdot \pi \cdot 5\,cm + 30\,cm = 37.853...\,cm$

S $= 2G + u \cdot h \approx$ **$539.27\,cm^2$**

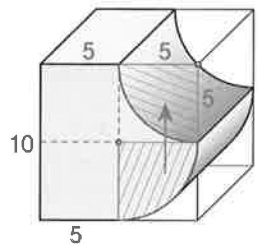


■ $G = 3 \cdot \square = 75\,cm^2$

V $= G \cdot h =$ **$750\,cm^3$**

u $= 2 \cdot \frac{1}{4}\bigcirc_{r=5\,cm} + 20\,cm$
$= \pi \cdot 5\,cm + 20\,cm = 35.707...\,cm$

S $= 2G + u \cdot h \approx$ **$507.08\,cm^2$**

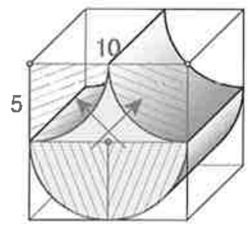


■ $G = \square = 50\,cm^2$

V $= G \cdot h =$ **$500\,cm^3$**

u $= 4 \cdot \frac{1}{4}\bigcirc_{r=5\,cm} = \bigcirc_{r=5\,cm}$
$= 2\pi \cdot 5\,cm = 31.415...\,cm$

S $= 2G + u \cdot h \approx$ **$414.16\,cm^2$**

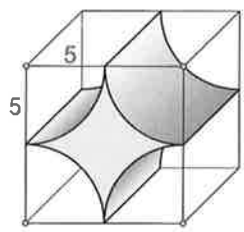


■ $G = \square_{gross} - 4 \cdot \frac{1}{4}\bigcirc_{r=5\,cm} = \square_{gross} - \bigcirc_{r=5\,cm}$
$= 100\,cm^2 - \pi \cdot (5\,cm)^2 = 21.460...\,cm^2$

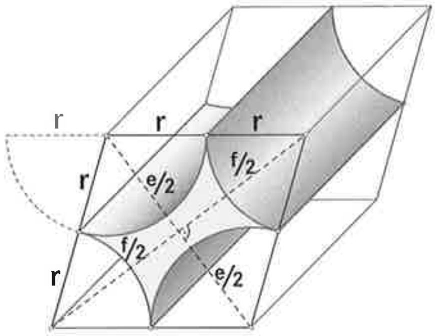
V $= G \cdot h \approx$ **$214.60\,cm^3$**

u $= 4 \cdot \frac{1}{4}\bigcirc_{r=5\,cm} = \bigcirc_{r=5\,cm}$
$= 2\pi \cdot 5\,cm = 31.415...\,cm$

S $= 2G + u \cdot h \approx$ **$357.08\,cm^2$**



J380 Die vier Kreisteile ergänzen sich zu einem Kreis.
Es gilt deshalb: $G = \diamond - \bigcirc$ $\quad u = \bigcirc$

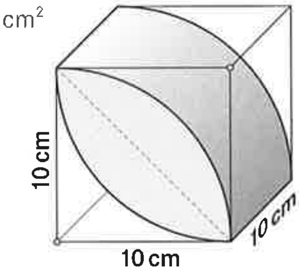


Rhombus $e = 12\,\text{cm}$ $\quad f = 16\,\text{cm}$
Prismenhöhe $h = 18\,\text{cm}$

Kreisradius $2r = \sqrt{(\frac{e}{2})^2 + (\frac{f}{2})^2} = \sqrt{6^2+8^2}\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$
$r = 5\,\text{cm}$

$G = \diamond - \bigcirc = \frac{e \cdot f}{2} - \pi \cdot r^2 = 17.460\ldots\,\text{cm}^2$
$u = \bigcirc = 2\pi \cdot r = 31.415\ldots\,\text{cm}$
$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{314.28\,cm^3}$
$\mathbf{S} = 2G + u \cdot h \approx \mathbf{600.41\,cm^2}$

J381 $G = 2 \cdot (\frac{1}{4}\bigcirc_{r=10\,\text{cm}} - \triangle) = 2 \cdot (0.25\,\pi \cdot (10\,\text{cm})^2 - 50\,\text{cm}^2) = 57.079\ldots\,\text{cm}^2$



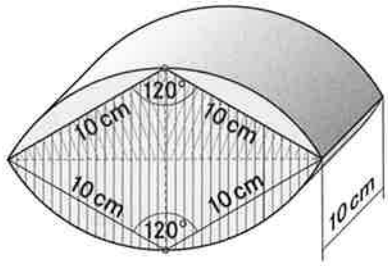
$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{570.80\,cm^3}$

$u = 2 \cdot \frac{1}{4}\bigcirc_{r=10\,\text{cm}} = \pi \cdot 10\,\text{cm} = 31.415\ldots\,\text{cm}$

$\mathbf{S} = 2G + u \cdot h \approx \mathbf{428.32\,cm^2}$

$G = 2 \cdot (\frac{1}{3}\bigcirc_{r=10\,\text{cm}} - 2 \cdot \frac{1}{2}\triangle_{s=10\,\text{cm}})$

$= 2 \cdot (\frac{\pi \cdot (10\,\text{cm})^2}{3} - \frac{10\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm}\sqrt{3}}{2}) = 122.836\ldots\,\text{cm}^2$

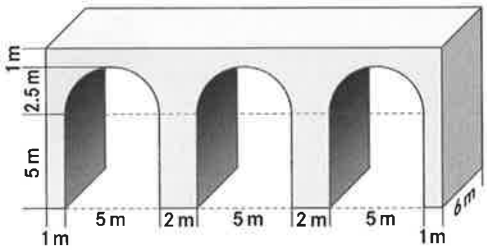


$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{1\,228.37\,cm^3}$

$u = 2 \cdot \frac{1}{3}\bigcirc_{r=10\,\text{cm}} = 2 \cdot \frac{2\pi \cdot 10\,\text{cm}}{3} = 41.887\ldots\,\text{cm}$

$\mathbf{S} = 2G + u \cdot h \approx \mathbf{664.55\,cm^2}$

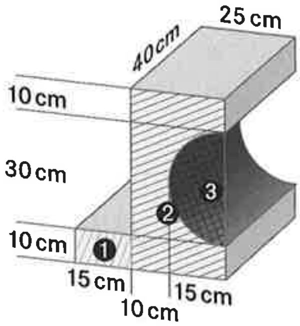
J382 $G = \text{grosses} \square - 3 \cdot \square - 3 \cdot \frac{1}{2}\bigcirc_{r=2.5\,\text{m}}$
$= 21\,\text{m} \cdot 8.5\,\text{m} - 3 \cdot (5\,\text{m})^2 - 1.5 \cdot \pi \cdot (2.5\,\text{m})^2$
$= 74.047\ldots\,\text{m}^2$



$h = 6\,\text{m}$

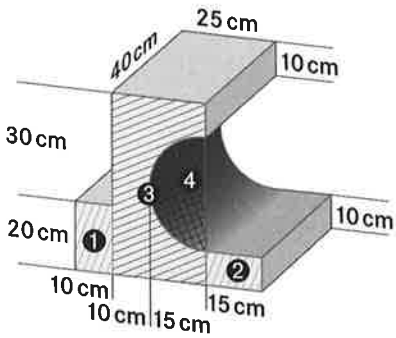
$V = G \cdot h \approx \mathbf{444.29\,m^3}$

J383



$G = \text{Rechteck}❶ + \text{Rechteck}❷ - \text{Halbkreis}❸$
$= 10\,\text{cm} \cdot 15\,\text{cm} + 50\,\text{cm} \cdot 25\,\text{cm} - 0.5 \cdot \pi \cdot (15\,\text{cm})^2$
$= 1\,046.570\ldots\,\text{cm}^2$

$h = 40\,\text{cm}$
$V = G \cdot h \approx \mathbf{41\,863\,cm^3}$



$G = \text{Rechteck}❶ + \text{Rechteck}❷ + \text{Rechteck}❸ - \text{Halbkreis}❹$
$= (10 \cdot 20 + 15 \cdot 10 + 50 \cdot 25)\,\text{cm}^2 - 0.5 \cdot \pi \cdot (15\,\text{cm})^2$
$= 1\,246.570\ldots\,\text{cm}^2$

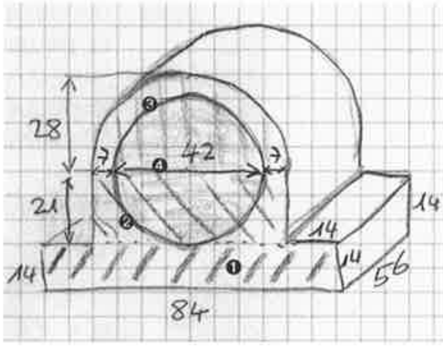
$h = 40\,\text{cm}$
$V = G \cdot h \approx \mathbf{49\,863\,cm^3}$

J384 ■ Die Modellmasse sind in mm angeschrieben.

$G = ▭❶ + ▭❷ + ⌓❸ - ○❹$
$= (84 \cdot 14 + 56 \cdot 21 + 0.5\,\pi \cdot 28^2 - \pi \cdot 21^2)\,mm^2$
$= 2\,198.061...\,mm^2$

$h = 56\,mm$
$V = G \cdot h = 123\,091.469...\,mm^3$

Dichte: $8.7\,g/cm^3$
Masse: $\mathbf{m} = 123.091... \cdot 8.7\,g$
$\approx 1071\,g = \mathbf{1.071\,kg}$



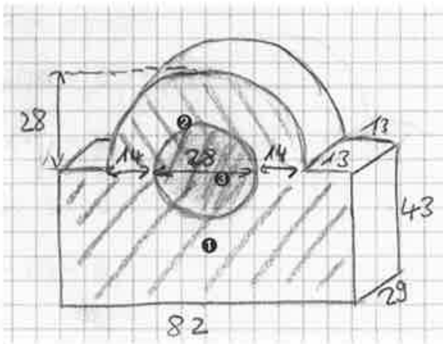
Das Modell (Massstab 1 : 10) wird über ein Kilogramm schwer.

■ Die Modellmasse sind in mm angeschrieben.

$G = ▭❶ + ⌓❷ - ○❸$
$= (82 \cdot 43 + 0.5\,\pi \cdot 28^2 - \pi \cdot 14^2)\,mm^2$
$= 4\,141.752...\,mm^2$

$h = 29\,mm$
$V = G \cdot h = 120110.812...\,mm^3$

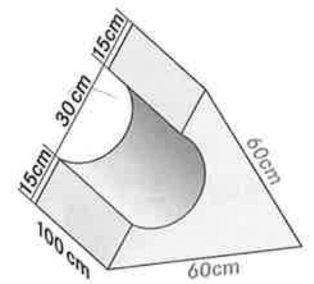
Dichte: $8.7\,g/cm^3$
Masse: $\mathbf{m} = 120.110... \cdot 8.7\,g$
$\approx 1\,045\,g = \mathbf{1.045\,kg}$



Das Modell (Massstab 1 : 10) wird über ein Kilogramm schwer.

J385 Arbeitsblatt

J386



$G = \triangle - ⌓ = \frac{60\,cm \cdot 30\,cm\sqrt{3}}{2} - \frac{(15\,cm)^2 \cdot \pi}{2} = 1205.416...\,cm^2$

$u = 2 \cdot 60\,cm + 2 \cdot 15\,cm + \pi \cdot 15\,cm = 197.123...\,cm$

$h = 100\,cm$

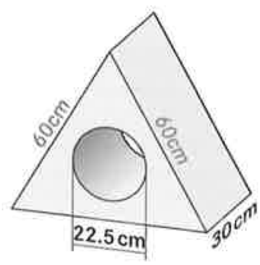
$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{120\,542\,cm^3}$
$\mathbf{S} = 2G + u \cdot h \approx \mathbf{22\,123\,cm^2}$

$G = \triangle - ○ = \frac{60\,cm \cdot 30\,cm\sqrt{3}}{2} - \pi \cdot (11.25\,cm)^2 = 1161.237...\,cm^2$

$u = 3 \cdot 60\,cm + 2\pi \cdot 11.25\,cm = 250.685...\,cm$

$h = 30\,cm$

$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{34\,837\,cm^3}$
$\mathbf{S} = 2G + u \cdot h \approx \mathbf{9\,843\,cm^2}$



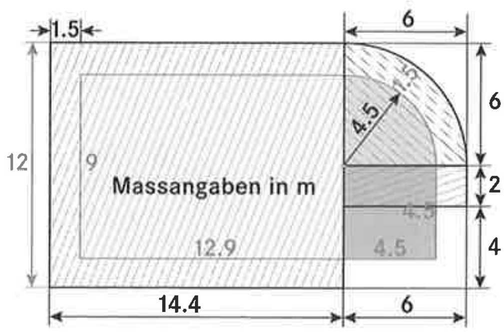
J387 G_{Etage} = ▨ + ▭ + ◺

$= (14.4 \cdot 12 + 6 \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2)\,m^2$
$= 213.074...\,m^2$

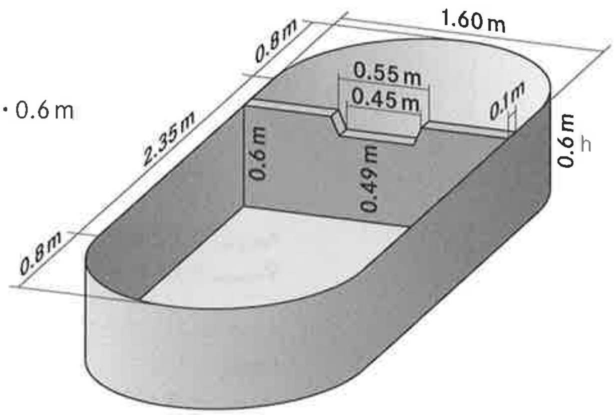
G_{Dach} = ☐ + ■ + ◺

$= (12.9 \cdot 9 + 4.5 \cdot 4.5 + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4.5^2)\,m^2$
$= 152.254...\,m^2$

$h = 2.5\,m$
$\mathbf{V} = 3 \cdot G_{Etage} \cdot h + G_{Dach} \cdot h = \mathbf{1978.693\,m^3}$



J388 $V_{Wasser} = V_{Gesamt} - V_{Abtrennung}$



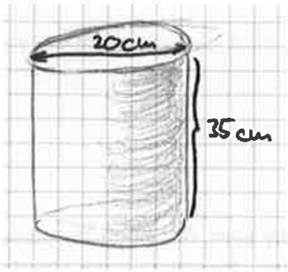
$V_{Gesamt} = (\square + 2 \cdot ⌓) \cdot h$
$= (2.35\,m \cdot 1.6\,m + \pi \cdot (0.8\,m)^2) \cdot 0.6\,m$
$= 3.462...\,m^3$

$V_{Abtrenn} = (\square - ▽) \cdot 0.1\,m$
$= (1.6 \cdot 0.6 - 0.5 \cdot 0.11) \cdot 0.1\,m$
$= 0.0905\,m^3$

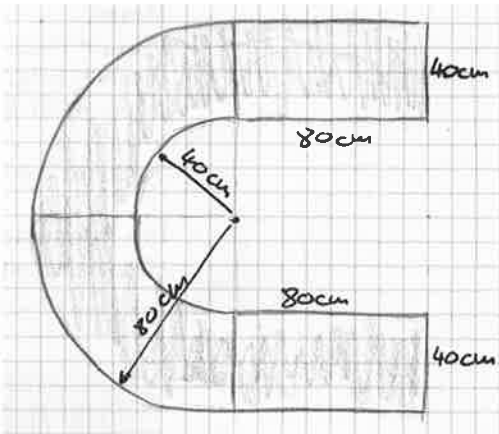
$V_{Wasser} = V_{Gesamt} - V_{Abtrennunng}$
$= 3.371871...\,m^3$
$= 3\,371.871...\,dm^3 \approx 3\,372\,l$

Um beide Becken bis an den Rand zu füllen waren ewas mehr als **3 372 Liter** Wasser nötig.

J389



Dichte Granit
$2.9\,g/cm^3$



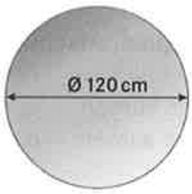
Säulen:
$V_{Säule} = \pi \cdot r^2 \cdot h$
$= \pi \cdot (10\,cm)^2 \cdot 35\,cm = 10\,995.574...\,cm^3$
$\mathbf{m_{5\,Säulen}} = 5 \cdot 10\,995.574... \cdot 2.9g \approx \mathbf{159\,436\,g}$

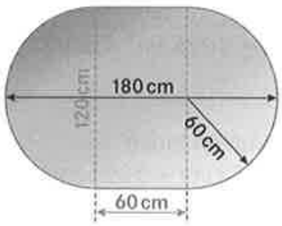
Platten:
$G_{Platten} = 2 \cdot 80\,cm \cdot 40\,cm + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (80\,cm)^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (40\,cm)^2 = 13\,939.822...\,cm^2$
$h = 5\,cm$
$V_{Platten} = G_{Platten} \cdot 5\,cm = 69\,699.111...\,cm^3$
$\mathbf{m_{Platten}} = = 69\,699.111...\,cm^3 \cdot 2.9g \approx \mathbf{202\,127\,g}$

Bank:
$\mathbf{m_{Bank}} = m_{Platten} + m_{5Säulen} \approx \mathbf{361.563\,kg}$
Mit samt ihren Beinen wiegt die Bank fast **362 kg**.

