O Terme und Gleichungen III

O1 Variablen, Terme, Gleichungen

Termbildung mit Variablen

O1
a) $k + m$
b) $\frac{m}{2} + \frac{k}{3} = \frac{2k + 3m}{6}$
c) $2 \cdot (k + m) = 2k + 2m$

O2
a) Es hat 3 Mädchen mehr als Knaben.
b) Es hat halb so viele Knaben wie Mädchen.
c) Es hat ein Mädchen mehr als Knaben.

O3
$\frac{x + y}{2}$ ist das arithmetische Mittel (Durchschnitt) der Zahlen x und y.
$\sqrt{x^2 + y^2}$ ist die Länge der Hypothenuse eines Dreiecks, wenn x und y die Längen der beiden Katheten sind.

O4
a) $c + h$
b) $2c + 4h$
c) $c + h + 2c + 4h = 3c + 5h$

O5
$j = 2i$ oder $i = \frac{j}{2}$

Beine: $6i + 8$ oder $3j + 8$

Beine: $2 \cdot (i + j + 1 + 3) = 2i + 2j + 8$

O6
a) $a + b = b + a$
b) $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$
c) $a + (b + c) = a + b + c$
d) $a - (b + c) = a - b - c$

O7
a) $a \cdot b = b \cdot a$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$
b) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
c) $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
d) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ oder $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$

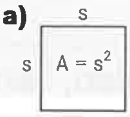
O8
a) $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
b) $a^b : a^c = a^{b-c}$
c) $(a^b)^c = a^{b \cdot c} = a^{bc}$
d) $a^c \cdot b^c = (a^b)^c = (a \cdot b)^c$
e) $a^c : b^c = (a : b)^c$

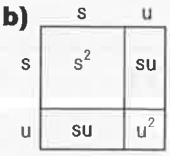
O9
$(-1) \cdot (-x) = (-1)(0 - x) = (-1) \cdot 0 - ((-1) \cdot x) = 0 - (-x)$
$= 0 + x = x$ oder $-x = (-1) \cdot x$,
also $(-1) \cdot (-x) = (-1) \cdot (-1) \cdot x = 1 \cdot x = x$

O10
a) $y = 0.6G$
b) $N = N_0 \cdot 0.65 \cdot 0.7$

O11
a) $u = 2\pi r$ und $A = r^2\pi$
b) $s^2 = r^2 + t^2$ oder $\sqrt{r^2 + t^2}$ oder $r^2 = s^2 - t^2$ oder …

O12
a) $A_1 = s^2$
b) $A_2 = (s + u)^2$ $(= s^2 + 2su + u^2)$

a)


b)


O13
a) Wenn x wächst, so wächst auch y; wenn x abnimmt, so nimmt auch y ab.
Genauer: y ist proportional zu x, d. h. k-faches von x liefert k-faches von y.
b) Wenn x wächst, so nimmt y ab; wenn x wächst, so nimmt y zu.
Genauer: y ist umgekehrt proportional zu x, d. h. «wird x ver-k-facht, so wird y ge-k-telt».
Beispiel: x wird verdreifacht, so wird y gedrittelt.

O14
a) $P = U \cdot I$
b) Die Stromstärke von B muss
… kleiner sein
… $\frac{1}{3}$ von A sein
… $\frac{1}{n}$ von A sein.
c) Die Spannung von B ist grösser.

O15
a) $\sqrt{4\left(\frac{n}{2}\right)^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2} = 2 \cdot \frac{n}{2} = n$
b) $\frac{\sqrt{4n^2}}{2} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{n^2}}{2} = \frac{2n}{2} = n$

Beobachtung: Man erhält wieder die gleiche Zahl, ausser wenn man am Anfang eine negative Zahl nimmt.

O16
a) $\sqrt{n^2 + 2n + 1} = \sqrt{(n + 1)(n + 1)} = n + 1$
b) $\sqrt{n^2 - 2n + 1} = \sqrt{(n - 1)(n - 1)} = n - 1$

a) Man erhält eins mehr als die ursprüngliche Zahl (wenn die Ausgangszahl 1 oder grösser ist).
b) Hier erhält man eins weniger als die Augenzahl.

Variablenterme umformen

O17 **a)** $5x$ **b)** x^5 **c)** 0

O18 **a)** $16x$ **b)** $12x$ **c)** $12x$

O19 **a)** $60x^3$ **b)** $60xyz$ **c)** $5y - 5z = 5(y - z)$

O20 **a)** $\frac{a + b - c}{2}$ **b)** $\frac{5x}{12}$ **c)** $\frac{5y - 4z}{20}$

O21 **a)** $2a^2$ **b)** $3.9m^2$ **c)** $\frac{5x^2}{6}$

O22 **a)** a^{x+y+z} **b)** $(xyz)^3 = x^3y^3z^3$ **c)** 1

O23 **a)** x^2 **b)** x^6 **c)** x^2

O24 **a)** A^{x+y-z} **b)** 1 **c)** $2M^{-6}$

Stehen keine Klammern, wie bei c), so ist von links nach rechts zu rechnen, also wie bei a).

O25 **a)** $\frac{1}{2x}$ **b)** $\frac{1}{a}$ **c)** $\frac{z}{3}$ **d)** $\frac{1}{x + y}$ **e)** $\frac{1}{0.5e} = \frac{2}{e}$

O26 **a)** $\frac{b+c}{a}$ **b)** $\frac{a}{b+c}$ **c)** $\frac{ab}{a+b}$ **d)** $\frac{n}{n+1}$
e) Es gibt keinen Kehrwert von 0.

O27 **a)** $1\,000\,000 = 10^6$ **b)** 10^4 **c)** $0.000\,1 = 10^{-4}$
d) $0.000\,1 = 10^{-4}$ **e)** 10^n

O28 **a)** 0 **b)** 27b **c)** $\frac{9}{a}$

O29 **a)** $-60x^5y^2$ **b)** $-12x^2$ **c)** $11x^2y^5$

b) $= -3x^2 - (3x)^2$

O30 **a)** $1000a^{10}$ **b)** $\frac{2(a-b)}{6} = \frac{a-b}{3}$ **c)** 1

O31 **a)** falsch, $= 2y + 3$ **b)** richtig **c)** falsch, $= -a - 2b$

O32 **a)** falsch, $2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$
b) falsch, kann man nicht zusammenfassen
c) richtig

O33 **a)** $\frac{257x^2}{9} = 28\frac{5}{9}x^2$ **b)** $325x^2$
c) $\frac{529x^2}{9} = 58\frac{7}{9}x^2$

b) $\left(\frac{23x}{3}\right)^2$

O34 $4x + 9y$

O35 **a)** $\frac{37}{18y}$ **b)** $\frac{9a^2 - 14a + 5}{6a^2}$
c) $\frac{10z^2 - 9x^{\cancel{2}}y^2 - 4}{12x^2yz} = -\frac{9x^{\cancel{2}}y^2 - 10z^2 + 4}{12x^2yz}$

Gleichungstypen und Lösungsmethoden

O36 **a)** $L = \{7\}$ **b)** $L = \{\frac{5}{3}\}$ **c)** $L = \{-5, 8\}$
d) $L = \{(1/3), (2/2), (3/1)\}$

O37 **a)** $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ **b)** $x \cdot (y + z) = xy + xz$
c) $x - (y + z) = x - y - z$

O38 **a)** $V = r^2\pi h = 14^2 \cdot \pi \cdot 75\ \text{cm}^2 \approx 46.2\ \text{dm}^3$
b) $x = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{19^2 + 28^2} \approx 33.84\ \text{cm}$

O39 **a)** 52 089
b) $1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1$
$+ 1 \cdot 2^0 = 105$
c) $\frac{a^x}{a^x} = a^{x-x} = a^0$, anderseits gilt auch $\frac{a^x}{a^x} = 1$,
also muss gelten $a^0 = 1$

c) Beginne mit dem Bruch $\frac{a^x}{a^x}$ und berechne seinen Wert auf zwei verschiedene Arten.

O40 **a)** $\{8, 3, 0, -1, 0, 3, 8\}$ **b)** $\{10, 20, 40, 200\}$ [m/s]

O41 **a)** Regel **b)** Definition und Berechnungsformel
c) Bestimmungsgleichung
d) Definition und Berechnungsformel
e) falsche Aussage **f)** richtige Aussage
g) Funktionsgleichung **h)** Definition
i) Regel (Potenzgesetz) **k)** Berechnungsformel

e) und **f)** fallen aus dem Rahmen, da sie keine Variablen enthalten. Hier kann man lediglich entscheiden, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

042	**a)** $L = \{11\}$ **b)** $L = \mathbb{Q}$ **c)** $L = \{-1, 1\}$ **d)** $L = \{\,\}$	Nicht alle Gleichungen haben dieselbe Anzahl Lösungen.
043	**a)** $L = \{9\}$ **b)** $L = \{\,\}$ **c)** $L = \{16\}$	**b)** $\frac{1}{3}$ wäre Lösung, ist aber nicht in G.
044	**a)** $L = \{\,\}$ **b)** $L = \{0\}$ **c)** $L = \{90\,000\,002\}$	**a)** −3 wäre Lösung, ist aber nicht in G.
045	**a)** $L = \{-11\}$ **b)** $L = \{-2, 2\}$ **c)** $L = G = \mathbb{Z}$	
046	**a)** $L = \left\{\frac{7}{2}\right\}$ **b)** $L = \{\,\}$ **c)** $L = \{-1\}$	**b)** $\pm\sqrt{8}$ wäre Lösung, liegt aber nicht in G.
047	**a)** $L = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$ **b)** $L = \{\pi\}$ **c)** $L = \{\,\}$	
048	in G_1: $L = \{15\}$, in G_2: $L = \{0, 15\}$	
049	in G_1: $L = \{-2, 100\}$, in G_2: $L = \{100\}$	
050	in G_1: $L = \{\,\}$, in G_2: $L = \{\pi\}$	
051	Es gibt keine solche Zahl (5 erfüllt die Gleichung, ist aber nicht negativ). Das Doppelte einer negativen Zahl kann ja nicht grösser als die Zahl sein.	$2x = x + 5,\ x < 0$
052	$L = \mathbb{Q}$	$45x - 6x^2 + 72x - 78 = 117x - 78 - 6x^2$
053	Ergibt für jede Zahl (ausser für 0) eine Quadratzahl, nämlich immer 9.	$\frac{3x + 3 \cdot 3x}{x} - 3n^2,\ n \in \mathbb{N}$
054	Gilt für 0 und 3.	$x^2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0$
055	Gilt für $-\frac{1}{2}$.	$z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{4}$
056	Gilt für $\pm\sqrt{2}$ Kontrolle: 1 : 1.414... = 1.414... : 2	$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow x^2 = 2$
057	**a)** $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **b)** $A = \{\,\}$	
058	Geht nur bei geraden Jahreszahlen: Die erste Zahl muss die Hälfte der Jahreszahl sein, die zweite Zahl ist beliebig. Beispiel für das Jahr 2004: $x = 1002$ und $y = 1$, denn $(1002 + 1) + (1002 - 1) = 2004$	$(x + y) + (x - y) = 2x$
059	mathematisch möglich: −12 und +12. Praktisch ist nur +12 cm brauchbar.	$h^2 = 144\ \text{cm}^2$
060	$L = \{-28, 28\}$, sinnvoll: $t = 28$ s	$t^2 = \frac{2h}{g} = \frac{2 \cdot 3920\ \text{m}}{10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 784\ \text{s}^2$
061	Multiplikation und Division mit einer Variablen, Potenzieren und Radizieren	Beim Potenzieren muss man aber aufpassen. $2 = x$ hat $L = \{2\}$ $2^2 = x^2$ hat aber $L = \{-2, 2\}$ Bei der Division durch eine Variable muss man sicherstellen, dass die Variable $\neq 0$ ist.

O62 **a)** äquivalent L = {6}
b) L = {0, 4}, dann L = {4}, dann L {-6}, also nicht äquivalent
c) äquivalent L = {-6}

O63 **a)** L = {-6, 6}, dann L = {6}, also nicht äquivalent
b) L = {0, 1}, dann L = {1}, also nicht äquivalent
c) L = {16}, äquivalent

O64 **a)** L = {0, 3.8} **b)** L = {0, 1}

O65 L = {0, -13.2, 4.4, -32}

Jeder Faktor kann 0 sein.

O66 **a)** L = {3} **b)** L = {2}, 1

b) Exponent muss 0 sein

O67 **a)** L = {-1, 1} **b)** L = $\mathbb{Q}$

O68 **a)** L = {1} **b)** L = {-1, 1} **c)** L = {1}
Für gerade Exponenten gibt es zwei Lösungen.

O69 **a)** L = {-1} **b)** L = { } **c)** L = {-1}
Für gerade Exponenten lässt sich die Gleichung nicht erfüllen.

O70 7 Brums und 1 Grum

Sei B = Anzahl Brums
G = Anzahl Rums
$$B \cdot \frac{15}{11} + G \cdot \frac{16}{11} + R \cdot \frac{17}{11} = 11$$

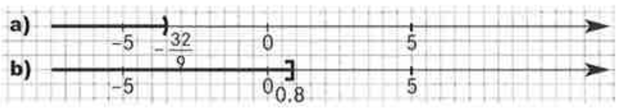
O71 **a)** $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$ **b)** $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -16\}$

O72 **a)** $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -13\}$ **b)** $L = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{2}{3}\right\}$

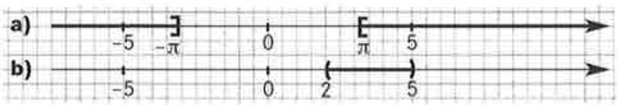
b) Achtung: Zeichen muss umgedreht werden. (Warum?)

O73 **a)** L = { } **b)** $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x$ [illegible] $5\}$

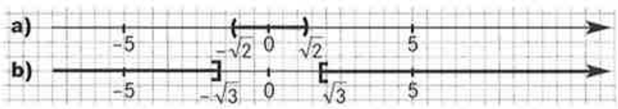
O74 **a)** $L = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y < -\frac{32}{9}\right\}$ **b)** $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0.8\}$



O75 **a)** $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\pi \ \wedge \ x \geq \pi\}$
b) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \ \wedge \ x < 5\} = \{x \mid 2 < x < 5\}$

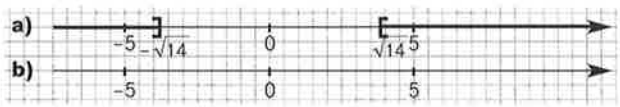


O76 **a)** $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\sqrt{2} \ \wedge \ x < \sqrt{2}\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$
b) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\sqrt{3} \ \vee \ x \geq \sqrt{3}\}$

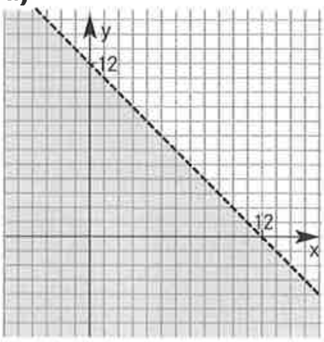


O77 **a)** $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\sqrt{14} \ \vee \ x \geq \sqrt{14}$ **b)** L = { }

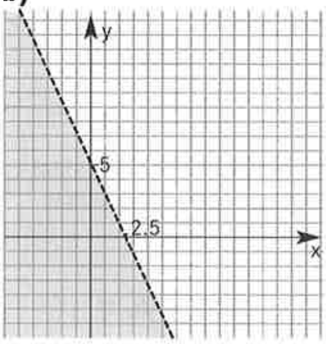
b) ohne zu rechnen, nur überlegen.



O78 a)



b)



Rätsel Diophant

$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x \Rightarrow x = 84$

Kontrollaufgaben

O79 k - 2a - b

O80 **a)** $6a^5$ **b)** a^2b^2 **c)** 0 **d)** 3x

O81 **a)** $-2x$ **b)** 0 **c)** $-4a$ **d)** x^2

O82 **a)** $\frac{13}{12}a$ **b)** $\frac{x^5}{9}$ **c)** $\frac{x^3 - x^2}{3}$ **d)** $\frac{b}{a}$

O83 **a)** L = {7} **b)** L = {15} **c)** L = {1}

O84 **a)** L = {1} **b)** L = {0, 6} **c)** $L = \left\{\frac{53}{6}\right\}$

O85 **a)** $L = \left\{\frac{2}{33}\right\}$ **b)** L = {-2, 2}

c) $L = \left\{\frac{b}{a}\right\}$ $a = 0, b \neq 0$

O86 z. B. 12x = 144

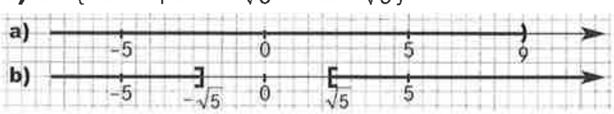
O87 **a)** ja **b)** nein **c)** nein

O88 17x = 16x + **x** = 16x + **255** Also L = {255}

O89 **a)** L = {0, 2} **b)** L = {10} **c)** $L = \mathbb{Q}$

O90 **a)** Der Widerstand muss ...
... kleiner gemacht werden.
... halbiert werden.
b) Der Strom wird ...
... verdreifacht.
... halbiert.
c) Die Spannung muss ...
... gedrittelt werden.
... n-mal so gross gemacht werden.