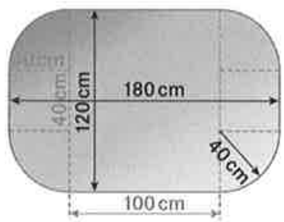
J390 Höhe aller Glasplatten: $h = 1.2\,cm$ Dichte aller Glasplatten: $2.5\,g/cm^3$

Runder Tisch: Kreis
$G = \pi \cdot (60\,cm)^2 = 11\,309.733...\,cm^2$
$V = G \cdot h = 13\,571.680...\,cm^3$
$\mathbf{m} = 13\,571.680... \cdot 2.5\,g \approx \mathbf{33.929\,kg}$





Ovaler Tisch: Rechteck + 2 Halbkreise
$G = 60\,cm \cdot 120\,cm + \pi \cdot (60\,cm)^2 = 18\,509.733...\,cm^2$
$V = G \cdot h = 22\,211.680...\,cm^3$
$\mathbf{m} = 22\,211.680... \cdot 2.5\,g \approx \mathbf{55.529\,kg}$



Rechteckiger Tisch: Rechteck + 2 Quadrate + 4 Viertelskreise
$G = 100\,cm \cdot 120\,cm + 2 \cdot (40\,cm)^2 + \pi \cdot (40\,cm)^2 = 20\,226.548...\,cm^2$
$V = G \cdot h = 24\,271.857...\,cm^3$
$\mathbf{m} = 24\,271.857... \cdot 2.5\,g \approx \mathbf{60.680\,kg}$

J391 $\mathbf{V_{Marmor} = V_{Primsa} - V_{Loch}}$

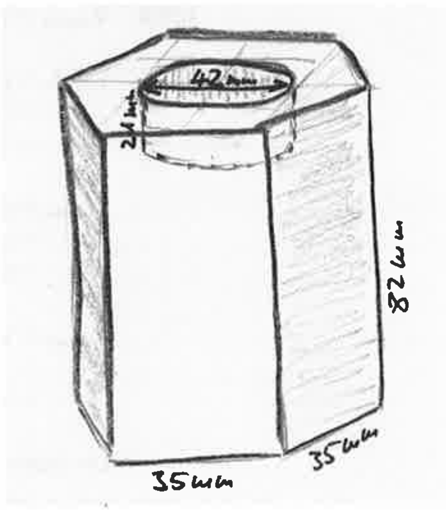
Sechsseitiges Prisma:

G_{Prisma} = regelmässiges 6-Eck = 6·gleichseitiges △

$= 6 \cdot \frac{35\,\text{mm} \cdot 17.5\,\text{mm}\sqrt{3}}{2} = 3\,182.643\ldots\,\text{mm}^2$

h_{Prisma} = 82 mm

$\mathbf{V_{Prisma}}$ = G · h = 260976.755... mm^3 ≈ **260.98 cm^3**



Loch:

G_{Loch} $= \pi \cdot (21\,\text{mm})^2 = 1385.442\ldots\,\text{mm}^2$

h_{Loch} = 21 mm

$\mathbf{V_{Loch}}$ = G · h = 29 094.289... mm^3 ≈ **29.09 cm^3**

Masse:

$\mathbf{V_{Marmor}} = V_{Prisma} - V_{Loch} \approx 231.89\,\text{cm}^3$ (mit den gerundeten Werten gerechnet)

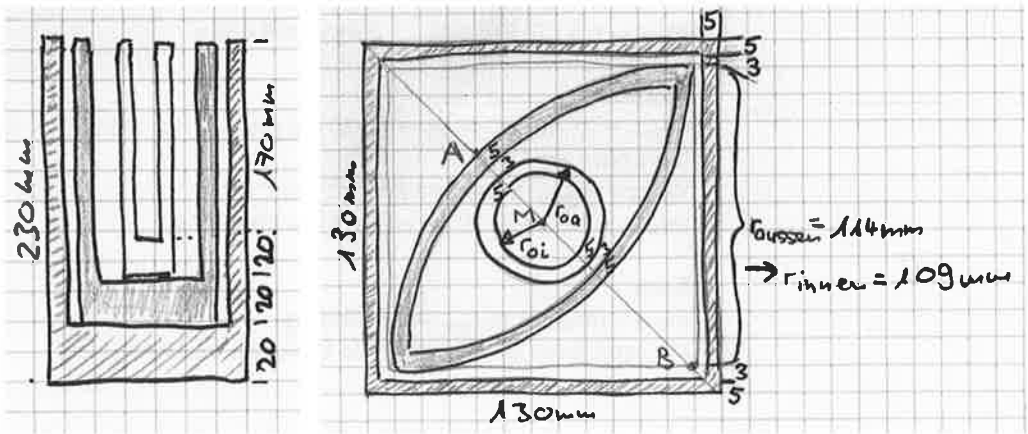
Dichte = 2.7 g/cm^3

m ≈ 231.89 · 2.7 g ≈ 626 g

30 Stück: 30 · 626 g = **18 780 g**

Das **Paket** wird ungefähr **20 kg schwer** sein, da noch Verpackungsmaterial dazu kommt. Ein ziemlich ungemütliches Unterfangen, dieses zu Fuss abzuholen.

J392



Gelbe quadratische Vase

1 Seite aussen s_a = 13 cm Seite innen s_i = 12 cm
Höhe aussen h_a = 23 cm Höhe innen h_i = 21 cm

2 Wasservolumen = Volumen innen
$\mathbf{V_{Wasser\,gelb}} = s_i^2 \cdot h_i = (12\,\text{cm})^2 \cdot 21\,\text{cm} = 3024\,\text{cm}^3 \approx$ **3.02 l**

3 Glasvolumen = Volumen aussen − Volumen innen
$\mathbf{V_{Glas\,gelb}} = s_a^2 \cdot h_a - s_i^2 \cdot h_i = (13\,\text{cm})^2 \cdot 23\,\text{cm} - 3024\,\text{cm}^3 =$ **863 cm^3**

4 Masse
$\mathbf{m_{gelb}}$ = 863 · 2.5 g = 2 157.5 g ≈ **2.158 kg**

Orange linsenförmige Vase

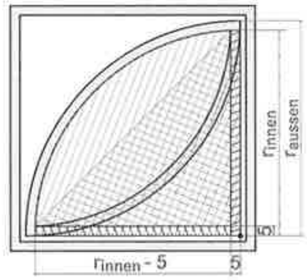
- Ihr Grundriss besteht aus Viertelkreisen, die ihr gemeinsames Zentrum in B haben.

Äusserer Radius $r_{aussen} = 130\,mm - 2 \cdot (5\,mm + 3\,mm) = 114\,mm$
Innerer Radius $r_{innen} = r_{aussen} - 5\,mm = 109\,mm$

Aussendurchmesser längs $d_{längs} = r_{aussen} \cdot \sqrt{2} = 114\,mm \cdot \sqrt{2} \approx 161.2\,mm$
Aussendurchmesser quer $d_{quer} = 2\,(r_{aussen} - r_{aussen} \cdot \sqrt{2} : 2) \approx 66.8\,mm$ (Skizze S.146)

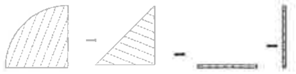
Höhe aussen $h_{aussen} = 210\,mm$ Höhe innen $h_{innen} = 190\,mm$

- Wasservolumen = Volumen innen



Die halbe Innengrundfläche $G_{i/2}$ lässt sich – mit einem minimen Fehler – berechnen als

$G_{i/2}$ =



$$G_{i/2} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (r_{innen})^2 - \frac{1}{2} \cdot (r_{innen} - 5mm)^2 - 5mm \cdot r_{innen} - 5mm \cdot (r_{innen} - 5mm)$$
$$= 2\,858.315...\,mm^2$$

$$G_{innen} = 2 \cdot G_{i/2} = 5\,716.631...\,mm^2$$

$$\mathbf{V_{Wasser\ orange}} = G_{innen} \cdot h_{innen} = 1\,086\,159.920...\,mm^3 = 1\,086.1...\,cm^3 \approx \mathbf{1.09\,l}$$

- Glasvolumen = Volumen aussen – Volumen innen

$$G_{a/2} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (r_{aussen})^2 - \frac{1}{2} \cdot (r_{aussen})^2 = 3\,709.034...\,mm^2$$

$$G_{aussen} = 2 \cdot G_{a/2} = 7\,418.069...\,mm^2$$

$$\mathbf{V_{Glas\ orange}} = G_{aussen} \cdot h_{aussen} - V_{Wasser\ orange} = 471634.583...\,mm^3 \approx \mathbf{471.63\,cm^3}$$

- Masse

$\mathbf{m_{orange}} \approx 471.63 \cdot 2.5\,g = 1179\,g = \mathbf{1.179\,kg}$

Grüne runde Vase

- Höhe aussen $h_{O aussen} = 190\,mm$ Höhe innen $h_{O innen} = 170\,mm$

Radius aussen $r_{Oa} = r_{aussen} - 5\,mm - 3\,mm - \frac{1}{2} \cdot r_{aussen} \cdot \sqrt{2} = 25.389...\,mm \approx 25.4\,mm$

Radius innen $r_{Oi} = r_{Oa} - 5\,mm = 20.389...\,mm \approx 20.4\,mm$

- Wasservolumen = Volumen innen

$\mathbf{V_{Wasser\ grün}} = \pi \cdot r_{Oi}^2 \cdot h_{O innen} = 222\,037.267...\,mm^3 \approx \mathbf{0.22\,l}$

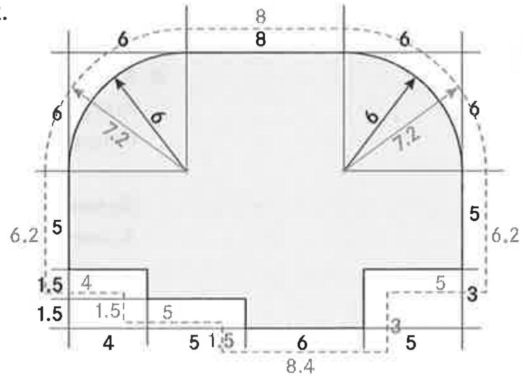
- Glasvolumen = Volumen aussen – Volumen innen

$\mathbf{V_{Glasgrün}} = \pi \cdot r_{Oa}^2 \cdot h_{O aussen} - \pi \cdot r_{O1}^2 \cdot h_{O innen} = 162\,752.00...\,mm^3 \approx \mathbf{0.16\,l}$

- Masse

$\mathbf{m_{grün}} = 162.752... \cdot 2.5\,g = 406.88...\,g \approx \mathbf{407\,g}$

J393 Das Netz wird 1.2 m von Haus entfernt montiert. Die dabei entstehenden Masse können dem jeweiligen Grundriss entnommen werden.



Grundriss links

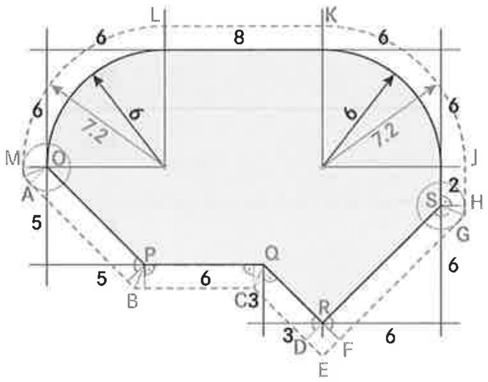
Umfang

u = (8.4 + 3 + 5 + 6.2 + 8 + 6.2 + 4 + 1.5 + 5 + 1.5) m
 + $\pi \cdot 7.2$ m

u = 48.8 m + $\pi \cdot 7.2$ m = 71.419... m

A_{Netz} = u·47 m ≈ **3 357 m²**

Es sind **mindestens 3 360 m² Netz** nötig.



Grundriss rechts

Wegen der nicht rechtwinkligen Ecken erfordert die Umfangsberechnung hier mehr Aufwand – und vor allem einige Überlegungen.
Der folgende Vorschlag ist ein mögliches V orgehen. Es sind auch andere Lösungen möglich, zumal ja nicht genau bekannt ist, wie die Gerüste der verschiedenen Hausseiten bei den Ecken zusammenkommen.

Wie genau?
1 m mehr Umfang gibt 47 m² mehr Fläche. Bei dieser Haushöhe wirkt sich etwas mehr oder weniger Verbrauch an den Ecken schnell in grossen Quadratmeterzahlen aus.

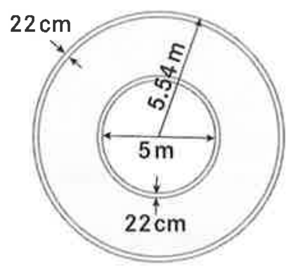
ABCD: Der Streckenzug ABCD ist gleich lang wie der innere Streckenzug OPQR. CD ist nämlich um gleich viel kürzer als QR, wie AB länger ist als OP.
MA und **GH** können mit je einem 45° Kreisbogen mit Radius r = 1.2 m angenähert werden.
Es folgt:

ABCD	= 6 m + 5 m$\sqrt{2}$ + 3 m$\sqrt{2}$	HJ	= 2 m
DEF	= 2·1.2 m	JK + LM	= $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 7.2$ m
FG	= 6 m$\sqrt{2}$	KL	= 8 m
GH + AM	= $2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2\pi \cdot 1.2$ m		

u_{total} = 62.703... m ⇒ A_{Netz} = u·47 m ≈ **2 947 m²**

Es sind **mindestens 2 950 m² Netz** nötig.

J394 **a**



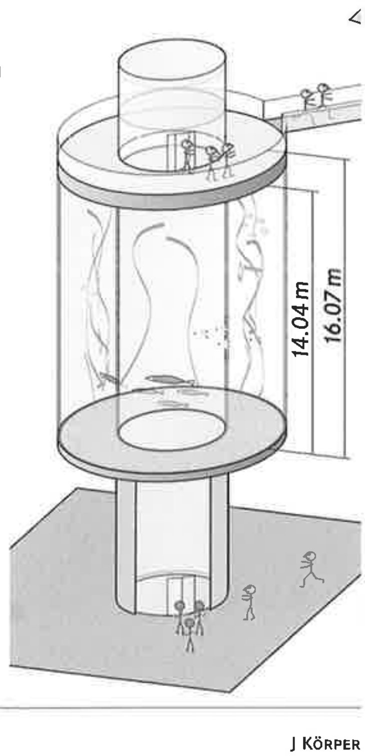
Wassergrundlfäche:

$G_W = \pi \cdot (5.54\,m - 0.22\,m)^2$
$- \pi \cdot (2.5\,m + 0.22\,m)^2$
$= \pi \cdot ((5.32\,m)^2 - (2.72\,m)^2)$
$= 65.671...\,m^2$

h_W = 14.04 m

$V_W = G_W \cdot h_W$
≈ 922 m³ = **922 000 l**

Das Riesenaquarium fasst **über 900 000 Liter** Wasser.



Fehlerhafte Zeichnungen

Die Zeichnungen in der 1. Auflage des Buches sind leider fehlerhaft: Beim Aquarium fehlt der Boden, der deutlich macht, dass die 14.04 m die eigentliche, innere Aquariumshöhe sind.
Beim Grundriss sind die Pfeile des 5m-Durchmessers zu weit nach aussen gerutscht.

b Volumen eines Mantelstücks:

$G_M = 0.25 \cdot \pi \cdot ((5.54\,m)^2 - (5.32\,m)^2) = 1.876...\,m^2$
h_M = 16.07 m
$V_M = G_M \cdot h_M = 30.154...\,m^3$

Masse eines Mantelstücks:
Dichte 1.2 g/cm³ = 1.2 kg/dm³ = 1.2 t/m³
$\mathbf{m_M}$ = 30.154... · 1.2 t ≈ **36.18 t**

Ein einzelnes Mantelstück war über 36 Tonnen schwer.

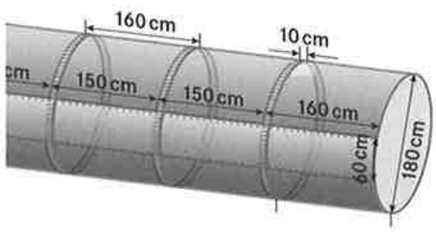
Der Wasserspiegel steigt um gleich viel, wie wenn man $70\,dm^3 = 0.07\,m^3$ Wasser ins Aquarium leeren würde. Folglich gilt:

$G_W \cdot h_{Zunahme} = 0.070$

$\mathbf{h_{Zunahme}} = 0.070 : G_W \approx 0.001\,m = \mathbf{1\,mm}$

Eine Höhenveränderung des Wasserspiegels ist kaum zu bemerken.

J395 **Gesamtes Wasservolumen**



$r_{innen} = 0.9\,m$

Gesamtlänge = 152 m

$\mathbf{V_{Wasser}} = \pi \cdot (0.9\,m)^2 \cdot 152\,m$

$= 386.7928...\,m^3 \approx \mathbf{386\,793\,l}$

Die Rohrleitung fasst **etwa 386 790 l** Wasser.

Gesamte Aussenfläche (ohne Absatztiefe bei den Überlappungen)

Der Aussendurchmesser ist mindestens 1.812 m. Bei den Überlappungen mehr.