O91 **a)** $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 9\}$
b) $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\sqrt{5} \lor x \geq \sqrt{5}\}$



I ❤ Textaufgaben

O92 A: 80 000.– B: 60 000.– C: 36 000.–

$B = 0.75\,A$, $C = 0.6\,B = 0.6 \cdot 0.75$
$A = 0.45\,A$
$A + B + C = 2.2\,A = 176\,000$

O93 36 Schülerinnen und Schüler

$\frac{1}{12}x + \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}x + \frac{5}{18}x + 3 = x$

O94 15 Bienen (kleiner Schwarm)

$\frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)x + 1 = x$

O95 8 Frauen und 16 Männer

$m = 2f$
$m - 4 = 3(f - 4) \Rightarrow m = 3f - 12 + 4$

O96 $A_1 = 66.666\ \text{cm}^2$ und $A_2 = 41.666\ \text{cm}^2$

$0.5 : 0.8 = A_2 : (A_2 + 25)$
$\Leftrightarrow 0.5A_2 + 12.5 = 0.8A_2$

O97 $w = 3.529\ l$

$\frac{20}{20 + w} = 0.85$

O98 Nach 0.175 h = 10.5 min

3.5 km mit 20 km/h Differenz aufholen

O99 Geschwindigkeit des Stromes: $\frac{8}{7}$ Knoten

$v = s : t$
(x: Geschwindigkeit des Stromes)
stromabwärts:
$8 + x = s / 3 \Leftrightarrow s = 24 + 3x$
stromaufwärts:
$8 - x = s / 4 \Leftrightarrow s = 32 - 4x$
$\Leftrightarrow 24 + 3x = 32 - 4x$

O100 **a)** Begegnung nach 3.45 h = 3 h 27 min.
b) Ort: 2972.5 km von London

$t = \frac{s}{v} = \frac{6250 - 2 \cdot 950}{950 + 2050}$

O2 Neue Termumformungen

Produkte von Summen – binomische Formeln

O101 **a)** $(a + b) \cdot k = ak + bk = a(c + d) + b(c + d)$
$= ac + ad + bc + bd$
b) Multipliziere jeden Summanden der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe und addiere die Produkte.
c)

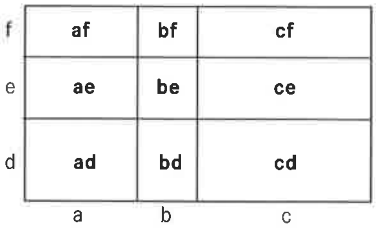
	a	b
d	ad	bd
c	ac	bc

O102 **a)** $x^2 + 3x + 2$ **b)** $x^2 + 19x + 90$
c) $x^2 + 2.5x + 1$ **d)** $14x^2 + 29x + 12$

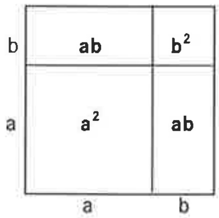
O103 **a)** $18x^2 + 33x + 14$ **b)** $a^2 + 6.25ab + 1.5b^2$
c) $x^3 + 7x^2 + x + 7$ **d)** $x + 9\sqrt{x} + 20$

O104 **a)** $144a^2bc + 12ab^2 + 12ac^2 + bc$
b) $2\lambda^2 + 5\lambda\mu + 2\mu^2$
c) $u^2 + 1\,000\,000.001uv + 1000v^2$
d) $8a^2 + 14ab + 3b^2$

O105 $ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf$



O106 **a)**



b) $a^2 + 2ab + b^2$
c) Zuwachs: $2ab + b^2 = 205\text{ cm}^2$
d) $(2xy + y^2)\text{ cm}^2$

O107 **a)** $x^2 + 2xz + z^2$ **b)** $y^2 + 2yz + z^2$
c) $4a^2 + 4ab + b^2$ **d)** $4a^2 + 8ab + 4b^2$

O108 **a)** $m^2 + 2mx + x^2$ **b)** $4x^2 + 12xy + 9y^2$
c) $64a^2 + 64ab + 16b^2$ **d)** $169u^2 + 286uv + 121v^2$

O109 **a)** $x^2 + 2x + 1$ **b)** $x^2 + 20x + 100$
c) $x^2 + x + 0.25$ **d)** $16x^2 + 0.8x + 0.01$

O110 **a)** $4y^2 + y + \frac{1}{16}$ **b)** $9a^2 + 2a + \frac{1}{9}$
c) $\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} + \frac{9}{4}$ **d)** $0.04y^2 + 8y + 400$

O111 144 und 145 $(n + 1)^2 - n^2 = 289 = 2n + 1$

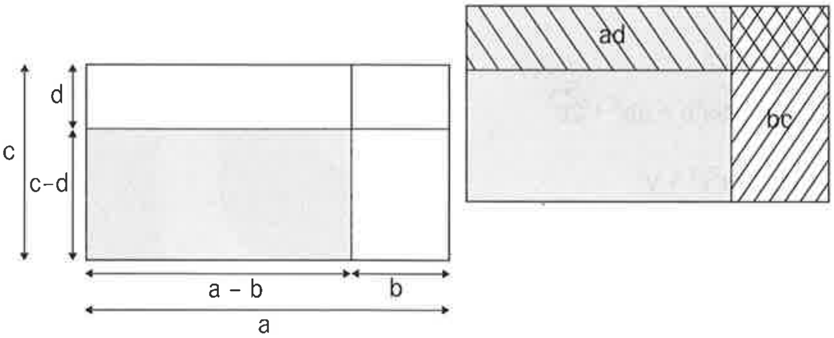
O112 **a)** $ax - bx + ay - by$ **b)** $2a^2 + 6a - 20$
c) $18x^2 + 3x - 28$ **d)** $12q^2 - 23q - 2$

O113 **a)** $49a^2 - 9b^2$ **b)** $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8}$
c) $3x^2 - 49.85x - 2.5$ **d)** $x^3 - 2x^2 - x + 2$

O114 **a)** $ac - ad - bc + bd$

b) $(a - b)(c - d) = (a - b)c - ad + bd$
$= ac - bc - ad + bd$

bd wird doppelt abgeschnitten und muss deshalb wieder addiert werden.



O115 **a)** $ax - bx - ay + by$ **b)** $x^2 - 7x + 12$
c) $80 - 18x + x^2$ **d)** $2 - 3x + x^2$

O116 **a)** $-x^2 + 10x - 25$ **b)** $10u^2 - 27u + 18$
c) $x^2 - xz - xy + yz$ **d)** $sx - \frac{1}{2} - 2tx + t^2$

O117 **a)** $x^2 - 2xy + y^2$ **b)** $x^2 - 2xz + z^2$
c) $y^2 - 4yz + 4$ **d)** $4a^2 - 8ab + 4b^2$

O118 **a)** $4x^2 - 12xy + 9y^2$ **b)** $x^2 - 8x + 16$
c) $x^2 - x + 0.25$ **d)** $4x^2 - x + \frac{1}{16}$

O119 **a)** $= a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$
b) ... die Differenz der Quadrate der zwei Grössen.
c) –

O120 **a)** $x^2 - y^2$ **b)** $4x^2 - a^2$
c) $x^2 - \frac{1}{4}$ **d)** $x^4 - y^4$

O121 **a)** $a^2 - b^2$ **b)** $y^2 - 4x^2$
c) $25a^{12} - 36a^{10}$ **d)** $x^{-4} - y^{-6} = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^6}$

O122 **a)** $25b^8 - 144a^6$ **b)** $16a^2 - 169b^2$
c) $\frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{49} = \frac{40}{441}x^2$

O123 **a)** $225x^2 - 0.25$ **b)** $0.49a^4 - 1.44b^2$
c) $0.36n^2 - 1.21m^2$

O124 Von 20. $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1 = 399$

O125 **a)** $21.16x^2 - 10.24y^2$ **b)** $\frac{a^2}{g} - \frac{0.49}{16}b^2$
c) $x^2 - 2$

O126 **a)** $3a^2 - \frac{b^2}{3}$ **b)** $2s - 3s = -s$ **c)** $a - b$

O127 **a)** $(u + v)^2$ **b)** $(m + y)(m - y)$
c) $(a + x)^2$ **d)** $(e - f)^2$

O128 **a)** $(x - 6)^2$ **b)** $(2x - 3y)^2$
c) $(a^3 + b^7)(a^3 - b^7)$ **d)** $\left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p} - \sqrt{q}\right)$

O129
a) $ax + ay + bx + by + cx + cy$
b) $ax - ay + bx - by - cx + cy$
c) $x^3 - x^2y^2 + 2x^2y - 2xy^3 + xy^2 - y^3$

O130
a) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
b) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$
c) $4x^2 + 12xy + 4xz + 9y^2 + 6yz + z^2$

O131
a) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$ **b)** $2a^3 - 5a^2b + ab^2 + 2b^3$

O132
a) $-2a^2 - 6a + 4$ **b)** $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

O133
a) $x^4 - 16$ **b)** $x^4 + 16$

O134
a) $9 + 6x^2 + x^4 = (3 + x^2)^2$
b) $9x^2 - 18xy + 9y^2 = 9(x - y)^2$
c) $-25 + x^4 = (-5 + x^2)(5 + x^2)$

O135
a) $16x^2y^4 + 16xy^4 + 4y^4 = (4xy^2 + 2y^2)^2$
b) $16x^4y^4 + 16x^2y^4 + 4y^4 = (4x^2y^2 + 2y^2)^2$
c) $16x^2y^4 + 4y^4 + \frac{y^4}{4x^2} = \left(4xy^2 + \frac{y^2}{2x}\right)^2$

O136
a) Wähle beispielsweise $m = 5$ und $n = 2$, so erhält man $x = 21$ und $y = 20$ und $z = 29$.
Tatsächlich gilt: $21^2 + 20^2 = 29^2$
b) $x^2 + y^2 = (m^4 - 2m^2n^2 + n^4) + (4m^2n^2)$
$= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = z^2$

a) Wähle beispielsweise
$m = 5$ und $n = 2$.
b) $x^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4$
$y^2 = 4m^2n^2$
$z^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4$

Binomix

O137
a) $36c^2 - 16d^2$ **b)** $289m^2 - 34m + 1$
c) $a^6 - 1$

O138
a) $u^2v^4 + 4uv^4 + 4v^4$ **b)** $x^4y^2 - z^2$
c) $x^4y^2 - 12x^2y + 36$

O139
a) $4ab$
b) $-4xy$
c) 0

a) $(a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$
b) $(x^2 - 2xy + y^2) - (x^2 + 2xy + y^2)$
c) $(9x^2 - 30x + 25) - (25 - 30x + 9x^2)$

O140
a) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}y^2$ **b)** $\frac{9}{16}m^2 - 4n^2$
c) $\frac{9}{16}m^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{9m^2}$

O141
a) $24m - 18$
b) $-18x^2 + 24x - 48xy - 36y^2 - 72$

a) $(16m^2 - 9) - (16m^2 - 24m + 9)$
b) $-16x^2 - 48xy - 36y^2 - 2x^2 + 24x - 72$

O142
a) $z^2 - 5z - 7$
b) $41z^2 - 80z + 55$

a) $(4z^2 - 9) - (3z^2 + 6z - z - 2)$
b) $(25z^2 - 80z + 64) + (16z^2 - 9)$

O143
a) $16u^4v^4$

b) $9a^2 - 13a + 12$

a) $((u^4 - 2u^2v^2 + v^4) - (u^4 - 2u^2v^2 + v^4))$
$= (4u^2v^2)^2$
b) $(4a^2 - 12a + 9) - (4a^2 + 8a - a - 2)$
$+ (9a^2 + 6a + 1)$

O144 **a)** $-\frac{8}{3}x^2y^2$

b) $1 + 2w - 2w^3 - w^4$

a) $\left(\frac{4}{9}x^4 - \frac{4}{3}x^2y^2 + y^4\right) -$
$\left(\frac{4}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2y^2 + y^4\right)$

b) $(1 + 2w + w^2)(1 - w^2)$
$= 1 - w^2 + 2w - 2w^3 + w^2 - w^4$

Kontrollaufgaben

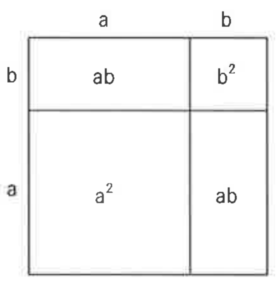
O145
a) $10x^2 + xy - 21y^2$
b) $ab - ac + b^2 - bc$
c) $x^2 + x - 56$

O146
a) $-a^5 - 4a^3 + 7a^2 + 28$
b) $\frac{a^2}{6} \overset{-}{\cancel{+}} \frac{ab}{12} - \frac{b^2}{4}$
c) $4.002x^2 - 10.452x - 4.08$

O147
a) $x^2 + 6x + 9$
b) $169m^2 - 156mn + 36n^2$
c) $0.16x^2 - 1.96y^2$

O148
a) $\frac{x^2}{9} + \frac{xy}{6} + \frac{y^2}{16}$
b) $a^2 - 5x^2$
c) $z^6 - \frac{0.09x^2}{y}$

O149



O150 n = 25

$(n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 100$

Das Pascalsche Dreieck

O151
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

O152 $(6 + 2)^3 = 6^3 + 3 \cdot 2 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 \cdot 2^2 + 2^3$

O153
$(a + b)^4 = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) =$
$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

O154
$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

O155 $(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a^1 + b^1 = a + b$

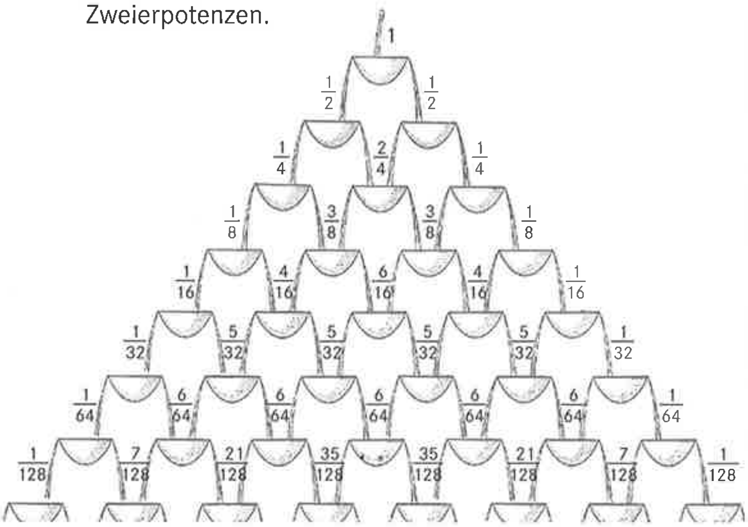
O156 Die Zahlen im Innern des Pascalschen Zahlendreiecks lassen sich aus der Summe der beiden unmittelbar darüberliegenden Zahlen bilden.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

O157 $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

O158 In den Zählern (der ungekürzten Brüche) stehen gerade die Zahlen im Pascalschen Dreieck, in den Nennern (von oben nach unten) wachsende Zweierpotenzen.



O159 **a)** ① $\frac{20!}{18! \cdot (20-18)!} = \frac{20!}{18! \cdot 2!} = \frac{19 \cdot 20}{2 \cdot 1} = 190$ (wie Beispiel wegen Symmetrie)

② $\frac{15!}{3! \cdot (15-3)!} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 455$

③ $\frac{12!}{6! \cdot (12-6)!} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 924$

④ $\frac{18!}{6! \cdot (18-6)!} = \frac{18!}{6! \cdot 12!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 18\,564$

b) –

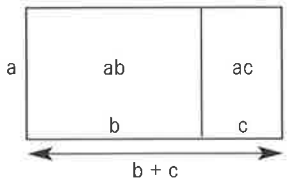
c) $(n+1)^{10} = n^{10} + 10n^9 + 45n^8 + 120n^7 + 210n^6 + 252n^5 + 210n^4 + 120n^3 + 45n^2 + 10n + 1$

d) $(p-2q)^7 = p^7 - 7p^6 \cdot 2q + 21p^5 \cdot 2^2q^2 - 35p^4 \cdot 2^3q^3 + 35p^3 \cdot 2^4q^4 - 21p^2 \cdot 2^5q^5 + 7p \cdot 2^6q^6 - 1 \cdot 2^7q^7$

$= p^7 - 14p^6q + 84p^5q^2 - 280p^4q^3 + 560p^3q^4 - 672p^2q^5 + 448pq^6 - 128q^7$

Ausklammern

0160 **a)** $a(b + c) = ab + ac$



b) $ab + ac = a(b + c)$

0161 **a)** $x(y + z)$ **b)** $a(b + c + d)$
c) $a(x - y)$ **d)** $x(a - b + c)$

0162 **a)** $x(x + 1)$ **b)** $a(a^2 - 5)$
c) $x\left(\frac{2}{3}x + 3\right)$ **d)** $\frac{1}{2}(x + y)$