$M = \pi \cdot 1.812\,m \cdot 152\,m \approx 865\,m^2$

Rostschutz: $865 \cdot 0.6\,kg = 519\,kg$

Eisenglimmer: $865 \cdot 1.5\,kg = 1\,297.5\,kg$

Es braucht **ungefähr 520 kg Rostschutz** und **1 300 kg Eisenglimmer**.

Wie genau?
Bei all diesen Anwendungen stellt sich die Frage, wie genau gerechnet werden soll.

Genügt es hier bei nicht, den gegebenen Durchmesser zu nehmen? Wenn nein, was ist dann mit den Überlappungen, dort ist der Radius noch grösser?

Wichtig scheint mir, zu sensibilisieren, dass kleine Veränderungen grosse Auswirkungen haben können, wenn eine Grösse riesig ist.
Mit dem Innendurchmesser gibt es bei fast $6\,m^2$ weniger. Dies kann natürlich wett gemacht werden, wenn am Schluss grosszügiger aufgerundet wird. Aber dafür muss man sich zuerst bewusst sein, dass es eben eine grössere Differenz geben kann.

Anzahl Rohrstücke (siehe Abbildung oben)

$x \cdot 1.5\,m + 1.6\,m = 152\,m$

$x = 100.266...$

Insgesamt sind es also 102 Rohrstücke (von einem wurde nur rund ¼ gebraucht).

Blechlänge eines Stücks

r_{Blech} = Mittlerer Radius = Radius bis zur Mitte der Blechdicke

$r_{Blech} = 0.906\,m$

$l_{Blech} = u_{Blech} + 0.6\,m$

$= 2\pi \cdot 0.906\,m + 0.6\,m = 6.292...\,m \approx 6.3\,m$ (aufgerundet wegen Überlappung)

Gesamte Blechfläche

$\mathbf{A_{Blech}} = 102 \cdot 1.6\,m \cdot 6.3\,m = 1\,028.16\,m^2 \approx \mathbf{1\,030\,m^2}$

Es wurden damals rund $\mathbf{1\,030\,m^2}$ Stahlblech verarbeitet.

Masse der vollen Leitung

Dichte Stahlblech $7.9\,kg/dm^3 = 7\,900\,kg/m^3$

$V_{Blech} \approx 101.27 \cdot 1.6\,m \cdot 6.3\,m \cdot 0.006\,m = 6.124...\,m^3$

$\mathbf{m_{Blech}} \approx 6.124... \cdot 7\,900\,kg \approx \mathbf{48\,386\,kg}$

$\mathbf{m_{Wasser}} \approx \mathbf{386\,790\,kg}$

$\mathbf{m_{Anstrich}} \approx 519\,kg + 1\,297.5\,kg = \mathbf{2\,816.5\,kg}$

$\mathbf{m_{volle\ Leitung}} = \mathbf{m_{Blech}} + \mathbf{m_{Anstrich}} + \mathbf{m_{Wasser}} = \mathbf{437\,992.5\,kg}$

Die volle Leitung ist **rund 438 000 kg** schwer.

Wasserdurchfluss

In einer Sekunde wird ein Rohrstück von 1.2 m «gefüllt»:

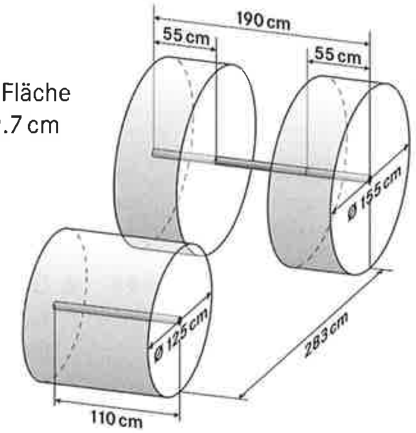
$V_{1Sek} = \pi \cdot (0.9\,m)^2 \cdot 1.2\,m = 3.053...\,m^3$

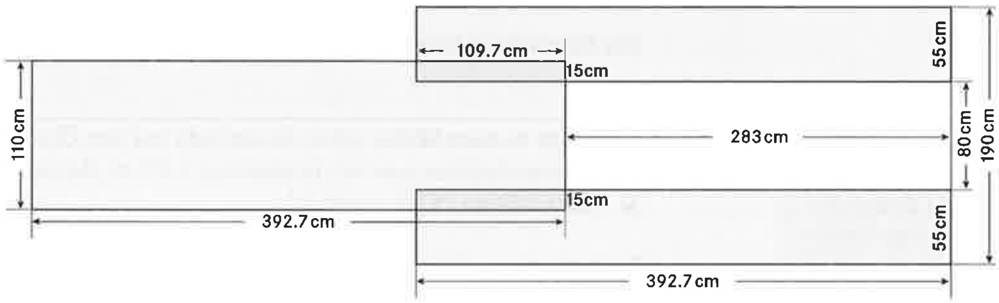
$V_{1Stunde} = 3\,600 \cdot 3.053...\,m^3 = 10\,993.061...\,m^3 \approx 10\,993\,061\,l$

In eine Stunde fliessen mehr als 10 993 000 Liter Wasser durch die Leitung.

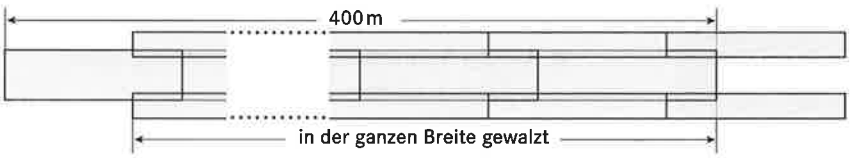
J396 **a** $u_{vorne} = \pi \cdot 125\,cm = 392.699 \approx 392.7\,cm$

$A_{gewalzt}$ = Walzfläche aller 3 Walzen - doppelt gewalzte Fläche
$= 392.7\,cm \cdot (110\,cm + 2 \cdot 55\,cm) - 2 \cdot 15\,cm \cdot 109.7\,cm$
$= 83103\,cm^2 \approx \mathbf{8.31\,m^2}$





b 2.4 km vorwärts in einer Stunde $\Rightarrow$ 400 m vorwärts in 10 Minuten



1 In der **ganzen Breite** gewalzt wird ein Stück von 400 m - 2.83 m = **397.17 m Länge.**

2 **Doppelt gewalzte Fläche**: $2 \cdot 397.17\,m \cdot 0.15\,m \approx \mathbf{119\,m^2}$

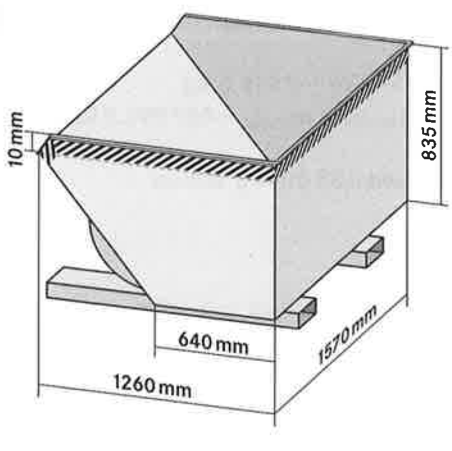
Mit dem doppelt gewalzten Bereich wird gewährleistet, dass der Belag wirklich eben wird. Wären die hinteren Walzen genau 110 cm auseinander, so dass es keinen doppelt gewalzten Bereich gäbe, so würden unschöne, unebene Nähte (Wulste) zwischen den drei Bereichen entstehen.

3 400 m = 40 000 cm

Anzahl Umdrehungen vorne: $\frac{40\,000\,cm}{u_{vorne}} = \frac{40\,000\,cm}{\pi \cdot 125\,cm} \approx \mathbf{101.9}$ **fast 102 Mal**

Anzahl Umdrehungen hinten: $\frac{40\,000\,cm}{\pi \cdot 155\,cm} \approx \mathbf{82.1}$ **etwas mehr als 82 Mal**

J397 **a**

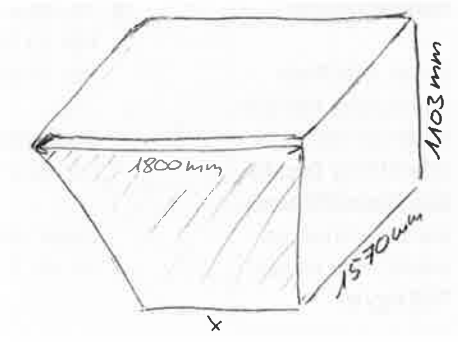


Grundfläche: Trapez
$m = (1260\,mm + 640\,mm) : 2 = 950\,mm$
$h_{Trapez} = 825\,mm$
$G = m \cdot h_{Trapez} = 783\,750\,mm^2$

Volumen
$h_{Prisma} = 1\,570\,mm$
$\mathbf{V} = G \cdot h_{Prisma} = 1\,230\,487\,500\,mm^3 \approx \mathbf{1\,230\,l}$

Der Behälter fasst 1 230 Liter.

b Volumen und Grundfläche



$V = 2\,000\ l = 2\,000\,000\,000\ mm^3$
$h_{Prisma} = 1\,570\,mm$

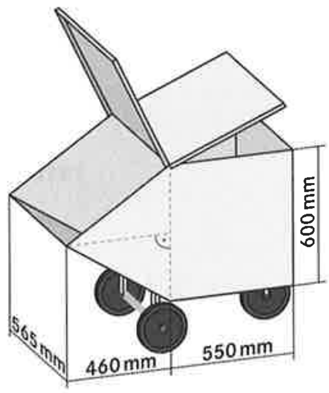
$V = G \cdot h_{Prisma}$
$G = V : h_{Prisma} \approx 1273885\,mm^2$

Trapez
Wir gehen in unserer Lösung davon aus, dass die Füllhöhe wiederum 10 mm unter der Gesamthöhe liegen soll: $h_{Trapez} = 1093\ mm$

$G = m \cdot h_{Trapez} \quad \Rightarrow \quad m = G : h_{Trapez} = 1165.49...\,mm$

$\mathbf{x} = 2 \cdot m - 1800\,mm \approx \mathbf{531\,mm}$
Das Bodenstück der Wanne ist **531 mm x 1570 mm** gross.

J398 **a** $G = 550\,mm \cdot 600\,mm + 600\,mm \cdot 460\,mm : 2$
$= 468\,000\,mm^2$



$h = 565\,mm$
$\mathbf{V} = G \cdot h = 264\,420\,000\,mm^3 = \mathbf{264.42\ l}$

Er fasst ungefähr 264 Liter.

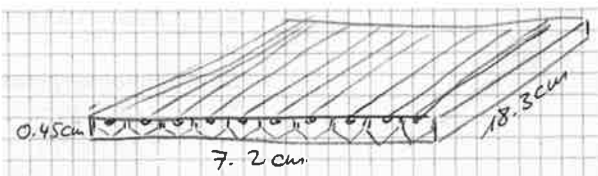
b Der dreieckige Teil der Grundfläche ist offensichtlich gleichschenklig. Die Grundfläche hat somit den Umfang
$u = 2 \cdot 550\,mm + 600\,mm + 2 \cdot \sqrt{300^2 + 460^2}\,mm$
$\approx 2\,798\ mm$

Oberfläche innen und aussen: Wir vernachlässigen den Rand der Deckel und rechnen die Innenseite gleich gross wie die Aussenseite.
$2S = 2(2G + u \cdot h) \approx 5\,034\,150\,mm^2 \approx 503.4\ dm^2$

Zu bemalende Fläche von 27 Wagen: $27 \cdot 503.4\,dm^2 = 13\,591.8\,dm^2$

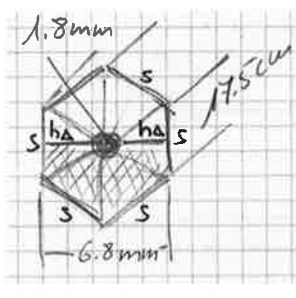
Der Hauswart muss Farbe für ungefähr $\mathbf{13\,600\,dm^2} = 136\,m^2$ besorgen.

J399 **a** **Volumen eines Zedernbrettchens**



$V_{Brett} = 7.2\,cm \cdot 18.3\,cm \cdot 0.45\,cm$
$= \mathbf{59.292\,cm^3}$

Volumen der 10 Bleistifthälften
Aus einem Brett entstehen 10 prismenförmige Bleistift**hälften**.
Ihre Grundfläche ist ein halbes regelmässiges Sechseck mit einer halbkreisförmigen Einbuchtung:



$h_\triangle = 3.4\,mm$
auch: $h_\triangle = \frac{s}{2}\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2 \cdot h_\triangle}{\sqrt{3}} = 3.925...\,mm$

$G_{1/2Blei} = 3 \cdot \frac{s \cdot h_\triangle}{2} - \frac{\pi \cdot (0.9\,mm)^2}{2} = (h_\triangle)^2 \cdot \sqrt{3} - \frac{\pi \cdot (0.9\,mm)^2}{2}$
$= 18.750...\,mm^2$

$G_{AlleBleiH} = 10 \cdot G_{1/2Blei} = 187.501...\,mm^2$
$V_{AlleBleiH} = G_{AlleBleiH} \cdot 175\,mm = 32\,812.78...\,mm^3 \approx 32.813\,cm^3$

$\mathbf{V_{Abfall/Brett}} = V_{Brett} - V_{AlleBleiH} \approx \mathbf{26.479\,cm^3}$ $\quad$ $\mathbf{V_{Abfall/Brett} : V_{Brett} \approx 44.7\%}$
Dazu kommt noch der Abfall vom Anspitzen.
Fast die Hälfte eines Zedernholzbrettchens fällt als Abfall an.

→

Sinnvolle Abfallverwertung
Auch die Holzabfälle erfüllen einen Zweck:
Die Firma CARAN D'ACHE presst sie zu Briketts und heizt damit ihr Werk in Genf.

Fehlerhinweis:

In der 1. Auflage des Buches hat sich leider die durchschnittliche **Dichte des Bleistiftholzes** aus dem Staub gemacht. Hier ist sie: **700 kg/m³**

b Jahresproduktion: 14 Milliarden Bleistifte
Für 10 Bleistifte braucht es 2 Zedernholzbrettchen.
Für 14 Milliarden Bleistifte braucht es 2.8 Milliarden Brettchen.

Gesamtabfall $= 2.8 \cdot 10^9 \cdot 26.479\,\text{cm}^3 = 74.1412 \cdot 10^9\,\text{cm}^3 = \mathbf{74\,141.2\,m^3}$
Dichte $700\,\text{kg/m}^3$

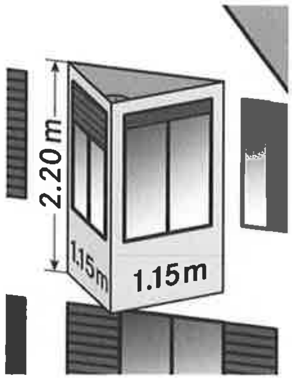
Unter den gemachten Annahmen gäbe es weltweit jährlich ungefähr
$74\,141.2 \cdot 700\,\text{kg} \approx$ **51 900 Tonnen** Holzabfall von der Bleistiftproduktion.

c **Durchschnittliches Volumen eines Zedernstammes**
$V_{Zeder} = \pi \cdot (0.3\,\text{m})^2 \cdot 18\,\text{m} = 5.089...\,\text{m}^3$
$V_{effektiv} = 0.9 \cdot V_{Zeder} \approx 4.58\,\text{m}^3$

Volumen von 2.8 Milliarden Brettchen
$2.8 \cdot 10^9 \cdot 59.292\,\text{cm}^3 \approx 166\,018\,\text{m}^3$

Anzahl Zedern
$166\,018\,\text{m}^3 : 4.58\,\text{m}^3 \approx 36\,248$
Unter den gemachten Annahmen würden weltweit jährlich ungefähr **36 250 Zedern** für die Bleistiftproduktion benötigt.

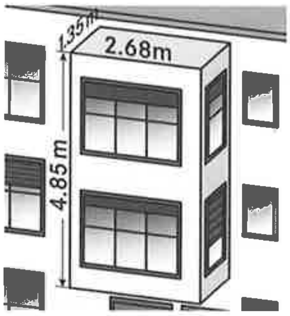
J3100 **1** Der Erker hat ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck als Grundfläche.



Volumenvergrösserung
$G = (1.15\,\text{m})^2 : 2 = 0.66125\,\text{m}^2$
$h = 2.2\,\text{m}$
$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{1.455\,m^3}$

Oberflächenvergrösserung
$S_{Erker} = 2G + 2 \cdot 1.15\,\text{m} \cdot 2.2\,\text{m} = 6.3825\,\text{m}^2$
$S_{Mauer} = 1.15\,\text{m} \cdot \sqrt{2} \cdot 2.2\,\text{m} = 3.577...\,\text{m}^2$
$\mathbf{S_{grösser}} = S_{Erker} - S_{Mauer} \approx \mathbf{2.80\,m^2}$

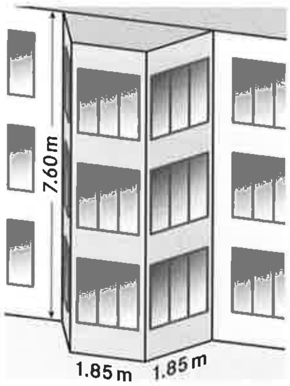
2 Der Erker ist quaderförmig.