0163 **a)** $x(x^2 - x + 2)$ **b)** $5(x - 3y)$
c) $8b(2a^2 - b)$ **d)** $17(2a - 3b + 5c)$

a) $(17 + 13) \cdot 22 = 30 \cdot 22 = \ldots$

0164 **a)** 660 **b)** 700 **c)** 100 **d)** 900 **e)** $\frac{1}{12}$ **f)** 1

0165 **a)** $3x^2y(2xy - 1)$ **b)** $2ab(3ab + 2b - 5a)$
c) $mx^2(1 - x^2 + mx)$ **d)** $6rs^2(2r^2 - 3 - 6rs)$

0166 **a)** $x^2y^4z^3(yz - 2xz + 3y^2)$ **b)** $9a^4bc^8(6ab^2 - 111)$
c) $10x^2(2x^4 + 3x - 4)$ **d)** $11a^2b^2(3 + 7ab - 9a^3b^3)$

0167 **a)** $7xy(14x + 3y + 18xy)$ **b)** $3u^{33}(11 + 1111u^{3300})$
c) $4v(111v^{43} - 1111v^3 - 11)$ **d)** $10^7x^7(10x - 1)$

0168 **a)** $a^2(1 + b + c - d)$ **b)** nichts auszuklammern
c) $25x(5x^{24} + 1 + 25x^{624})$ **d)** 128 blz (i − 8o)

0169 $c = \frac{0 - 2ab}{2(a + b)} \approx 4.77$ cm

$0 = 2(ab + bc + ac) \Rightarrow$
$0 - 2ab = c(a + b)$

0170 **a)** $a\left(1 + \frac{1}{a}\right)$ **b)** $a\left(\frac{x}{a} - a\right)$
c) $a\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{a}\right)$ **d)** $a\left(a^2 + 3ab + 3b^2 + \frac{b^3}{a}\right)$

0171 **a)** $\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{2}b\right)$ **b)** $\frac{1}{2}(2x + 2y)$
c) $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\right)$ **d)** $\frac{1}{2}(2p - 4q + 1)$

0172 **a)** $-1(-2a + 3b)$ **b)** $-1(u + v - w)$ **c)** $-1(1 - x)$
d) $-1(-(-a - b)^2) = -1(-(a + b)^2)$

0173 **a)** $-\frac{1}{3}(1 + 2u)$ **b)** $-\frac{1}{3}(-3x + 1)$
c) $-\frac{1}{3}\left(9 - \frac{1}{3}\right)$ **d)** $-\frac{1}{3}(-3a - 3b)$

0174 **a)** richtig **b)** falsch $[13x^2y(1 + 5y - 7xy)]$
c) falsch $[x(a + b + 1)]$
d) falsch $[2a(a + 3b + 4b^2)]$

0175 **a)** $(a + 5)(b - c)$ **b)** $3a(x - y)[2(x - y) + 1]$ **d)** $= 5a(3x - y) - 1(3x - y)$
c) $(x^2 - 1)(3a^2 + 1)$ **d)** $(3x - y)(5a - 1)$

Faktorisieren durch zweimaliges teilweises Ausklammern

0176 **a)** $2a^2(8a - 7) - 2b(2 - 3b)$
b) $4rs(1 + s) + 6v(u^2 - 3v)$
c) $\frac{a^2}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{b}{5}\left(b - \frac{1}{2}\right)$
d) $0.25x(3x + 2) - 1.25y(y - 2)$

0177 $= a^2 + (2a + b)b + 2(a + b)c + c^2 \overset{TU}{=} a^2 + (2a + b)b + (2a + 2b + c)c$ [****]

$(a + b + c + d)^2 \overset{\text{Assoziatität}}{=} [(a + b + c) + d]^2 \overset{[**]}{=} (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2 \overset{[****]}{=}$

$a^2 + (2a + b)b + (2a + 2b + c)c + 2(a + b + c)d + d^2 =$

$\overset{TU}{=} a^2 + (2a + b)b + (2a + 2b + c)c + (2a + 2b + 2c + d)d$

$(a + b + c + d + e)^2 = a^2 + (2a + b)b + (2a + 2b + c)c + (2a + 2b + 2c + d)d + (2a + 2b + 2c + 2d + e)e$

0178 **a)** $a(a - c) + b(a - c) = (a - c)(a + b)$
b) $x(x - a) + 5(x - a) = (x - a)(x + 5)$
c) $m(x - a) + n(x - a) = (x - a)(m + n)$
d) $x(5a - 3) + (5a - 3) = (5a - 3)(x + 1)$

0179 **a)** $m(x - y) - n(x - y) = (x - y)(m - n)$
b) $3(2a - 3) - x(2a - 3) = (2a - 3)(3 - x)$
c) $a(5 + b) - b(5 + b) = (5 + b)(a - b)$
d) $7(a + b + c) - x(a + b + c) = (a + b + c)(7 - x)$

Faktorisieren mit den binomischen Formeln

0180 **a)** $(7a + 3b)^2$ **b)** $(y + 1)^2$ **c)** $(6x + 11)^2$

0181 **a)** $(x + 3)^2$ **b)** $(2x - 5y)^2$ **c)** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

0182 **a)** $(x - 5)^2$ **b)** $(6x - 5y)^2$ **c)** $(3a - 8)^2$

0183 **a)** $(2g + h)^2$ **b)** $\left(\frac{a}{11} - \frac{b}{10}\right)^2$ **c)** $(1000 - 1)^2$

0184 **a)** $\left(u - \frac{v}{2}\right)^2$ **b)** $(0.2x - 0.3y)^2$
c) $(-2x + 3y)(2x - 3y)$

0185 **a)** $(a + x)(a - x)$ **b)** $(u + 5)(u - 5)$
c) $(2x + 3y)(2x - 3y)$

0186 **a)** $\left(\frac{a}{2} + \frac{c}{7}\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{c}{7}\right)$ **b)** $(1.2x + 0.7y)(1.2x - 0.7y)$
c) $\left(a + \sqrt{2}\right)\left(a - \sqrt{2}\right)$

0187 **a)** $(6 - n)(6 + n)$ **b)** $\left(x\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)\left(x\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)$
c) $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$

0188 **a)** $(u^{200} + 20)(u^{200} - 20)$ **b)** $(z^n + 1)(z^n - 1)$
c) $(a^{2n} + b^n)(a^{2n} - b^n)$

0189 **a)** $(x + 4y)^2$ **b)** nur durch Ausklammern: $4(4x^2 + 2xy + y^2)$
c) $(3x - 4y)^2$

0190 **a)** nicht faktorisierbar **b)** $(1 - 2mn)^2$
c) $(z^2 - 1)^2$

0191 **a)** $(5 + x)(5 - x)$ **b)** und **c)** nicht faktorisierbar

0192 **a)** $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y\right)^2$ **b)** - **c)** $\left(\frac{1}{5}z + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{5}z - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

0193 **a)** $3^2 \cdot (3a - 2b + 4c)$ **b)** $rs^2(st^2 + 1)$
c) $3(a - 2b)(c - d)$

c) $(3a - 6b)(c - d)$ lässt sich noch weiter faktorisieren.

0194 **a)** $2(\lambda - 5)(\lambda + 11)$ **b)** nicht faktoriserbar
c) $(s - r)(\pi - 1) = (r - s)(1 - \pi)$

0195 **a)** $(13p^2 - 11q)^2$ **b)** $3(c^2 - d^2)^2$
c) $\left(\frac{15}{17}a^3 + \frac{6}{100}b\right)\left(\frac{15}{17}a^3 - \frac{6}{100}b\right)$

0196 **a)** $\frac{b + c}{b + d}$ **b)** $a + b$ **c)** $\frac{a + b}{a}\left(= 1 + \frac{b}{a}\right)$

0197 **a)** $\frac{1}{a}$ **b)** $3a$ **c)** $\frac{1}{9(x + 3y)}$

0198 **a)** $\frac{1}{a - x}$ **b)** $a + 4$ **c)** $\frac{x - y}{5}$

0199 **a)** $\frac{a - b}{a + b}$ **b)** $\frac{1}{y(x - z)}$ **c)** $5x^3 - ab$

0200 **a)** $a^2 - b^2$ **b)** nicht kürzbar **c)** $(a + b)(a^2 + b^2)$

0201 **a)** $\frac{6m + 7n}{6m - 7n}$ **b)** $\frac{a + d}{3(b + d)}$ **c)** $\frac{1}{3x - 9y}$

0202 **a)** 1) $\frac{n^2 - 1}{n + 1} = n - 1$ (Nachfolger der natürlichen Zahl)
2) $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$ (Nachfolger des Quadrats)
3) $\frac{n^2 - 1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2}$ (Nachfolger des erwähnten Vorgängers)

Die Mehrdeutigkeit entsteht, weil nicht klar ist, wessen Nachfolger gemeint ist.

b) nur Variante 1)
c) Varianten 2) und 3)

0203 **a)** $2(3a + 1)^2$ **b)** $a(2x + 3y)^2$
c) $3a(a - 6)^2$

0204 **a)** $3\left(x - \frac{y}{2}\right)^2$ **b)** $2(6u + 9v^2)(6u - 9v^2)$
c) $7(ab + cd)(ab - cd)$

0205 **a)** $20^2 - 1^2 = 399$ **b)** $30^2 - 2^2 = 896$
c) $20^2 - 4^2 = 384$ **d)** $80^2 - 1^2 = 6399$
e) $100^2 - 1^2 = 9999$ **f)** $60^2 - 5^2 = 3575$

a) $(20 - 1)(20 + 1) = \ldots$
b) $(30 - 2)(30 + 2) = \ldots$

Oje!

Ja, das wäre das Ende der Mathematik, wenn plötzlich einer käme und beweisen würde, dass 4 = 5 ist. Durch Subtraktion von 1 würde man dann auch zeigen, dass 3 = 4 ist und überhaupt, dass alle Zahlen einander gleich sind ...
Aber bei der Umformung ist eine (getarnte) Division durch 0 versteckt, die nicht zulässig ist und diesen Effekt hervorruft. Man teilt ja durch $(x - y)$ und für $x = 1$ und $y = 1$ gibt das 0.
(Uff! Die Mathematik ist gerettet!)

Wenn $x = 1$ und $y = 1$ ist, dann ist klar, dass $2(x^2 - y^2)$ null gibt.
Weil $(x - y)$ dann auch 0 gibt, ist also $2(x^2 - y^2) = 5(x - y)$ (=0).
Dividiere jetzt beide Seiten dieser Gleichung durch $(x - y)$. Man erhält dann $2(x + y) = 5$.
Aber $(x + y) = (1 + 1) = 2$.
Also ist $2 \cdot 2 = 5$.
(Das ist das Ende.)

Zerlegen in Linearfaktoren

O206 **a)** $(x + 2)(x + 1)$ **b)** $(x - 3)(x - 4)$ **c)** $(x - 4)(x + 2)$

O207 **a)** $(x - 4)(x - 2)$ **b)** $(x + 5)(x - 3)$ **c)** $(x - 5)(x + 6)$

O208 **a)** $(x - 7)(x + 3)$ **b)** $(x - 12)(x - 8)$ **c)** $(x - 10)(x + 9)$

O209 **a)** $(x - 18)(x - 8)$ **b)** nicht zerlegbar
c) $(x + 7\,998\,511)(x - 1)$

O210 **a)** $36^2 - 4 \cdot 99 = 900 \Rightarrow x - y = 30$
und mit $x + y = 36$ erhält man
$2x = 66$ und daraus $x = 33$ und $y = 3$.
b) $x - y = 49 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 49^2$.
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x - y)^2 + 4xy$
$= 49^2 + 4 \cdot 7956 = 34\,225$.
$\Rightarrow x + y = \sqrt{34\,225} = 185$.
Daraus erhält man $x = 117$ und $y = 68$.

O211 **1.** $r_3 = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{pq}}{2} = \frac{\sqrt{2r_1 \cdot 2r_2}}{2} = \frac{\cancel{2}\sqrt{r_1r_2}}{\cancel{2}} = \sqrt{r_1r_2}$

Also: $A_K = r_3^2 \cdot \pi = (\sqrt{r_1r_2})^2 \cdot \pi = \underline{\underline{r_1r_2\pi}}$

2. $A_s = (r_1 + r_2)^2 \cdot \frac{\pi}{2} - r_1^2 \cdot \frac{\pi}{2} - r_2^2 \cdot \frac{\pi}{2}$

3. $A_s = \frac{\pi}{2}\left[(r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2\right] = \frac{\pi}{2}\left[r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2 - r_1^2 - r_2^2\right]$

$A_s = \frac{\pi}{2} \cdot 2r_1r_2 = \underline{\underline{r_1r_2\pi}}$

4. $A_K = r_1r_2\pi = A_s$ w. z. b. w.

O212 1. Fall: $x = 0$ / $y \neq 0$
2. Fall: $x \neq 0$ / $y = 0$
3. Fall: $x = y = 0$

O213 **a)** richtig **b)** falsch; $L = \{0, 8\}$

O214 **a)** falsch, 1/3 ist keine Lösung.
b) falsch; $L = \{-\sqrt{2}, 3.8\}$

O215 **a)** falsch; $L = \{-1, 1\}$ **b)** richtig

O216 **a)** nein **b)** $\{-3\}$ ist Lösung
c) 5 ist Lösung **d)** $L = \{-3, 5\}$
e) Die Lösungen sind die Gegenzahlen zu a und b in $(x + a)(x + b) = (x + 3)(x - 5)$.

O217 **a)** $L = \{8, 9\}$ **b)** $L = \{8, -9\}$ **c)** $L = \{-8, 9\}$

O218 **a)** $L = \{-8, -9\}$ **b)** $L = \{-2, 5\}$ **c)** $L = \{13, \frac{5}{3}\}$

O219 **a)** $(x + 4)(x + 5)$; $L = \{-4, -5\}$
b) $(x + 6)(x + 7)$; $L = \{-6, -7\}$

O220 **a)** $(x + 3)(x - 2)$; $L = \{-3, 2\}$
b) $(x + 2)(x - 3)$; $L = \{-2, 3\}$

O221 **a)** $(x + 8)(x - 7)$; $L = \{-8, 7\}$
b) $(x + 6)(x + 6)$; $L = \{-6\}$

O222 **a)** $x(x + 5)$; $L = \{-5, 0\}$
b) $(x + 4)(x - 4)$; $L = \{-4, 4\}$

O223 **a)** $x^2 - 9 = 0$; $(x + 3)(x - 3)$; $L = \{-3, 3\}$
b) $x^2 + 4x - 21 = 0$; $(x + 7)(x - 3)$; $L = \{-7, 3\}$

Gleichung zuerst durch
a) 3
b) durch 2 teilen.

O224 **a)** $x^2 + x - 20 = 0$; $(x + 5)(x - 4)$; $L = \{-5, 4\}$
b) $x^2 - 2x - 15 = 0$; $(x + 3)(x - 5)$; $L = \{-3, 5\}$

Gleichung zuerst durch
a) 5
b) durch 7 teilen.

O225 **a)** $(2x + 6)(x + 5)$; $L = \{-3, -5\}$
b) $(3x + 5)(x + 1)$; $L = \{-\frac{5}{3}, -1\}$

O226 **a)** $(2x + 5)(6x - 5)$; $L = \{-\frac{5}{2}, \frac{5}{6}\}$
b) $(7x + 100)(x - 1)$; $L = \{-\frac{100}{7}, 1\}$

O227 **a)** $(12x - 12)(x - 2) = (6x - 6)(2x - 4) = (4x - 4)(3x - 6) = (x - 1)(12x - 24)$; $L = \{1, 2\}$
b) $(5x + 10)(x + 3) = (x + 2)(5x + 15)$; $L = \{-3, -2\}$

a) Du könntest auch die Gleichung zuerst durch 12 dividieren, dann gibt es nur noch eine Möglichkeit, den Term in zwei Faktoren zu zerlegen.
b) Gleichung durch 5 dividieren

O228 **a)** $x^2 - 121 = (x + 11)(x - 11)$; $L = \{-11, 11\}$
b) $(7x + 2)(7x + 2)$; $L = \{-\frac{2}{7}\}$

O229 **a)** $(5x - 1)(5x - 1)$; $L = \{\frac{1}{5}\}$
b) $(2x - 1)(x + 2)$; $L = \{-2, \frac{1}{2}\}$

O230 **a)** $(x-9)(x-2)$; $L = \{2, 9\}$

b) $(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})$; $L = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$

O231 **a)** $x(13+x)$; $L = \{0, -13\}$
b) $y^2 - y = 0$; $y(y-1) = 0$; $L = \{0, 1\}$

b) Gleichung zuerst durch 5 teilen.

O232 **a)** $z(2z+3) = 0$; $L = \{0, -1.5\}$
b) $10x(x+10) = 0$; $L = \{0, -10\}$

O233 **a)** $x(7x+5)$; $L = \{0, -\frac{5}{7}\}$

b) $x(2x-1.2)$; $L = \{0, 0.6\}$

O234 **a)** $x(x+\frac{3}{4})$; $L = \{0, -\frac{3}{4}\}$

b) $x(10x-105)$; $L = \{0, 10.5\}$

O235 Mindestens einer der Faktoren r, s oder t muss 0 sein.