Volumenvergrösserung
$\mathbf{V} = 2.68\,\text{m} \cdot 1.35\,\text{m} \cdot 4.85\,\text{m} \approx \mathbf{17.547\,m^3}$

Oberflächenvergrösserung
$S_{Erker} = (2 \cdot 1.35\,\text{m} + 2.68\,\text{m}) \cdot 4.85\,\text{m} + 2 \cdot 2.68\,\text{m} \cdot 1.35\,\text{m}$
$= 33.329\,\text{m}^2$
$S_{Mauer} = 2.68\,\text{m} \cdot 4.85\,\text{m} = 12.998\,\text{m}^2$
$\mathbf{S_{grösser}} = S_{Erker} - S_{Mauer} \approx \mathbf{20.33\,m^2}$

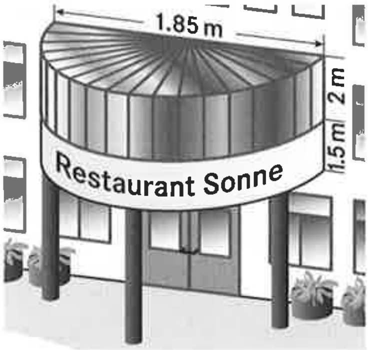
3 Die Erker-Grundfläche ist ein halbes regelmässiges Sechseck.



Volumenvergrösserung
$G = 3 \cdot (1.85\,\text{m} \cdot 0.925\,\text{m} \cdot \sqrt{3} : 2) = 4.445...\,\text{m}^2$
$h = 7.6\,\text{m}$
$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{33.789\,m^3}$

Oberflächenvergrösserung
$S_{Erker} = G + 3 \cdot 1.85\,\text{m} \cdot 7.6\,\text{m} \approx 46.626\,\text{m}^2$
$S_{Mauer} = 3.7\,\text{m} \cdot 7.6\,\text{m} = 28.12\,\text{m}^2$
$\mathbf{S_{grösser}} = S_{Erker} - S_{Mauer} \approx \mathbf{18.51\,m^2}$

4 Der Erker hat die Form eines Halbzylinders.



Volumenvergrösserung

$G = \pi \cdot (0.925\,m)^2 : 2 = 1.344...\,m^2$

$h = 3.5\,m$

$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{4.704\,m^3}$

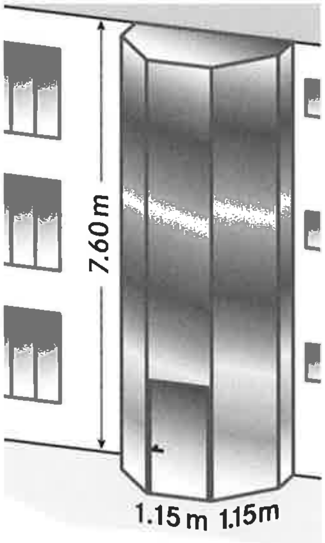
Oberflächenvergrösserung

$S_{Erker} = 2G + \pi \cdot (0.925\,m) \cdot 3.5\,m \approx 12.859\,m^2$

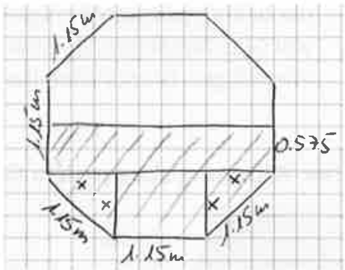
$S_{Mauer} = 1.85\,m \cdot 3.5\,m = 6.475\,m^2$

$\mathbf{S_{grösser}} = S_{Erker} - S_{Mauer} \approx \mathbf{6.38\,m^2}$

5 Die Erker-Grundfläche ist ein halbes regelmässiges Achteck der Seitenlänge 1.15 m.



Volumenvergrösserung



$x = 1.15\,m : \sqrt{2}$
$= 0.813...\,m$

$G = x^2 + 1.15\,m \cdot x + 0.575\,m \cdot (1.15\,m + 2x) = 3.192...\,m^2$

$h = 7.6\,m$

$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{24.265\,m^3}$

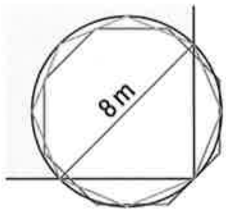
Oberflächenvergrösserung

$S_{Erker} = G + 4 \cdot 1.15\,m \cdot 7.6\,m \approx 38.153\,m^2$

$S_{Mauer} = (1.15\,m + 2x) \cdot 7.6\,m = 21.100\,m^2$

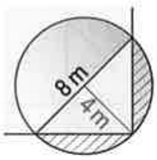
$\mathbf{S_{grösser}} = S_{Erker} - S_{Mauer} \approx \mathbf{17.05\,m^2}$

J3101 **a** Das zusätzliche Volumen wird durch zwei Grössen bestimmt:
- die Grundfläche ausserhalb des ehemaligen Gebäudegrundrisses
- die Grundfläche der Dacherhöhung.



Zeichnet man die Grundrisse der Anbauten in ein und derselben Zeichnung, wird sofort klar, dass der zylinderförmige Anbau sicher das grössere zusätzliche Volumen liefert als der mittlere prismatische Anbau. Der Vergleich mit dem rechten prismatischen Anbau muss genauer untersucht werden:

Daten aller 3 Vorschläge, da diese für **d** benötigt werden

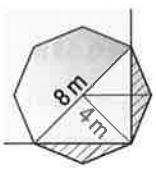


$G_{aussen1}$ = Halbkreis minus rechtw. Dreieck
$= 0.5 \cdot \pi \cdot (4\,m)^2 - 16\,m^2 = 9.1327...\,m^2$

$V_{aussen1} = G_{aussen1} \cdot 20\,m = 182.654...\,m^3$

$V_{Dach1} = \pi \cdot (4\,m)^2 \cdot 0.8\,m = 40.212...\,m^3$

$\mathbf{V_{zusätzlich1}} = V_{aussen1} + V_{Dach1} \approx \mathbf{222.867\,m^3}$



$G_{aussen2}$ = Halbes Achteck minus rechtw. Dreieck
= 2 Drachenvierecke(Diagonalen $4\,m$, $4\,m \cdot \sqrt{2}$) − rechtw. Dreieck
$= 4\,m \cdot 4\,m \cdot \sqrt{2} - 16\,m^2 = 6.627...\,m^2$

$V_{aussen2} = G_{aussen2} \cdot 20\,m = 132.548...\,m^3$

$V_{Dach2} = 2 \cdot 4\,m \cdot 4\,m \cdot \sqrt{2} \cdot 0.8\,m = 36.203...\,m^3$

$\mathbf{V_{zusätzlich2}} = V_{aussen2} + V_{Dach2} \approx \mathbf{168.752\,m^3}$

→

$G_{aussen3}$ = 2·Trapez mit Mittellinie (s+x) und Höhe x

$y = \frac{4\,m}{\sqrt{2}} = 2.828...\,m$ $\qquad z = 4\,m - y = 1.171...\,m$

$s = \sqrt{y^2+z^2} = 3.061...\,m$ $\qquad x = \frac{s}{2} : \sqrt{2} = 1.08$

$G_{aussen3} = 2\cdot(s+x)\cdot x = 8.970...\,m$

$V_{aussen3} = G_{aussen3} \cdot 20\,m = 179.411...\,m^3$

$V_{Dach3} = V_{Dach2} = 2 \cdot 4\,m \cdot 4\,m \cdot \sqrt{2} \cdot 0.8\,m = 36.203...\,m^3$

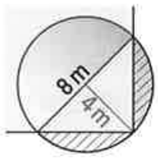
$\mathbf{V_{zusätzlich3}} = V_{aussen3} + V_{Dach3} \approx \mathbf{215.615\,m^3}$

Der zylinderförmige Anbau bringt das grösste zusätzliche Volumen.

■ Ein Vergleich der Abbildungen in ■ zeigt sofort, dass

- die beiden prismenförmigen Anbauten weniger Glasfläche benötigen als der zylinderförmige, da dessen Grundfläche Umkreis des Achtecks ist.
- die beiden prismenförmigen Anbauten innerhalb und ausserhalb des Gebäudes gleich viel Glas benötigen, da jeweils 4 Seitenflächen (bzw. 3 plus zwei halbe) ausserhalb des ehemaligen Grundrisses liegen.

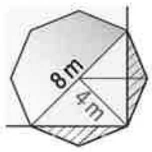
■ **Der Witterung ausgesetzte Glasfläche** (teuer im Unterhalt!):



$S_{Mantel1} = \pi\cdot 4\,m \cdot 20\,m = 251.327...\,m^2$

$S_{Dach1} = 2\pi\cdot 4\,m \cdot 0.8\,m + \pi\cdot(4\,m)^2 = 70.371...\,m^2$

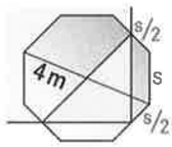
$\mathbf{S_{aussen1}} = S_{Mantel1} + S_{Dach1} \approx \mathbf{321.70\,m^2}$



$S_{Mantel2} = 4\cdot s\cdot 20\,m = 244.917...\,m^2$ $\qquad = S_{Mantel3}$

$S_{Dach2} = 8\cdot s\cdot 0.8\,m + 2\cdot 4\,m\cdot 4\,m\cdot\sqrt{2} = 64.848...\,m^2$ $\qquad = S_{Dach3}$

$\mathbf{S_{aussen2}} = S_{Mantel2} + S_{Dach2} \approx \mathbf{309.77\,m^2}$ $\qquad = \mathbf{S_{aussen3}}$



Verhältnis Aussenglasfläche : zusätzlichem Volumen (ohne Einheiten)

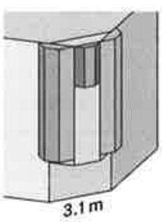
$\mathbf{S_{aussen1}} : \mathbf{V_{zusätzlich1}} \approx 321.70 : 222.867 \approx \mathbf{1.4434...}$

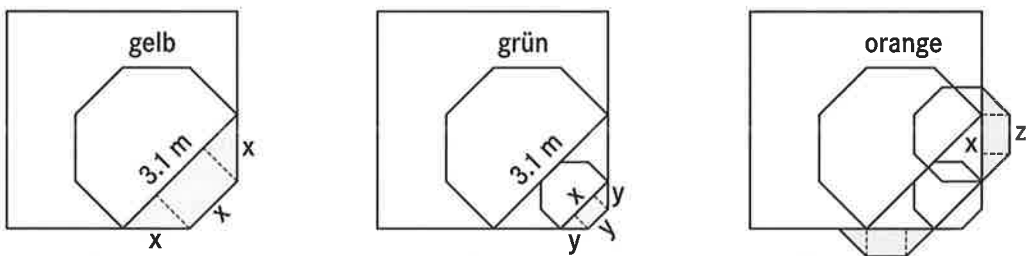
$\mathbf{S_{aussen2}} : \mathbf{V_{zusätzlich2}} \approx 309.77 : 168.752 \approx \mathbf{1.8356...}$

$\mathbf{S_{aussen3}} : \mathbf{V_{zusätzlich3}} \approx 309.77 : 215.615 \approx \mathbf{1.4366...}$

Der **dritte, prismatische Anbau** bietet das beste Verhältnis: Am wenigsten teuer zu unterhaltende Aussenfläche in Bezug auf das gewonnene Volumen!

J3102 Diese verschachtelten Erker dürften vor allem als Spielerei eines «achteckverliebten» Architekten oder Bauherrn entstanden sein. Sie bieten aber auch Lichtgewinn, vor allem in der obersten Etage unter dem Dach.

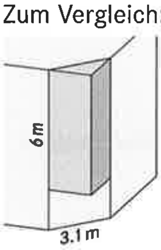




gelb	grün	orange
$x + 2\cdot\frac{x}{\sqrt{2}} = 3.1\,m$	$y + 2\cdot\frac{y}{\sqrt{2}} = x$	$z + \frac{z}{\sqrt{2}} = x$
$x\cdot(1+\sqrt{2}) = 3.1\,m$	$y\cdot(1+\sqrt{2}) = x$	$z\cdot(1+\frac{1}{\sqrt{2}}) = x$
$\mathbf{x} = 3.1\,m : (1+\sqrt{2}) \approx \mathbf{1.28\,m}$	$\mathbf{y} = x : (1+\sqrt{2}) \approx \mathbf{0.53\,m}$	$\mathbf{z} = x : (1+\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx \mathbf{0.75\,m}$
$G_x = (x+\frac{x}{\sqrt{2}})\cdot\frac{x}{\sqrt{2}} \approx 1.990...\,m^2$	$G_y = (y+\frac{y}{\sqrt{2}})\cdot\frac{y}{\sqrt{2}} \approx 0.341...\,m^2$	$G_z = (z+\frac{z}{\sqrt{2}})\cdot\frac{z}{\sqrt{2}} \approx 0.682...\,m^2$
$\mathbf{V_x} = G_x\cdot 6\,m \approx \mathbf{11.942\,m^3}$	$\mathbf{V_y} = G_y\cdot 2\,m \approx \mathbf{0.683\,m^3}$	$\mathbf{V_z} = G_z\cdot 5.7\,m \approx \mathbf{3.893\,m}$

$\mathbf{V_{total}} \approx \mathbf{20.410\,m^3}$ $\qquad \mathbf{S_{total}} = G_x + G_y + 2G_z + 2x\cdot 0.3\,m + x\cdot 4\,m + 3y\cdot 2\,m + 6z\cdot 5.7\,m \approx \mathbf{38.52\,m^2}$

Zum Vergleich:

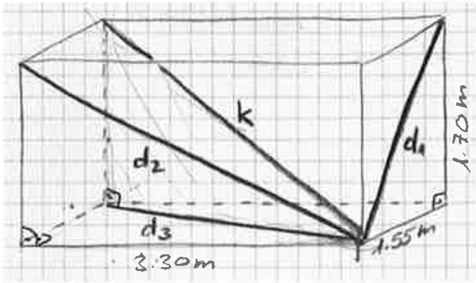


$\mathbf{V_{total}} \approx \mathbf{14.415\,m^3}$

$\mathbf{S_{total}} \approx \mathbf{28.71\,m^2}$

J3103 **a** Da der Laderaum nur 3.3 m lang ist, müsste die 4 m lange Stange irgendwie schräg verstaut werden. In Frage kommen:

- schräg auf dem Boden, maximale Länge bei diagonaler Lage d_3
- schräg an der Seite, maximale Länge bei diagonaler Lage d_2
- quer durch den Raum, maximale Länge bei diagonaler Lage k



d_1 muss nicht geprüft werden, da offensichtlich zu kurz.

$d_3 = \sqrt{3.30^2 + 1.55^2}\,\text{m} \approx 3.65\,\text{m}$

$d_2 = \sqrt{3.30^2 + 1.70^2}\,\text{m} \approx 3.71\,\text{m}$

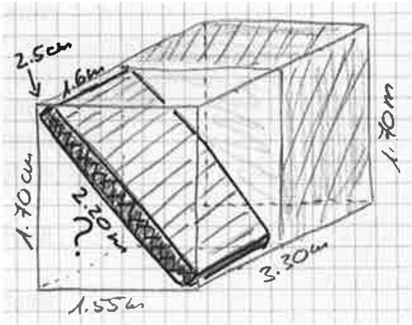
$k = \sqrt{{d_3}^2 + 1.70^2}\,\text{m} = \sqrt{3.30^2 + 1.55^2 + 1.70^2}\,\text{m} \approx 4.02\,\text{m}$

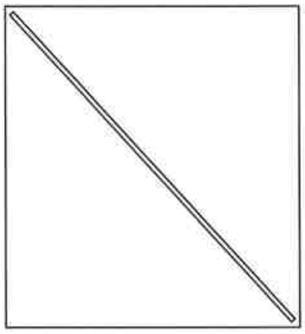
Ja, die Stange lässt sich ganz knapp unterbringen – diagonal durch den Raum (der Durchmesser beansprucht auch noch etwas Platz). Eine solche Lage macht aber höchstens in einer letzten Sammelfuhre Sinn. Bei den eigentlichen Zügelfahrten würde sie viel zu viel Platz versperren. Denkbar wäre allenfalls die Lage d_2, wobei die Stange hinten 30 cm herausragen würde. Da müsste aber abgeklärt werden, ob dies erlaubt ist.

b Da die Hälfte des Laderaumes bereits gefüllt ist, kommt einzig die skizzierte Lage in Frage.
Die Diagonale entspricht d_1 oben:

$d_1 = \sqrt{1.70^2 + 1.55^2}\,\text{m} \approx 2.30\,\text{m}$

Es sollte möglich sein, den Lattenrost zu verstauen.





Da er eine Dicke von 2.5 cm hat, braucht er in der Diagonale zwar etwas mehr als 2.2 m Platz, 2.3 m sollten aber reichen. Die beiden haben also Glück gehabt.

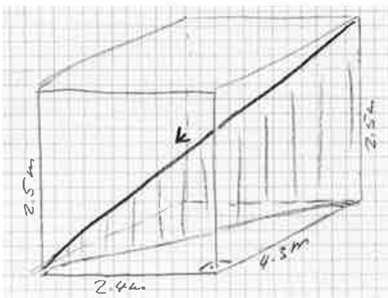
Die massstäbliche Zeichnung links bestätigt den Befund.

J3104 Zwei Arbeitsblätter

J3105 Walter handelt pragmatisch: Er stellt die Leiter beim Eingang ab, geht per Lift zum Parkdeck, fährt mit dem Auto vor den Eingang und lädt die Leiter dort ein.

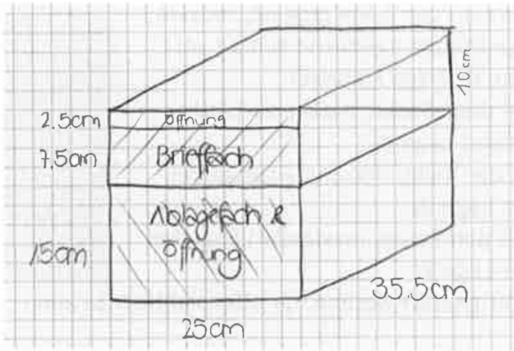
Auf dem Heimweg rechnet er dann trotzdem noch aus, ob er die Leiter mit dem Lift aufs Parkdeck hätte bringen können.

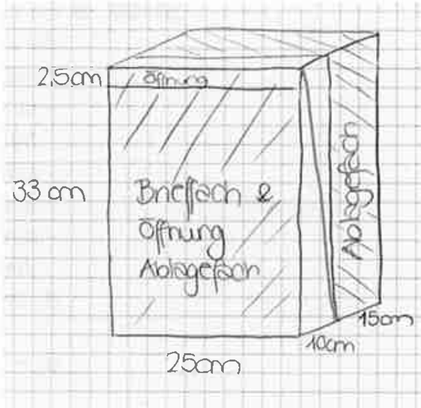
$k = \sqrt{2.40^2 + 4.30^2 + 2.50^2}\,\text{m} \approx 5.52\,\text{m}$

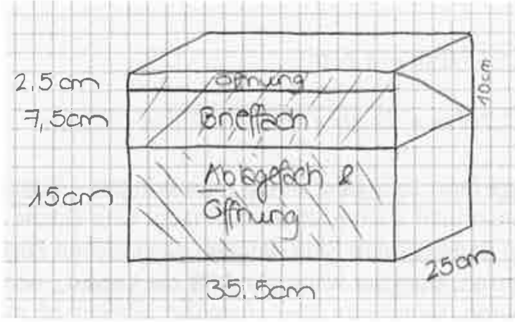


Und vielleicht hat er auch noch ausgerechnet, wie gross sein Auto hätte sein müssen, damit er die Leiter nicht zu Fuss heim tragen muss...

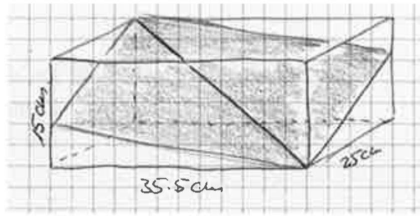
J3106 **a**







b Da das Kartoncouvert länger und breiter ist als das grösste Fach – das Ablagefach –, wäre eine Verstauung nur möglich, wenn es schräg, wie auf der Skizze, Platz findet.
Grundvoraussetzung dafür ist, dass die Briefdiagonale kleiner ist, als die Körperdiagonale des Ablagefachs. Nur wenn dies so ist, lohnt es sich, die andern Grössen zu untersuchen:



Eine zusätzliche Untersuchung wie gross das Kartoncouvert tatsächlich sein kann, wenn es schräg im Kasten liegt, würde sehr schwierig, da die beiden «freien» Ecken wegen der rechten Winkel nicht auf den Quaderkanten liegen.

Briefdiagonale: $\sqrt{29^2+37^2}\,\text{cm} \approx 47.01\,\text{cm}$

Raumdiagonale Ablagefach: $\sqrt{35.5^2 + 25^2 + 15^2}\,\text{cm} = 45.94\,\text{cm}$

Nein, der Postbote kann das Kartoncouvert nicht im Briefkasten verstauen.

c Damit das Couvert **vollständig** im Brieffach Platz findet, muss es durch den Schlitz gehen. Es ergeben sich daraus die folgenden Eckdaten:

Kasten liegend (siehe Skizze unter **a**):
Bei einer Breite von **25 cm** kann das Couvert maximal $\sqrt{10^2+35.5^2}\,\text{cm} \approx$ **36.9 cm** lang sein.
Bei einer Breite von $\sqrt{25^2+2.5^2}\,\text{cm} \approx$ **25.1 cm** kann das Couvert maximal **35.5 cm** lang sein.

Kasten quer liegend (siehe Skizze unter **a**):
Bei einer Breite von **35.5 cm** kann das Couvert maximal $\sqrt{10^2+25^2}\,\text{cm} \approx$ **26.9 cm** lang sein.
Bei einer Breite von $\sqrt{35.5^2+2.5^2}\,\text{cm} \approx$ **35.6 cm** kann das Couvert maximal **25 cm** lang sein.

Kasten stehend (siehe Skizze unter **a**):
Bei einer Breite von **25 cm** kann das Couvert maximal $\sqrt{10^2+35.5^2}\,\text{cm} \approx$ **36.9 cm** lang sein.
(Bei einer Breite von $\sqrt{25^2+2.5^2}\,\text{cm} \approx$ **25.1 cm** kann das Couvert maximal **10 cm** lang sein.
→ anders einwerfen, dann kann es länger sein.)

Da das Couvert nicht biegbar ist, kann es bei schiefer Maximalbreite jeweils nicht abgedreht werden.

d **Kasten liegend** (siehe Skizze unter **a**):
Bei einer Breite von **25 cm** kann das Couvert maximal $\sqrt{15^2+35.5^2}\,\text{cm} \approx$ **38.5 cm** lang sein.
Bei einer Breite von $\sqrt{25^2+15^2}\,\text{cm} \approx$ **29.2 cm** kann das Couvert maximal **35.5 cm** lang sein.

Kasten quer liegend (siehe Skizze unter a):
Bei einer Breite von **35.5 cm** kann das Couvert maximal $\sqrt{15^2+25^2}$ cm $\approx$ **29.2 cm** lang sein.
Bei einer Breite von $\sqrt{35.5^2+15^2}$ cm $\approx$ **38.5 cm** kann das Couvert maximal **25 cm** lang sein.

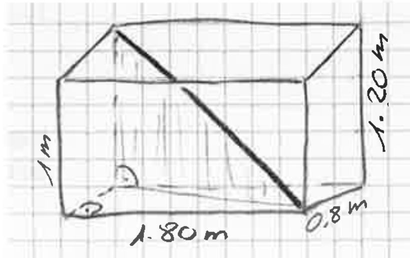
Kasten stehend (siehe Skizze unter a):
Bei einer Breite von **25 cm** kann das Couvert maximal $\sqrt{15^2+35.5^2}$ cm $\approx$ **38.5 cm** lang sein.
Bei einer Breite von $\sqrt{35.5^2+25^2}$ cm $\approx$ **43.4 cm** kann das Couvert maximal **15 cm** lang sein.

J3107 Arbeitsblatt (Kopiervorlage)
Das Lösungsblatt ist bei den Lösungen der Arbeitsblätter.

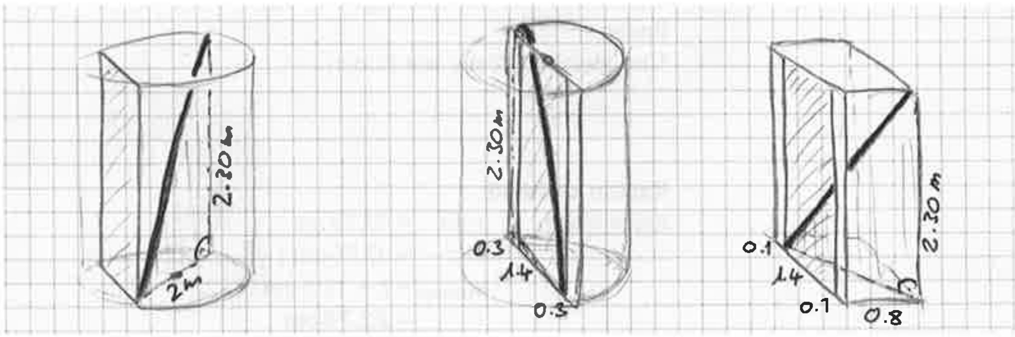
J3108 Die Körperdiagonalen von hinten oben nach vorne unten sind länger als die beiden andern. Es ist also nur deren Länge zu prüfen:

$\sqrt{1.8^2+0.8^2+1.2^2}$ m $\approx$ 2.31 m

Nein, die Eisenstange kann nicht verstaut werden.



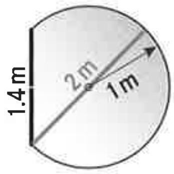
J3109 Alle drei Lifte haben eine Diagonale, die lang genug ist.
$\sqrt{2^2+2.3^2}$ m $\approx$ 3.05 m für die beiden «runden», $\sqrt{1.6^2+0.8^2+2.3^2}$ m $\approx$ 2.91 m für den eckigen.
Die Frage muss sich also darauf konzentrieren, ob es möglich ist, mit dem Schirm **in den Lift zu gelangen**:



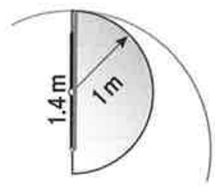
Lift links
Der Schirm kann direkt entlang einer der beiden längsten Diagonalen hineingebracht werden:

$$\sqrt{2^2+2.3^2}\text{ m} \approx 3.05\text{ m}$$

Der Schirm **kann** mit diesem Lift **problemlos transportiert werden.**



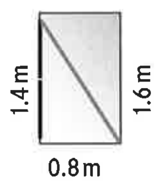
Lift Mitte
Das eine Ende des Schirms muss sofort in eine der beiden oberen Ecken direkt hinter der Türe gebracht werden. So erhält man die längstmögliche «Einstiegs-Strecke» für den Rest (vergleiche Abb. rechts):
Etwas weniger als $\sqrt{1.7^2+2.3^2}$ m $\approx$ 2.86 m, da die graue Strecke im Grundriss nicht ganz 1.7 m ist.



Je nach Gestänge und Stoff reicht der Platz ganz knapp.

Lift rechts
Das eine Ende des Schirms muss sofort in eine der beiden oberen Ecken gegenüberliegend zur Türe gebracht werden. So erhält man die längstmögliche «Einstiegs-Strecke» für den Rest:

$$\sqrt{1.5^2+0.8^2+2.3^2}\text{ m} \approx 2.86\text{ m}$$

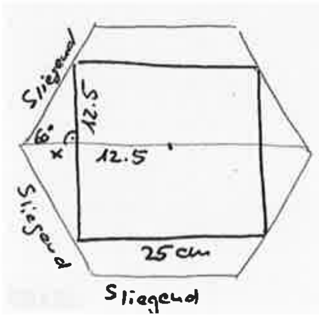


Der **Platz dürfte** – abhängig von Gestänge und Stoff – **knapp ausreichen.**

Warnung!

Die Autoren übernehmen **keine Verantwortung** für die Beschädigung von Liften oder von Sonnenschirmen, die in den Lift gequetscht aber nicht mehr heraus gebracht werden können.

J3110 ■ **Kasten liegend:**



Seitenlänge: $x \cdot \sqrt{3} = 12.5\,\text{cm}$

$x = 12.5\,\text{cm} : \sqrt{3} = 7.216\ldots\,\text{cm}$

$s_{liegend} = x + 12.5\,\text{cm} = 19.716\ldots\,\text{cm}$

$\approx \mathbf{19.72\,cm}$

Kastentiefe: **35.5 cm**

Volumen: $V_{liegend} = 6 \cdot \frac{s_{liegend}^2}{4} \sqrt{3} \cdot 35.5\,\text{cm} \approx \mathbf{35\,856\,cm^3}$

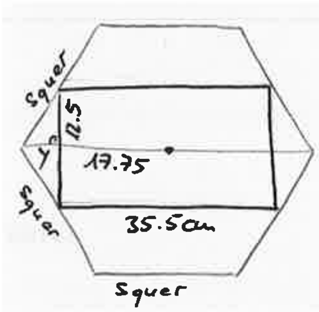
Blechverbrauch ohne Nähte:

Mantel mit den Abmessungen $6 \cdot s_{liegend} = 118.3\,\text{cm} \times 35.5\,\text{cm}$ ungefähr $4200\,\text{cm}^2$

Boden ungefähr $1\,010\,\text{cm}^2$

Türe gleiche Grösse wie Boden

Kasten quer liegend:



Seitenlänge: $y \cdot \sqrt{3} = 12.5\,\text{cm}$

$y = 12.5\,\text{cm} : \sqrt{3} = 7.216\ldots\,\text{cm}$

$s_{quer} = y + 17.75\,\text{cm} = 24.966\ldots\,\text{cm}$

$\approx \mathbf{24.97\,cm}$

Kastentiefe: **25 cm**

Volumen: $V_{quer} = 6 \cdot \frac{s_{quer}^2}{4} \sqrt{3} \cdot 25\,\text{cm} \approx \mathbf{40\,487\,cm^3}$

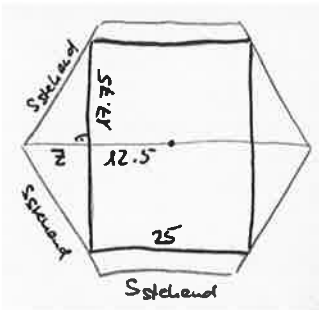
Blechverbrauch ohne Nähte:

Mantel mit den Abmessungen $6 \cdot s_{quer} = 149.8\,\text{cm} \times 25\,\text{cm}$ ungefähr $3\,745\,\text{cm}^2$

Boden ungefähr $1\,619\,\text{cm}^2$

Türe gleiche Grösse wie Boden

Kasten stehend:



Seitenlänge: $z \cdot \sqrt{3} = 17.75\,\text{cm}$

$z = 17.75\,\text{cm} : \sqrt{3} = 10.247\ldots\,\text{cm}$

$s_{stehend} = z + 12.5\,\text{cm} = 22.747\ldots\,\text{cm}$

$\approx \mathbf{22.75\,cm}$

Kastentiefe: **25 cm**

Volumen: $V_{stehend} = 6 \cdot \frac{s_{stehend}^2}{4} \sqrt{3} \cdot 25\,\text{cm} \approx \mathbf{33\,611\,cm^3}$

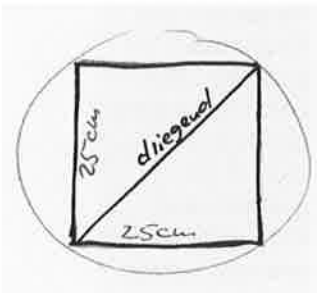
Blechverbrauch ohne Nähte:

Mantel mit den Abmessungen $6 \cdot s_{stehend} = 136.49\,\text{cm} \times 25\,\text{cm}$ ungefähr $3\,412\,\text{cm}^2$

Boden ungefähr $1\,344\,\text{cm}^2$

Türe gleiche Grösse wie Boden.

■ **Kasten liegend:**



Durchmesser: $d_{liegend} = 25\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} = 35.355\ldots\,\text{cm}$

$\approx \mathbf{35.36\,cm}$

Kastentiefe: **35.5 cm**

Volumen: $V_{liegrund} = \pi \cdot \left(\frac{d_{liegend}}{2}\right)^2 \cdot 35.5\,\text{cm}$

$\approx \mathbf{34\,852\,cm^3}$

Blechverbrauch ohne Nähte:

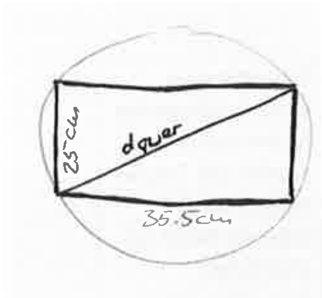
Mantel mit den Abmessungen $\pi \cdot d_{liegend} = 111.1\,cm$	x	$35.5\,cm$	ungefähr $3\,944\,cm^2$
Boden			ungefähr $982\,cm^2$

Türe gleiche Grösse wie Boden.

Kasten quer liegend:

Durchmesser: $\mathbf{d_{quer}} = \sqrt{35.5^2+25^2}\,cm = 43.419...\,cm$

$\approx \mathbf{43.42\,cm}$



Kastentiefe: **25 cm**

Volumen: $\mathbf{V_{liegrund}} = \pi \cdot (\frac{d_{quer}}{2})^2 \cdot 25\,cm$

$\approx \mathbf{37\,017\,cm^3}$

Blechverbrauch ohne Nähte:

Mantel mit den Abmessungen $\pi \cdot d_{quer} = 136.4\,cm$	x	$25\,cm$	ungefähr $3\,410\,cm^2$
Boden			ungefähr $1\,481\,cm^2$

Türe gleiche Grösse wie Boden.

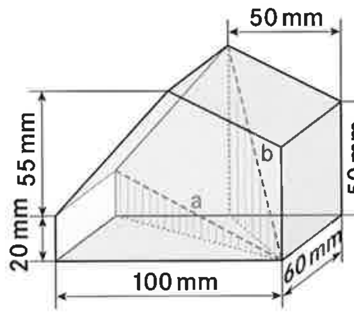
Kasten stehend: Alle Daten gleich wie beim quer liegenden.