O236 **a)** $L = \{-12, -1, 2)$ **b)** $L = \{0, 1, 5\}$

O237 **a)** $L = \{-10, -2, 5, 8\}$

b) $L = \{-\frac{3}{7}, -\frac{15}{11}, \frac{5}{9}\}$

O238 $L = \{-a, b, -\frac{c}{2}\}$

O239 0

Wie lautet der drittletzte Faktor dieses Produkts mit 26 Faktoren?

O240 Ausführliche Lösungen als Zusatzmaterial O/4

a) $L = \{2, 4\}$ **b)** $L = \{-9, 9\}$
c) siehe oben **d)** $L = \{\,\}$
e) $L = \{\,\}$ **f)** ja, wenn $b^2 - 4ac = 0$
g) $L = \{-3\}$ **h)** siehe Zusatzmaterial

Kontrollaufgaben

O241 **a)** $6a^3(2 - 3a^2 + 9a)$ **b)** $2a^2bcd^{10}(a^3b^2c^3d^2 - 4)$
c) $or(hst + dy + am)$ **d)** $111x^{111}(3x^{222} + 1 - 10x^{555})$

O242 **a)** $-1(-u + v + w)$ **b)** $\frac{1}{2}\left(10a + 7b + \frac{1}{2}c\right)$

O243 **a)** $(5a-3)(x+1)$ **b)** $(a+b)(a+c)$
c) $(4a+5b)(2x-3y)$ **d)** $4(x+y)(3a-2b)$

O244 **a)** $(p+q)^2$ **b)** $(2x-8y)(2x+8y)$
c) $(x+1)^2$ **d)** $(10u-1)(10u+1)$

O245 **a)** $(a+12b)^2$ **b)** $(a-2b)(a+2b)$

c) $\left(\frac{a}{2} - \frac{3b}{4}\right)\left(\frac{a}{2} + \frac{3b}{4}\right)$ **d)** $\left(a - \frac{b}{2}\right)^2$

O246 **a)** $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ **b)** $(\sqrt{u}+\sqrt{v})^2$

c) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ **d)** $(\sqrt{e}-\sqrt{f})(\sqrt{e}+\sqrt{f})$

O247 **a)** $\frac{a}{2}$ **b)** $\frac{y(y-3x)}{5xz^4}$

c) e **d)** $\frac{3}{2(1-3x)}$

a) $=\frac{a(a+b)}{2(a+b)}$

b) $=\frac{5x^3y^6z^4(y-3x)}{25x^4y^5z^8}$

c) $=\frac{e(y+x-z+1)}{1+x+y-z}$

d) $=\frac{3(a-2)}{2(a-2)(1-3x)}$

O248 **a)** $\frac{u+v}{u-v}$ **b)** $\frac{3ab+2b-5a}{3ab+2b+5a}$

c) $\frac{x-y}{a-b}$ **d)** $\frac{x+10}{x+1}$

a) $=\frac{(u+v)(u+v)}{(u-v)(u+v)}$

b) $=\frac{2ab(3ab+2b-5a)}{2ab(3ab+2b+5a)}$

c) $=\frac{(a+b)(x-y)}{(a-b)(a+b)}$

d) $=\frac{(x-1)(x+10)}{(x-1)(x+1)}$

O249 **a)** $L=\{\pm 100\}$ **b)** $L=\{0, 1\}$
c) $L=\{-2, 1\}$ **d)** $L=\{-5, 0, 1, \sqrt{2}\}$

O250 **a)** $L=\{0, 10\}$ **b)** $L=\{-5, 10\}$
c) $L=\{1, 12\}$ **d)** $L=\{\pm 7\}$

a) $10(x-10)=0$
b) $(x+5)(x-10)=0$
c) $(x-12)(x-1)$
d) $2x^2=2\cdot 49$

Polynomdivision (Summe durch Summe)

O251 **a)** $3x+8$ **b)** $2a+6$

O252 **a)** $5y+6$ **b)** $4m-3$

O253 **a)** $x+3$ **b)** u^2+u+3

Zuerst nach fallenden Exponenten ordnen

O254 **a)** z^2-3z+2 **b)** $-x+6$

Zuerst nach fallenden Exponenten ordnen

O255 **a)** b^3+2b^2+4b+8 **b)** $x^3-x^2+x-1+\frac{2}{x+1}$

O256 **a)** $x+4+\frac{1}{x+1}$ **b)** $x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{2}{x+1}$

O257 **a)** $5a^2-3ab+4b^2$ **b)** $3xy-y^2$

O258 **a)** $x-3+\frac{2}{x^2-2x+4}$ **b)** a^2+ab+b^2

O259 **a)** $2b^2+2b+5$ **b)** $x^3+5x^2+22x+108+\frac{543}{x-5}$

O3 Vom Verhältnis zur Proportion

Klare Verhältnisse

O260 –

O261 **a)** 1000 : 1 **b)** 20 : 1 **c)** 100 : 1
d) 1 : 40 **e)** 1 : 500 **f)** 1200 : 1

O262 **a)** 1 : 720 **b)** 1 : 250 000 **c)** 1 : 200
d) 1 : 1 **e)** 1 : 5 **f)** 1 : 90

O263 **a)** $\frac{5}{8} = 0.625$ **b)** $\frac{3}{2} = 1.5$
c) $\frac{3}{2} = 1.5$ **d)** $\frac{4}{5} = 0.8$

O264 **a)** $\frac{42}{13} = 3.230...$ **b)** $\frac{1}{400} = 0.0025$
c) $\frac{4}{9} = 0.444...$ **d)** $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1.414...$

O265 **a)** $\frac{7}{3} = 2.333...$ **b)** $\frac{1}{3600} = 0.000\,277...$
c) $\frac{100\,000}{1} = 100\,000$ **d)** $\frac{1}{100\,000} = 0.000\,01$

O266 **a)** 6 : 1 **b)** 3 : 4 **c)** 9 : 5 **d)** 2 : 1

O267 **a)** 1 : 3 **b)** 2 : 1 **c)** 5 : 2 **d)** 100 : 1

O268 **a)** 1 : 5 **b)** 2 : 1 **c)** 8 : 7 **d)** 2000 : 1

O269 **a)** 3 : 5 **b)** 3 : 4 **c)** 3 : 1

a) ≈ 150 : 250 **b)** ≈ 360 : 480
c) ≈ 54 : 18

O270 **a)** 1 : 3 **b)** 50 000 : 1 **c)** 1 : 8

a) ≈ 2000 : 6000
b) ≈ 2500 : 0.05 **c)** ≈ 11 : 88

O271 **a)** 1 : 2 **b)** 1 : 400 **c)** 2 : 1

a) ≈ 10 000 : 20 000
b) ≈ 0.0125 : 5
c) ≈ $\sqrt{8} : \sqrt{2}$ (siehe O268 b)

O272
a) 71% zu 29% ≈ 7 : 3
b) 9 970 610 : 41'293 ≈ 240 : 1
c) 120 000 : 0.002 = 60 000 000 : 1
d) Ganzkanton (GR : ZG): 7106 : 238 ≈ 30 : 1,
Halbkanton (GR : BS): 7106 : 37 ≈ 200 : 1

O273 12.8 cm

O274 13.5 cm x 23.4 cm

Der Umfang besteht aus
2 · (15 + 26) Teile.

O275 Susi: Fr. 218.39, Paul: Fr. 281.61.

500 Fr. im Verhältnis der Löhne, also 760 : 980, aufteilen.

0276 14 m und 22.75 m

8.75 m sind 5 Teile.

0277 Hansjörg 900 Fr. und Annette 600 Fr.

1500 Fr. im Verhältnis 12 : 8 aufteilen.

0278 Verhältnis 2 : 1 : 0.5 = 4 : 2 : 1

Anteile: Sohn 2x, Mutter x, Tochter $^x/_2$

Aus der Geometrie

0279 Die verlangten Verhältnisse betragen 2 : 3. Üblicherweise wird dieser Verhalt so formuliert: In einem beliebigen Dreieck teilt der Schwerpunkt jede Schwerlinie im Verhältnis 1 : 2.

0280 Wo immer auch P im Innern von ABC liegt,

stets ergibt $\frac{a_1 \cdot b_1 \cdot c_1}{a_2 \cdot b_2 \cdot c_2} \approx 1$,

exakte Zeichnung und Messung vorausgesetzt.