J3111 Arbeitsblatt

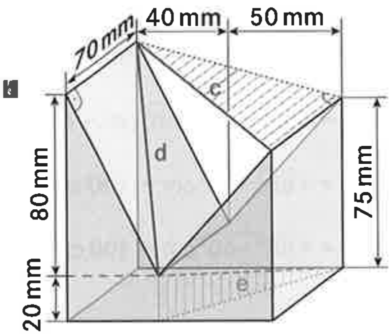
J3112 a $a = \sqrt{100^2+60^2+20^2}\,mm = 118.321...\,mm$

$b = \sqrt{60^2+50^2+75^2}\,mm = 108.282...\,mm$

$\mathbf{a+b \approx 226.60\,mm}$



b



$c = \sqrt{70^2+90^2+25^2}\,mm = 116.726...\,mm$

$d = \sqrt{70^2+80^2+40^2}\,mm = 113.578...\,mm$

$e = \sqrt{50^2+70^2+20^2}\,mm = 88.317...\,mm$

$\mathbf{c+d+e \approx 318.62\,mm}$

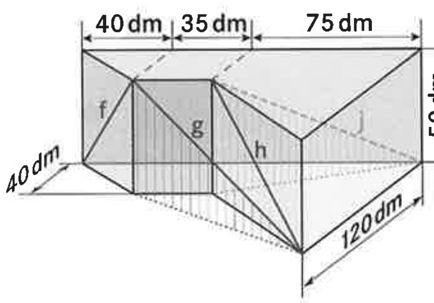
c $f = \sqrt{40^2+40^2+50^2}\,mm = 75.498...\,mm$

$g = \sqrt{110^2+80^2+50^2}\,mm = 144.913...\,mm$

$h = \sqrt{75^2+80^2+50^2}\,mm = 120.519...\,mm$

$j = \sqrt{75^2+40^2+50^2}\,mm = 98.615...\,mm$

$\mathbf{f+g+h+j \approx 439.55\,m}$



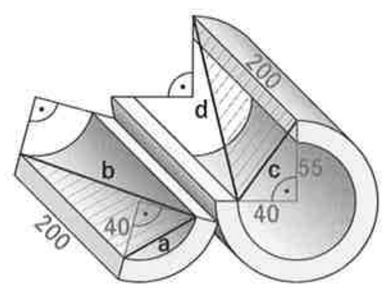
J3113 Arbeitsblatt

J3114 a $= 40\,\text{cm} \cdot \sqrt{2} = 56.568...\,\text{cm} \approx$ **56.57 cm**

b $= \sqrt{(200\,\text{cm})^2 + a^2} \approx$ **207.85 cm**

c $= \sqrt{40^2 + 55^2}\,\text{cm} = 68.007...\,\text{cm} \approx$ **68.01 cm**

d $= \sqrt{(200\,\text{cm})^2 + c^2} \approx$ **211.25 cm**



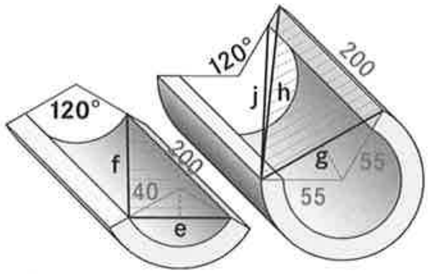
Fehlerhinweis
In der 1. Auflage des Buches und des Arbeits- und Theorieheftes J hat sich leider ein Fehler eingeschlichen!
Beim geborstenen **Rohr rechts** sind natürlich **beide Winkel 120°-Winkel.**

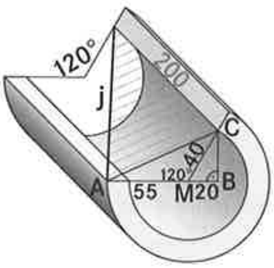
e $= 2 \cdot 20\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} = 69.282...\,\text{cm} \approx$ **69.28 cm**

f $= \sqrt{(200\,\text{cm})^2 + e^2} \approx$ **211.66 cm**

g $= 2 \cdot 27.5\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} = 95.262...\,\text{cm} \approx$ **95.26 cm**

h $= \sqrt{(200\,\text{cm})^2 + g^2} \approx$ **221.53 cm**



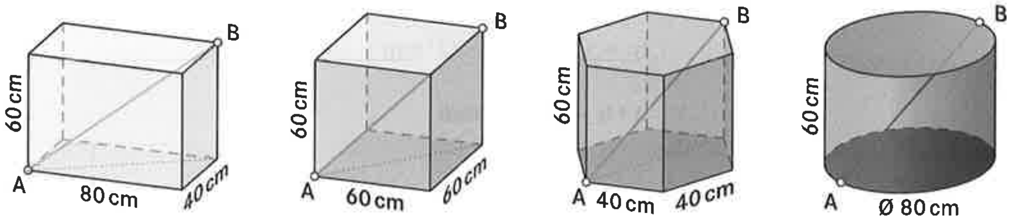


j $= \sqrt{(200\,\text{cm})^2 + AC^2}$
AC kann mit Hilfe der Dreiecke ABC und MBC berechnet werden:
$\triangle$MBC ist ein halbes gleichseitiges $\triangle$ mit Seite MC = 40 cm.
Daraus folgt: $\quad BC = 20\,\text{cm} \cdot \sqrt{3}$

$\triangle$ABC ist rechtwinklig mit $\quad AB = 75\,\text{cm}$
Daraus folgt: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{75^2 + 1200}\,\text{cm} = 82.613...\,\text{cm}$

und damit $\quad j = \sqrt{(200\,\text{cm})^2 + AC^2} \approx$ **216.39 cm**

J3115 **a Kürzeste Verbindungen im Innern**



Quader: $AB = \sqrt{80^2 + 40^2 + 60^2}\,\text{cm} \approx$ **107.70 cm**

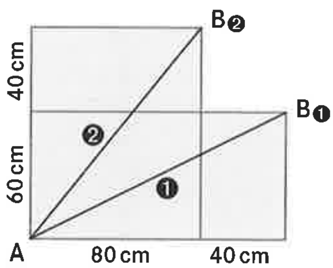
Würfel: $AB = \sqrt{60^2 + 60^2 + 60^2}\,\text{cm} = 60\,\text{cm} \cdot \sqrt{3} \approx$ **103.92 cm**

Sechsseitiges Prisma: $AB = \sqrt{80^2 + 60^2}\,\text{cm} =$ **100 cm**

Zylinder: $AB = \sqrt{80^2 + 60^2}\,\text{cm} =$ **100 cm**

b Kürzeste Verbindungen auf der Oberfläche
Die Abbildungen zeigen jeweils die relevanten Netzteile mit den fraglichen Wegen.

Quader:
Es kommen 2 Wege in Frage, die geprüft werden müssen.

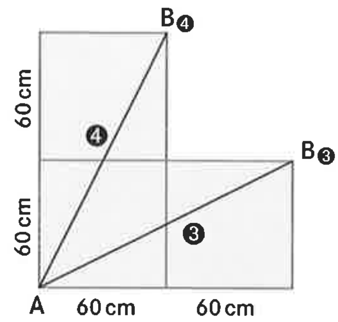


❶ Vorderfläche und rechte Seitenfläche
(bzw. linke Seitenfläche und Hinterfläche)
$AB_❶ = \sqrt{120^2 + 60^2}\,\text{cm} \approx$ **134.16 cm**

❷ Vorderfläche und Deckfläche
(bzw. Boden und Hinterfläche)
$AB_❷ = \sqrt{80^2 + 100^2}\,\text{cm} \approx$ **128.06 cm**

Weg ❷ ist der kürzere.

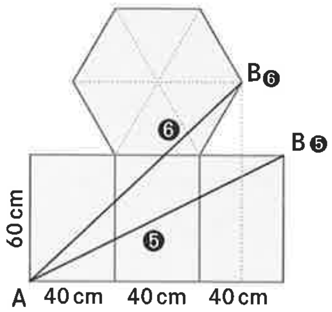
Würfel:
Es kommen – analog zum Quader – zwei Wege in Frage.

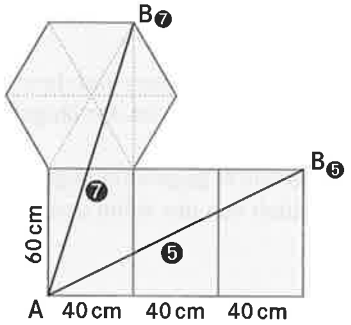


❸ Vorderfläche und rechte Seitenfläche
(bzw. linke Seitenfläche und Hinterfläche)
❹ Vorderfläche und Deckfläche
(bzw. Boden und Hinterfläche)

Aus Symmetriegründen sind **beide gleich lang**:
AB❸ = AB❹ = $\sqrt{120^2+60^2}$ cm ≈ **134.16 cm**

Sechsseitiges Prisma:
Es sind drei grundsätzlich unterschiedliche Wege zu prüfen. (Gleich lange Wege gibt es auch «linksherum» und über den Boden.)





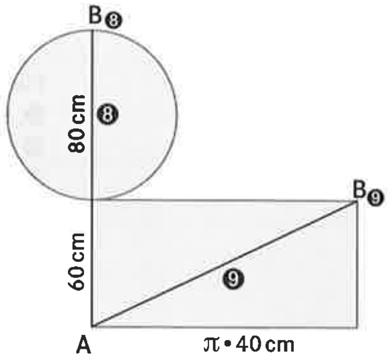
❺ AB❺ = $\sqrt{120^2+60^2}$ cm ≈ **134.16 cm**

❻ AB❻ = $\sqrt{100^2+(60+20\sqrt{3})^2}$ cm ≈ **137.68 cm**

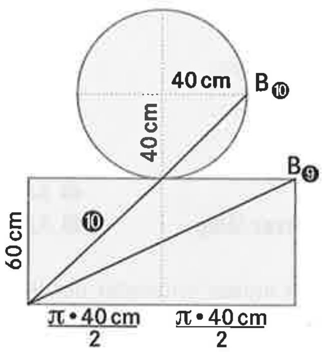
❼ AB❼ = $\sqrt{40^2+(60+2\cdot 20\sqrt{3})^2}$ cm ≈ **135.33 cm**

Der Weg **über die Seitenflächen** ist der kürzeste (Weg ❺).

Zylinder:
Wir untersuchen einige verschiedene Wege:



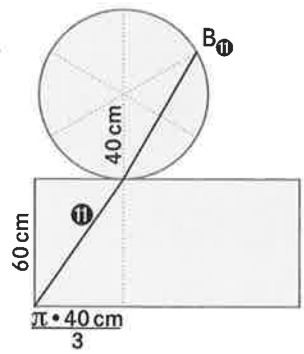
❽ Senkrecht nach oben und dann entlang der Diagonalen über den Deckel.
AB❽ = 60 cm + 80 cm = **140 cm**



❾ Über den halben Mantel.
AB❾ = $\sqrt{(40\pi)^2+60^2}$ cm ≈ **139.25 cm**

❿ Über einen Viertel des Mantels (90°) und dann über den Deckel.
AB❿ = $\sqrt{(20\pi)^2+60^2}$ cm + 40 cm · $\sqrt{2}$
≈ **143.45 cm**

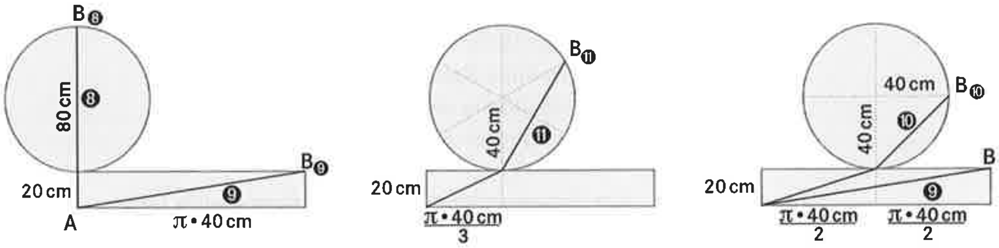
⓫ Über einen Sechstel des Mantels (60°), dann über den Deckel.
AB⓫ = $\sqrt{(40\pi:3)^2+60^2}$ cm + 40 cm · $\sqrt{3}$ ≈ **142.46 cm**



⓬ Analog: Über einen Drittel des Mantels (120°), dann über den Deckel (ohne Abbildung).
AB⓬ = $\sqrt{(80\pi:3)^2+60^2}$ cm + 40 cm ≈ **143.04 cm**

Offensichtlich ist der Weg auf dem Mantel (Weg ❾) der kürzeste. Die Resultate lassen zudem vermuten, dass Weg ❿ der längste Weg ist.

J3116 **a** Die Verbindungen zwischen A und B auf der Oberfläche lassen sich analog berechnen wie diejenigen des Zylinders in **J3115**:



❽ AB❽ = 20 cm + 80 cm = **100 cm** **kürzester Weg**

⓫ AB⓫ = $\sqrt{(40\pi:3)^2+20^2}$ cm + 40 cm · $\sqrt{3}$ ≈ **115.70 cm**

❿ AB❿ = $\sqrt{(20\pi)^2+20^2}$ cm + 40 cm · $\sqrt{2}$ ≈ **122.51 cm**

⓬ AB⓬ = $\sqrt{(80\pi:3)^2+20^2}$ cm + 40 cm ≈ **126.13 cm** (ohne Abb)

❾ AB❾ = $\sqrt{(40\pi)^2+20^2}$ cm ≈ **127.25 cm** **längster Weg**

Diesmal ist der Weg ❽ – senkrecht nach oben und dann diametral über den Deckel – der kürzeste Weg. Der Weg ❾ über den Mantel ist der längste.

b Welcher Weg zwischen zwei diametral gegenüberliegenden Punkten bei einem Zylinder am kürzesten ist, hängt offensichtlich von der Höhe des Zylinders, bzw. vom Verhältnis von Höhe und Durchmesser ab.

Für **30 cm** Höhe, 80 cm Durchmesser:
❽ AB❽ = **110 cm** **kürzester Weg**
⓫ AB⓫ ≈ 120.80 cm
❿ AB❿ ≈ 126.19 cm
⓬ AB⓬ ≈ 128.99 cm
❾ AB❾ ≈ **129.20 cm** **längster Weg**

Für **40 cm** Höhe, 80 cm Durchmesser:
❽ AB❽ = **120 cm** **kürzester Weg**
⓫ AB⓫ ≈ 127.20 cm
❿ AB❿ ≈ 131.05 cm
⓬ AB⓬ ≈ **132.86 cm** **längster Weg**
❾ AB❾ ≈ 131.87 cm

Für **50 cm** Höhe, 80 cm Durchmesser
❽ AB❽ = **130 cm** **kürzester Weg**
⓫ AB⓫ ≈ 134.51 cm
❿ AB❿ ≈ 136.87 cm
⓬ AB⓬ ≈ **137.56 cm** **längster Weg**
❾ AB❾ ≈ 135.25 cm

Für **55 cm** Höhe, 80 cm Durchmesser:
❽ AB❽ = **135 cm** **kürzester Weg**
⓫ AB⓫ ≈ 138.42 cm
❿ AB❿ ≈ 140.07 cm
⓬ AB⓬ ≈ **140.22 cm** **längster Weg**
❾ AB❾ ≈ 137.17 cm

Für **59 cm** Höhe, 80 cm Durchmesser:
❽ AB❽ = 139 cm
⓫ AB⓫ ≈ 141.64 cm
❿ AB❿ ≈ **142.76 cm** **längster Weg**
⓬ AB⓬ ≈ 142.46 cm
❾ AB❾ ≈ **138.82 cm** **kürzester Weg**

Für **100 cm** Höhe, 80 cm Durchmesser:
❽ AB❽ = **180 cm** **längster Weg**
⓫ AB⓫ ≈ 177.70 cm
❿ AB❿ ≈ 174.67 cm
⓬ AB⓬ ≈ 170.45 cm
❾ AB❾ ≈ **160.60 cm** **kürzester Weg**

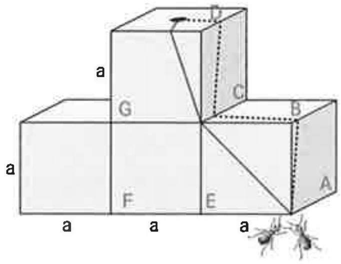
Kürzester Weg ist offensichtlich immer entweder der Weg ❽ – senkrecht nach oben und dann diametral über den Deckel – oder der Weg ❾ über den Mantel.
Der längste Weg wechselt: Bei niedriger Höhe (im Vergleich zum Durchmesser) ist es der Weg über den Mantel. Je höher der Zylinder im Vergleich zum Durchmesser, umso mehr fällt der Weg auf dem Deckel ins Gewicht. Bei sehr hohen Zylindern ist der Weg senkrecht nach oben der längste.

Wo ist Weg ❽ der kürzeste Weg, wo Weg ❾ ?

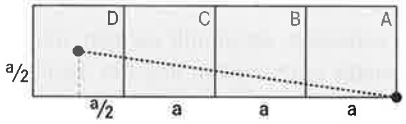
$$\begin{aligned}
h + 2r &< \sqrt{(r\pi)^2+h^2} && |\text{quadrieren}\\
\cancel{h^2} + 4rh + 4r^2 &< r^2\pi^2 + \cancel{h^2} && |-h^2 \quad |:r\\
4h + 4r &< r\pi^2 && |-4r\\
4h &< r(\pi^2-4) && |:4\\
\mathbf{h} &\mathbf{<} \mathbf{r(\pi^2-4):4}
\end{aligned}$$

Für r = 40 cm folgt: Für **h < 58.696... cm** ist Weg ❽ der kürzeste, für grössere h Weg ❾.

J3117 Wir gehen davon aus, dass die beiden Ameisen als Ziel den Mittelpunkt vereinbart haben – und jede bei der gewählten Variante (Treppe, Front) den kürzesten Weg findet.

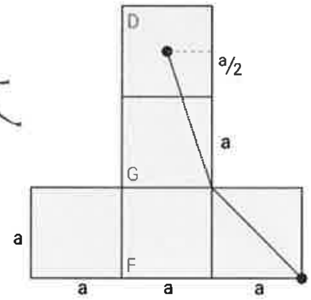


Weg über die Treppe



$\sqrt{(3.5a)^2+(0.5a)^2} = \mathbf{a\sqrt{12.5} \approx 3.54a}$

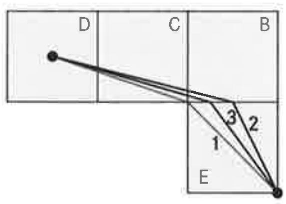
Weg über die Front



$a\sqrt{2} + \sqrt{(1.5a)^2+(0.5a)^2} = \mathbf{a(\sqrt{2}+\sqrt{2.5}) \approx 3.00a}$

Die Ameise, die den **Weg über die Front** wählt, gewinnt.

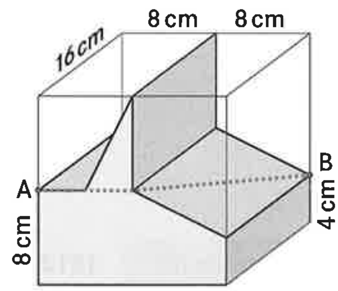
Kürzere Wege?
Es bleibt zu untersuchen, ob es allenfalls einen kürzeren Weg gibt, der ein Stück über die Front und dann über die Seite verläuft.
Wir untersuchen 3 Wege:
1 Der Diagonale entlang bis zur Ecke, dann über die Seite.
2 Zur Mitte der oberen Kante, dann über die Seite.
3 Zum Punkt der oberen Kante, der in der Mitte der beiden vorherige Überquerungspunkte liegt.



1 Die Länge ist identisch mit dem Weg über die Front: $\approx$ **3.00a**
2 $\sqrt{a^2+(0.5a)^2} + \sqrt{(2a)^2+(0.5a)^2} \approx \mathbf{3.18a}$
3 $\sqrt{a^2+(0.75a)^2} + \sqrt{(1.75a)^2+(0.5a)^2} \approx \mathbf{3.07a}$

Der Weg über die Front ist der kürzeste.

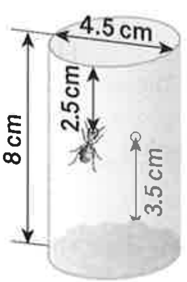
J3118 Der schlaue Tausendfüssler wählt den Weg:



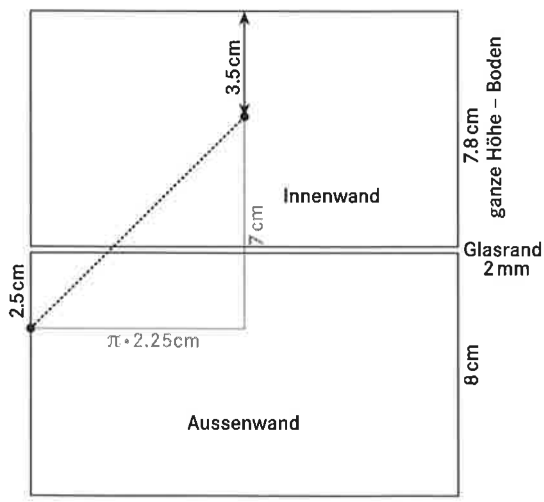
Waagrecht bis zur zweiten Dachecke, dann schräg über das untere Dach.

Seine Länge: $8\,\text{cm} + \sqrt{4^2+8^2+16^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{26.33\,cm}$

J3119

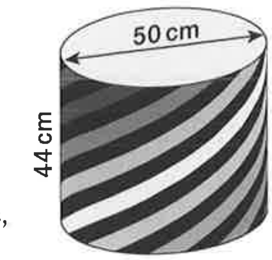


Unsere Ameise ist gewieft. Sie läuft **nicht** einfach senkrecht hinauf, innen senkrecht hinunter, über den Boden und wieder hinauf. Da hätte sie nämlich einen Weg von $(2.5+0.2+7.8+4.1+3.5)\,\text{cm} = 18.1\,\text{cm}$ zu bewältigen.
Sie läuft **spiralförmig über den äusseren und inneren Mantel**.
Ihr Weg hat eine Länge von
$\sqrt{(2.25\pi)^2+7^2}\,\text{cm} \approx \mathbf{9.95\,cm}$



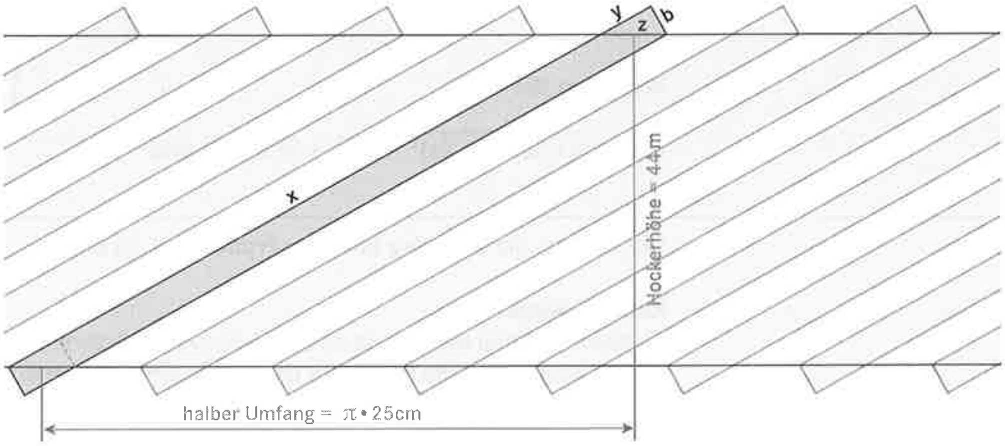
(Die Rundung des Randes ist nicht berücksichtigt, dieser Fehler ist aber minim.)

J3120 **a** Abmessungen Filzmantel ohne Nahtzugaben:



Breite $\pi \cdot 50\,\text{cm} \approx$ **157.1 cm**
Höhe **44 cm**

b Da die 9 Streifen schräg verlaufen, empfiehlt es sich, ein genaues, massstäbliches Schnittmuster herzustellen und die Streifenlänge und Breite zu messen – oder anhand einer Skizze Berechnungen durchzuführen. Sonst dürfte der Hocker am Schluss kaum so aussehen, wie ihn Andrea geplant hat.



Wir gehen davon aus, dass die Streifen rechteckig geschnitten werden. Alles andere würde – ausser bei einer Grossproduktion – viel zu viel Stoff benötigen.

Länge eines Streifens: x + y   Breite eines Streifens: b   Anzahl Streifen: 9

$x = \sqrt{(25\pi)^2 + 44^2}\,\text{cm} = 90.025...\,\text{cm}$
$z = \pi \cdot 50\,\text{cm} : 18 = 8.726...\,\text{cm}$ (18 = 9 Streifen + 9 Zwischenräume)

b lässt sich mit den bis anhin erworbenen Geometriekenntnissen nur über die Fläche berechnen (später geht es mit Ähnlichkeit einfacher):
$b \cdot x = z \cdot 44\,\text{cm} \Rightarrow$ **b** $= 4.265...\,\text{cm} \approx$ **4.3 cm**

$y = \sqrt{z^2 - b^2} = 7.613...\,\text{cm}$
x + y ≈ 97.6 cm

Die Filzstreifen müssen in der Grösse **97.6 cm x 4.3 cm** geschnitten werden.

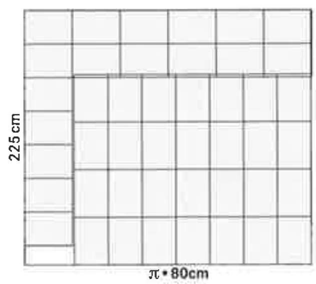
Plakatsäule im Schulhaus

Diese Aufgabe – insbesondere Teilaufgabe **d** – ist besonders reizvoll, wenn sie im Rahmen eines Schulanlasses handfest – mit Hilfe einer Kartonsäule – verwirklicht werden kann.

J3121 **a** **Gesamte Werbefläche:** $\pi \cdot 80\,\text{cm} \cdot 225\,\text{cm} \approx$ **56 549 cm²**

b Maximale Einnahmen hätte die Firma dann, wenn die ganze Fläche lückenlos mit Plakaten der Grösse A3 vollgeklebt wäre:
Abmessungen von A3   29.7 cm x 42 cm   Fläche von A3 $1\,247.4\,\text{cm}^2$
$56\,549\,\text{cm}^2 : 1247.4\,\text{cm}^2 = 45.3 \Rightarrow$ Theoretisch hätten 45 Plakate Platz

Maximale theoretische Einnahmen pro Woche:
45 · Fr. 5.50 = **Fr. 247.50**

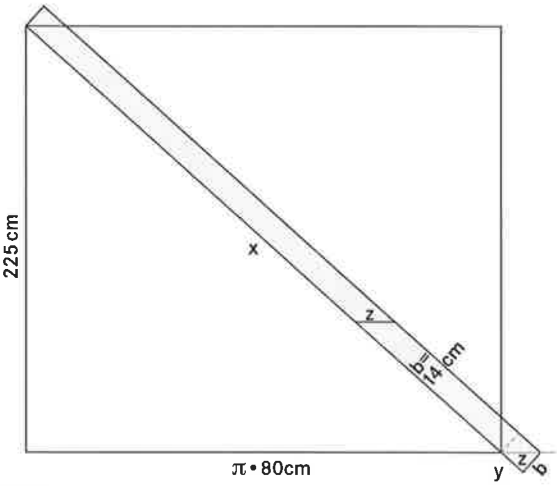


Eine massstäbliche Zeichnung zeigt, dass es – abgesehen von kleinen Überlappungen – tatsächlich möglich wäre, die Säule mit so vielen Plakaten zu bekleben.

c Es wird kaum je vorkommen, dass in derselben Woche 17 A3-quer und 28 A3-hoch Plakate aufgehängt werden sollen. A2-Plakate sind zudem doppelt so gross.

d –

d Bandlänge und Schriftbreite lassen sich anhand einer grossen massstäblichen Zeichnung messen oder mit Hilfe einer Skizze berechnen:



1 $x = \sqrt{(80\pi)^2 + 225^2}$ cm
$= 337.328...$ cm

Diese Länge genügt nicht, um das Band oben und unten bündig anzubringen. Es muss länger sein. Realistisch dürfte eine Zugabe von etwa 5-10% sein. Daraus folgt eine **Länge** von **ca. 360 cm.**

2 z lässt sich mit den bis anhin erworbenen Geometriekenntnissen nur über die Fläche des Bandes berechnen:

Breite b des Bandes: b = 14 cm
$b \cdot x = z \cdot 225\,\text{cm} \quad \Rightarrow \mathbf{z} = b \cdot x : 225\,\text{cm} = 20.989...\,\text{cm} \approx \mathbf{21\,cm}$

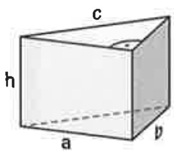
Waagrecht von Rand zu Rand hat das Band eine Breite von knapp 21 cm. Der Text könnte wohl **höchstens 20 cm breit** geschrieben werden.

Zu **1** Eine genaue Berechnung der minimalen Bandlänge ergibt:
$y = \sqrt{z^2 - b^2} = 15.638...\,\text{cm} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x + y \approx 353\,cm}$

J3122 Arbeitsblatt (Kopiervorlage)
Das Lösungsblatt ist bei den Lösungen der Arbeitsblätter

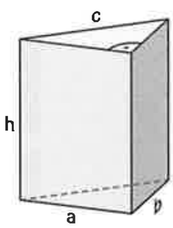
J3123

a	**a = 8 dm**	b = 6 dm	c = 10 dm	h = 3 dm
	G = 24 dm²	**M = 72 dm²**	**S = 120 dm²**	**V = 72 dm³**
b	a = 5.5 cm	b = 7.2 cm	**c ≈ 9.06 cm**	**h = 8.5 cm**
	G = 19.8 cm²	**M ≈ 184.96 cm²**	**S ≈ 224.56 cm²**	V = 168.3 cm³



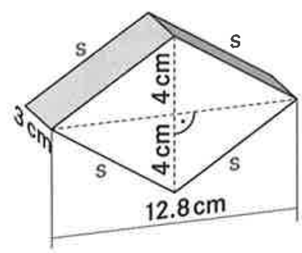
J3124

a	a = 5 cm	**b = 8 cm**	**c ≈ 9.43 cm**	h = 35 cm
	G = 20 cm²	**M ≈ 785.19 cm²**	**S ≈ 825.19 cm²**	V = 700 cm³
b	**a = b ≈ 9.90 cm**		c = 14 cm	**h = 6 cm**
	G = 49 cm²	**M ≈ 202.79 cm²**	**S ≈ 300.79 cm²**	V = 294 cm³
c	a = 3x	**b = 4x**	c = 5x	h = 7x
	G = 6x²	**M = 84x²**	**S = 96x²**	**V = 42x³**

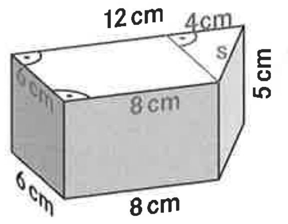


J3125 **a** $G = e \cdot f : 2 = 12.8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} : 2 = 51.2\,\text{cm}^2$
$h = 3\,\text{cm}$
$\mathbf{V} = G \cdot h = \mathbf{153.6\,cm^3}$

$s = \sqrt{4^2 + 6.4^2}\,\text{cm} = 7.547...\,\text{cm}$
$M = u \cdot h = 4s \cdot h = 90.566...\,\text{cm}$
$\mathbf{S} = M + 2G \approx \mathbf{192.97\,cm^2}$

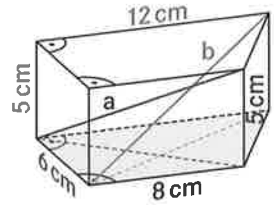


■ $G = m \cdot h = 10\,cm \cdot 6\,cm = 60\,cm^2$
$h = 5\,cm$
$V = G \cdot h =$ **$300\,cm^3$**



$s = \sqrt{4^2+6^2}\,cm = 7.211...\,cm$
$M = u \cdot h = (26\,cm + s) \cdot h = 166.055...\,cm$
$S = M + 2G \approx 286.06\,cm^2$

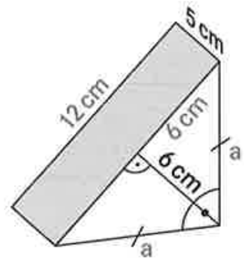
Körperdiagonalen:



$a = \sqrt{6^2+8^2+5^2}\,cm \approx 11.18\,cm$

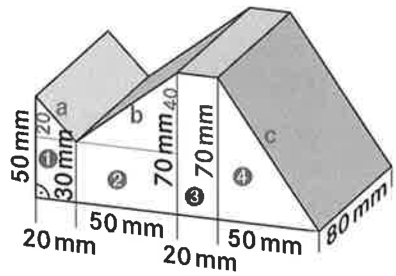
$b = \sqrt{6^2+5^2+12^2}\,cm \approx 14.32\,cm$

■ $G = (6\,cm)^2 = 36\,cm^2$
$h = 5\,cm$
$V = G \cdot h =$ **$180\,cm^3$**



$a = 6\,cm \cdot \sqrt{2} = 8.485...\,cm$
$M = u \cdot h = (12\,cm + 2a) \cdot h = 144.852...\,cm$
$S = M + 2G \approx 216.85\,cm^2$

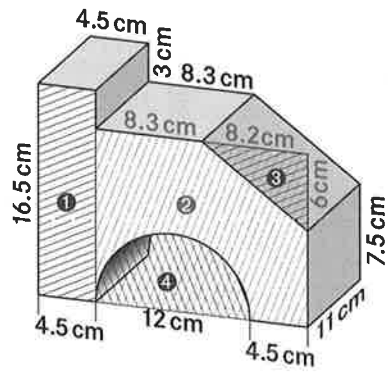
J3126 ■ $G = A_❶ + A_❷ + A_❸ + A_❹$
$= (40 \cdot 20 + 50 \cdot 50 + 70 \cdot 20 + 70 \cdot 50 : 2)\,mm^2$
$= 6450\,mm^2$



$h = 80\,mm$
$V = G \cdot h =$ **$516\,000\,mm^3$**

$u = 210\,mm + a + b + c$
$= 210\,mm + \sqrt{20^2+20^2}\,mm + \sqrt{50^2+40^2}\,mm + \sqrt{50^2+70^2}\,mm = 388.338...\,mm$
$M = u \cdot h \approx 31\,067\,mm^2$

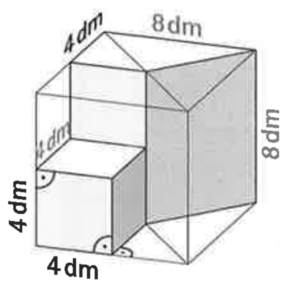
■ G = Rechteck❶ + Rechteck❷ – Dreieck❸ – Halbkreis❹
$= (4.5 \cdot 16.5 + 16.5 \cdot 13.5 - 8.2 \cdot 6 : 2 - \pi \cdot 6^2 : 2)\,cm^2$
$= 215.851...\,cm^2$



$h = 11\,cm$
$V = G \cdot h =$ **$2374.36\,cm^3$**

$u = 48.8\,cm + \sqrt{8.2^2+6^2}\,cm + \pi \cdot 6\,cm = 77.810...\,cm$
$M = u \cdot h \approx 855.91\,cm^2$

J3127 ■ Körper = Würfel + Prisma (G = Trapez)

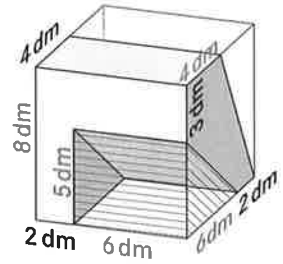


Würfel: $V_{Würfel} = (4\,dm)^3 = 64\,dm^3$

Prisma: $G = 6\,dm \cdot 4\,dm = 24\,dm^2$
$h = 8\,dm$
$V_{Prisma} = G \cdot h = 192\,dm^3$

Gesamt: **V_{gesamt}** $= V_{Würfel} + V_{Prisma} =$ **$256\,dm^3$**

Körper = gr. Prisma(G = Trapez) - kl. Prisma(G = Dreieck)



gr. Prisma: $G_{gr} = m \cdot h_{Trapez} = 6\,dm \cdot 8\,dm = 48\,dm^2$
$h_{gr} = 8\,dm$
$V_{gr} = G \cdot h = 384\,dm^3$

kl. Prisma: $G_{kl} = 6\,dm \cdot 5\,dm : 2 = 15\,dm^2$
$h_{kl} = 6\,dm$
$V_{kl} = G \cdot h = 90\,dm^3$

Gesamt: $\mathbf{V_{gesamt}} = V_{gr} - V_{kl} = \mathbf{294\,dm^3}$

2. Lösungsweg:
Körper = Würfel - hinteres Prisma(G = Dreieck) - kl. Prisma(G = Dreieck)

J3128 r = 8.7 cm | h = 15.4 cm
u ≈ 54.66 cm | **M ≈ 841.82 cm²**
G ≈ 237.79 cm² | **V ≈ 3 661.92 cm³** | **S ≈ 1 317.40 cm²**

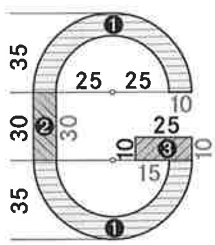
d = 34 mm | h = 23 mm
u ≈ 106.8 mm | **M ≈ 2 456.7 mm²**
G ≈ 907.9 mm² | **V ≈ 20 882.2 mm³** | **S ≈ 4 272.6 mm²**

J3129	u = 78 cm	h = 22 cm	**M = 1 716 cm²**	**S ≈ 2 684.3 cm²**	**V ≈ 10 651.3 cm³**
	d = 4 dm	**h ≈ 0.80 dm**	**M = 10 dm²**	**S ≈ 35.13 dm²**	V = 10 dm³
	r = 3z	h = 5z	$\mathbf{M = 30z^2 \cdot \pi}$	$\mathbf{S = 48z^2 \cdot \pi}$	$\mathbf{V = 45z^3 \cdot \pi}$

J3130 Weil der Zylinder gleich hoch ist wie das Prisma, muss er die gleich grosse Grundfläche haben.

$G_{Prisma} = 12\,cm \cdot 6\,cm \cdot \sqrt{3} : 2 = 62.353...\,cm^2$
$G_{Zylinder} = \pi \cdot r^2$
$G_{Zylinder} = G_{Prisma} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{G_{Prisma} : \pi} = \mathbf{4.46\,cm}$

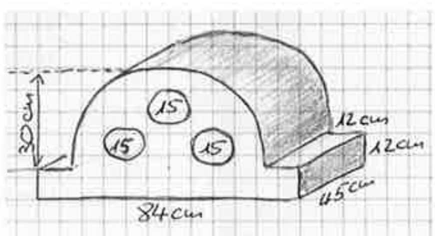
J3131 Grundfläche = Ring❶ + Rechteck❷ +Rechteck❸
$G = \pi \cdot ((35\,mm)^2 - (25\,mm)^2) + 300\,mm^2 + 250\,mm^2$
$= 2\,434.955...\,mm^2$



$h = 40\,mm$
$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{97\,398\,mm^3}$

$u = 130\,mm + 2\pi \cdot 25\,mm + 2\pi \cdot 35\,mm$
$= 506.991...\,mm$
$M = u \cdot h = 20\,279.644...\,mm$
$\mathbf{S} = M + 2G \approx \mathbf{25\,150\,mm^2}$

J3132 Grundfläche = Rechteck + Halbkreis - 3 kl Kreise
$G = 84\,cm \cdot 12\,cm + 0.5 \cdot \pi \cdot (30\,cm)^2 - 3 \cdot \pi \cdot (7.5\,cm)^2 = 1\,891.572...\,cm^2$

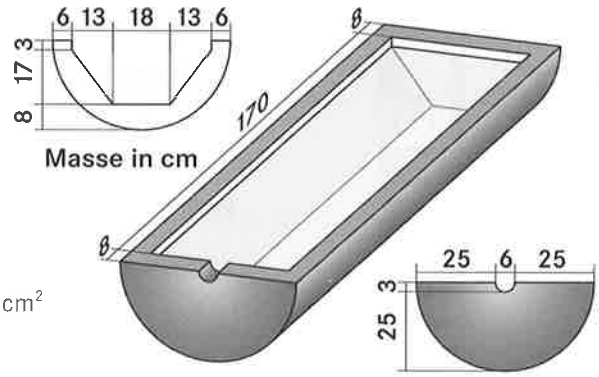


$h = 45\,cm$
$\mathbf{V} = G \cdot h \approx \mathbf{85\,121\,cm^3}$

$u = 132\,cm + \pi \cdot 30\,cm + 3 \cdot 2\pi \cdot 7.5\,cm$
$= 367.619...\,cm$
$M = u \cdot h = 16\,542.875...\,cm$
$\mathbf{S} = M + 2G \approx \mathbf{20\,326\,cm^2}$

J3133 **a** G_{Wasser} = 31 cm · 17 cm = 527 cm^2
h_{Wasser} = 170 cm
$\mathbf{V_{Wasser}}$ = 89 590 cm^3

Die Tränke fasst ungefähr
89.6 Liter Wasser.



b G_{Trog} = 0.5 · π · (28 cm)^2 = 1 231.504... cm^2
h_{Trog} = 186 cm
V_{Trog} = 229 059.803... cm^3

$G_{Ausfluss}$ = 0.5 · π · (3 cm)^2 = 14.137... cm^2
$h_{Ausfluss}$ = 8 cm
$V_{Ausfluss}$ = 113.097... cm^3

V_{Holz} = V_{Trog} − $V_{Wassser}$ − $V_{Ausfluss}$ = 139 356.706... cm^3 ≈ 139 357 cm^3
$Dichte_{Holz}$ = 0.7 kg/dm^3
$\mathbf{m_{Holz}}$ = 139.357 · 0.7 kg ≈ **97.5 kg**

Der Trog ist **fast 100 kg** schwer.

J3134 G_{Sand} = π · (34.6 cm)^2 = 3 760.989... cm^2
h_{Sand} = 13.2 cm
V_{Sand} ≈ 49 645 cm^3

$Dichte_{Sand}$ = 1.4 g / cm^3
$\mathbf{m_{Sand}}$ = 49 645 · 1.4 g ≈ **69.5 kg**
$m_{Ständer}$ = 6 kg
$\mathbf{m_{total}}$ ≈ **75.5 kg**

Wird der Sonnenschirm-Ständer ganz mit Sand gefüllt, so wiegt er **ungefähr 75.5 kg**.

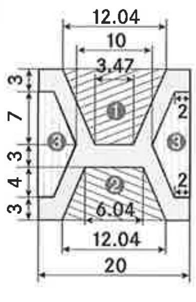
J3135 **a** V_{Kilo} = $\pi \cdot r^2 \cdot h$
$= \pi \cdot \left(\frac{38.957\text{ mm}}{2}\right)^2 \cdot 38.957\text{ mm}$
= 46435.101... mm^3

m_{Kilo} = 1 kg

Dichte = $\frac{1000\text{ g}}{46.435...\text{ cm}^3}$ = 21.53543... g/cm^3

Die verwendete Platin-Iridium-Legierung hat eine Dichte von 21.535 g/cm^3.

b



G = umgebendes Quadrat − Trapez❶ − Trapez❷ − 2 · Fünfeck❸

$= (400 - \frac{12.04 + 3.47}{2} \cdot 10 - \frac{12.04 + 6.04}{2} \cdot 7 - 2 \cdot (2 \cdot 14 + \frac{14 \cdot 3}{2}))\text{mm}^2$

= 161.17 mm^2 = 1.6117 cm^2

h = 100 cm (in Wirklichkeit: 102 cm)
V = 161.17 cm^3
m = 161.17 · 21.535 g ≈ **3.471 kg**

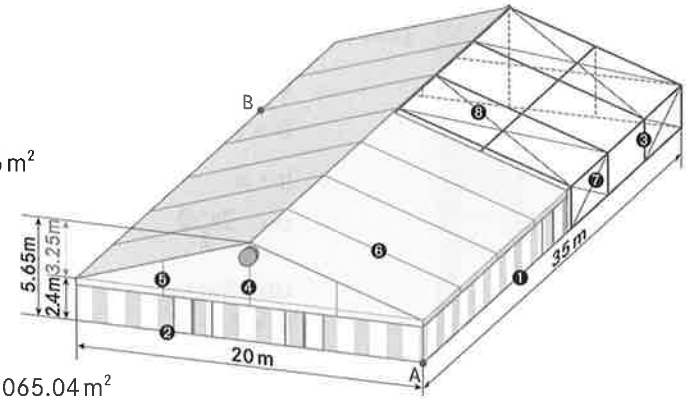
Der Meterprototyp ist 3.471 kg schwer.

J3136 **a** Gelb-weiss gestreifte Wand:
$A_{Wand} = 110\,m \cdot 2.4\,m = 264\,m^2$

Dachgiebel vorne und hinten:
$A_{Giebel} = 2 \cdot 20\,m \cdot 3.25\,m : 2 = 65\,m^2$

Dach:
$A_{Dach} = 2 \cdot \sqrt{3.25^2 + 10^2}\,m \cdot 35\,m$
$\approx 736.04\,m^2$

Zeltaussenfläche:
$A_{Zelt} = A_{Wand} + A_{Giebel} + A_{Dach} \approx 1065.04\,m^2$



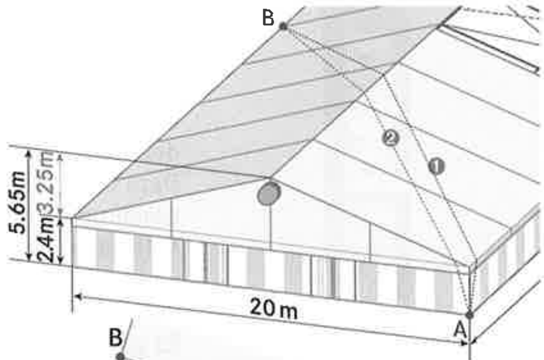
Gesamte Blachenfläche und Masse:
$A_{gesamt} = 1.05 \cdot A_{Zelt} \approx 1118.25\,m^2$
$\mathbf{m_{gesamt}} = A_{gesamt} \cdot 650\,g = 726862.5\,g \approx$ **727 kg**
Die gesamte Zeltblache wiegt **rund 727 kg**.

b

❶	7	à	35 m	=	245	m
❷	4	à	20 m	=	80	m
❸	16	à	2.4 m	=	38.4	m
❹	2	à	5.65 m	=	11.3	m
❺	4	à	4.025 m	=	16.1	m
❻	16	à	$\sqrt{3.25^2 + 10^2}\,m$	≈	168.24	m
❼	16	à	$\sqrt{5^2 + 2.4^2}\,m$	≈	88.74	m
❽	16	à	$\sqrt{10^2 + 5^2 + 3.25^2}\,m$	≈	186.29	m
Total					**834.07**	**m**

Für den Aufbau des Festzeltes sind **rund 835 m** Gestänge nötig.

J3137 Es kommen zwei Wege in Frage:
❶ Über die Seitenwand und das Dach
❷ Über die Front und das Dach



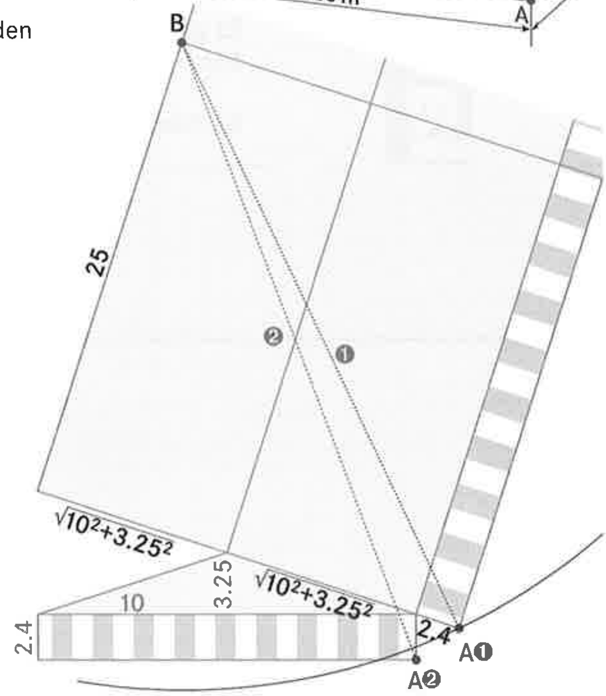
Die Länge von Weg ❶ lässt sich einfach berechnen. Die Länge von Weg ❷ lässt sich mit den bisherigen Geometriekenntnissen nur anhand einer massstäblichen Zeichnung bestimmen.
Anhand einer solchen Zeichnung kann auch beurteilt werden, welche der beiden Varianten länger ist.

Die Abbildung im Massstab 1:4 zeigt klar, dass der Weg ❶ kürzer ist.

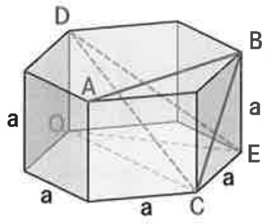
Seine Länge:

$❶ = \sqrt{25^2 + (2 \cdot \sqrt{10^2 + 3.25^2} + 2.4)^2}$
$\approx$ **34.26 m**

Auf dem kürzesten Weg muss der Tausendfüssler **34.26 m** laufen.



J3138 ■ Sechseck = 6 gleichseitige Dreiecke (Seite a, Höhe $\frac{a}{2}\sqrt{3}$)



Volumen

$G = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$h = a$

$\mathbf{V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}}$

Oberfläche

$M = 6a^2$ $\Rightarrow$ $S = 2G + M = \mathbf{3a^2\sqrt{3} + 6a^2 = 3a^2(\sqrt{3} + 2)}$

■ **Streckenzug ABCDE**

$AB = 2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = a\sqrt{3}$

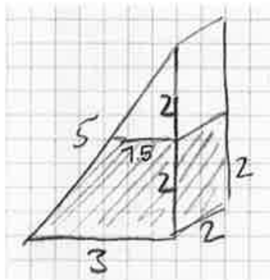
$BC = a\sqrt{2}$

$CD = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$

$DE = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a$

ABCDE = $\mathbf{a(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5} + 2)}$

J3139 ■ Da das Prisma nur 2 cm hoch ist, und das Wasser bereits 2 cm hoch steht, wenn nur ein Teil eingetaucht ist, wird es sicher ganz bedeckt, wenn man es auf die Grundseite legt. Es genügt deshalb zu berechnen, welcher Wasserhöhe der obere Teil entspricht.

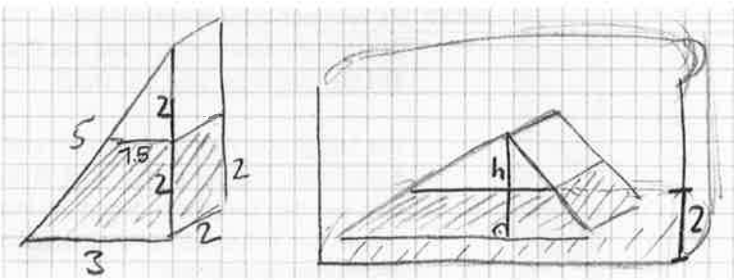


$V_{\text{oberhalb Wasser}} = \frac{2\,\text{cm} \cdot 1.5\,\text{cm}}{2} \cdot 2\,\text{cm} = 3\,\text{cm}^3$

$\pi \cdot (5\,\text{cm})^2 \cdot h = 3\,\text{cm}^3$ $\Rightarrow$ $\mathbf{h = 0.0381...\,cm}$

Das Wasser **steigt kaum** merklich.

■ Es muss der gleiche Anteil des Prismas eingetaucht sein, also auch der gleiche Anteil der Grundfläche. Dazu muss das Prisma wiederum bis zur Mittellinie, eingetaucht werden.



Es gilt:

$5\,\text{cm} \cdot h : 2 = 3\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} : 2$ $\Rightarrow$ $h = 3\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} : 5 = 2.4\,\text{cm}$

Da Prisma muss um **1.2 cm** eingetaucht werden.