0281 Die Behauptungen in a) und b) scheinen beide zu stimmen.

0282 Das Verhältnis ist das gleiche. In Worten: Eine Winkelhalbierende eines beliebigen Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

0283
- **a)** Die Strecke AB kann beispielsweise mit s und der Teil AG mit x bezeichnet werden.
- **b)** $(s - x) : x = x : s$
- **c)** –
- **d)** Gemäss Konstruktion beträgt die Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks $\frac{\sqrt{5}}{2}s$ und somit gilt für das grössere Teilstück

  $$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}s \approx 0.618s$$

- **e)** Prüfe die Verhältnisgleichung

  $$\left(s - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}s\right) : \frac{\sqrt{5} - 1}{2}s = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}s : s$$ Sie gilt.

Die Proportion oder Verhältnisgleichung

0284
- **a)** $6 : 2 = 54 : 18$
- **b)** $222 : 74 = 39 : 13$
- **c)** $34 : 6 = 8.5 : 1.5$

0285
- **a)** $0.5 : 0.1 = \frac{1}{4} : \frac{1}{20}$
- **b)** $16 : 64 = \frac{a}{2} : 2a \; (a \neq 0)$
- **c)** $10^3 : 10^4 = \frac{1}{8} : \frac{5}{4}$

O286 **a)** $99 : 9 = 1001 : 91$ **b)** $4.5 : 1 = 20.25 : 4.5$
c) $16 : 0.9 = 144 : 8.1$

O287 $1.6 : 8 = 1 : 5$ (gilt)

O288 $7.5 : 0.2 = 1.5 : 0.04$ (gilt)

O289 Logisch! Hier wird einfach die linke Seite mit der rechten vertauscht.

O290 ① : a ② · d ③ : c ④ · b

O291 ① · b ② · d

O292 **a)** $14 \cdot 1 = 6 \cdot 2\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}$ (Verhältnis stimmt nicht!)

c) $2 \cdot x^2 = 2x^2$
d) $20 \cdot 0.85 = 0.17 \cdot 100$
e) $51 \cdot 0.5 = 102 \cdot \mathbf{0.25}$
f) $-3 \cdot 4 = 2 \cdot (\mathbf{-6})$

O293 **a)** $5 : 30 = 2 : 12$, $5 : 2 = 30 : 12$,
$12 : 30 = 2 : 5$, $12 : 2 = 30 : 5$
b) $a : b = y : x$, $a : y = b : x$, $x : b = y : a$, $x : y = b : a$
c) Ist keine Produktgleichung
d) $72 : 64 = 45 : 40$, $72 : 45 = 64 : 40$,
$40 : 64 = 45 : 72$, $40 : 45 = 64 : 72$
e) $(-2.5) : (-5) = 3 : 6$, ~~(-2.5) : 3 = (-5) : 6,~~ $6:(-5) = 3:(-2.5)$
$(-2.5) : 3 = (-5) : 6$, $6 : 3 = (-5) : (-2.5)$
f) $24 : 28 = 30 : 35$, $35 : 30 = 28 : 24$,
$35 : 28 = 30 : 24$, $24 : 30 = 28 : 35$

O294 **a)** $20 \cdot 27 = 12 \cdot 45$ (stimmt)
b) $9 \cdot 40 = 24 \cdot 15$ (stimmt)
b) $-6 \cdot 21 = -18 \cdot 7$ (stimmt)
d) $-15 \cdot (-35) \neq 75 \cdot (-7)$ (stimmt nicht)

O295 **a)** $49s \cdot 108s = 84s \cdot 63s$ (stimmt)
b) $15a \cdot 3b \neq 5a \cdot 6b$ (stimmt nicht)
c) $21x \cdot 143 = 91 \cdot 33x$ (stimmt)
d) $3.9 \cdot 4.2a^2 \neq 2.8a \cdot 7.8a$ (stimmt nicht)

O296 **a)** Ja, nämlich ad = bc (Faktoren vertauschen oder Gleichung links/rechts vertauschen bringt die selbe Gleichung).
b) Nein, man kann mehrere aufstellen.
Beispiele: $a : c = b : d$ oder $b : a = d : c$.

Bestimmungsgleichungen in Form einer Proportion

0297 Etwa 2.50 m. Wenn die Frau 55 kg wiegt, dann wiegt er etwa 185 kg.

0298 $h = 10.8$ m

Produktegleichung:
$h \cdot 4.8\text{ m} = 1.5\text{ m} \cdot 34.6\text{ m}$

0299 –

0300 **a)** 60 **b)** 25.2 **c)** 14.4

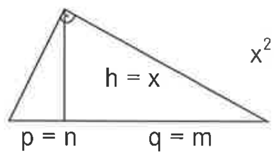
0301 **a)** −24.2 **b)** 8 **c)** 2

0302 **a)** 3.5 **b)** 2 **c)** 6.4

0303 **a)** $x = \frac{bc}{a}$ **b)** $x = \frac{m^2}{4n}$ **c)** $x = \frac{a^2 - b^2}{a}$

0304 **a)** $(\pm)6$ **b)** $(\pm)12$ **c)** $(\pm)15$
d) zwei Lösungen

0305



$x^2 = n \cdot m$

Im Höhensatz gilt:
Produkt der Hypotenusen gleich Quadrat der Höhe.
Bilde aus der gegebenen Proportion ein Produkt.

0306 **a)** $x = (\pm)9$ **b)** $x = (\pm)15$

0307 **a)** $x = \sqrt{10}$. Die Proportion wird dann zu
$\sqrt{\sqrt{10}} : \sqrt{2} = \sqrt{5} : \sqrt{\sqrt{10}}$
b) $x = 10$

b) Produktegleichung: $2x + 10 = 3x$

0308 **a)** $x = 20$
b) $x = 100$

a) $77(x + 7) = 63(x + 13)$
b) $6(x + 5) = 7(x - 10)$

0309 **a)** $x = 108$
b) $x = \frac{a^2}{b} - 2$

a) $25x = 18(x + 42)$
b) $a^2 = b(x + 2)$

0310 **a)** $x = \frac{m}{2}$ **b)** $x = \frac{n^2 - m^2}{4}$

a) $m(x + 1) = x(m + 2)$
b) $2 \cdot 2x = (n - m)(n + m)$

0311 **a)** $x = 5$ **b)** $x = 3$

a) $x^2 - x = x^2 + 5x - 3x - 15$
b) $x^2 + 7x - 2x - 14 = x^2 + 2x - x - 2$

0312 $x = -\frac{16}{21}$

a) $24x^2 + 9x - 40x - 15 =$
$24x^2 - 4x - 6x + 1$

0313 1. Fall: $m = n \Rightarrow L = G$
2. Fall: $m \neq n \Rightarrow L = \{0\}$

$m \cdot (x + n) = n \cdot (x + m)$
$mx + mn = nx + mn$
$mx - nx = 0$
$x(m - n) = 0$

O314 1. Fall: $b - 2a = 0$

$b = 2a \quad \rightarrow L = \{\ \}$

2. Fall: $a \neq \frac{b}{2} \quad \rightarrow L = \{\frac{-ab}{b - 2a}\}$

$$\begin{aligned} (x + a)(b - x) &= x(a - x) \\ bx - x^2 + ab - ax &= ax - x^2 \\ bx - 2ax &= -ab \\ x \cdot (b - 2a) &= -ab \\ x &= \frac{-ab}{b - 2a} \end{aligned}$$

O315 1. Fall: $a = -\frac{2}{3}b \quad \rightarrow L = \{0\}$

2. Fall: $a \neq -\frac{2}{3}b \quad \rightarrow L = \{\frac{ab}{3a + 2b)}\}$

$$\begin{aligned} (x + a)(x + b) &= (x - 2a)(x - b) \\ x^2 + x(a + b) + ab &= x^2 - bx - 2ax + 2ab \\ x(a + b) + ab &= x(-2a - b) + 2ab \\ x(a + b) - x(-2a - b) &= ab \\ x((a + b) - (-2a - b)) &= ab \\ x \cdot (3a + 2b) &= ab \end{aligned}$$

O316 1. Fall: $a = 0 \quad \rightarrow L = G$

2. Fall: $a \neq 0 \quad \rightarrow L = \{\ \}$

$$\begin{aligned} (x - 3a)(x + 3a) &= (x - a)(x + a) \\ x^2 - 9a^2 &= x^2 - a^2 \end{aligned}$$

Fortlaufende Proportionen

O317 **a)** 1 : 7 : 365 **b)** 3 : 120 : 24 000 = 1 : 40 : 8000

O318 **a)** $1 : 10^3 : 10^6$ **b)** $2 \cdot 10^4 : 5 \cdot 10^3 : 10 =$ $2 \cdot 10^3 : 5 \cdot 10^2 : 1 =$ $2000 : 500 : 1$

O319 a : b : c = 4 : 9 : 6

O320 x : y : z = 10 : 35 : 16

O321 e : f : g : h = ~~32 : 24 : 88 : 33~~ 64 : 48 : 264 : 99

O322 a : b : c : d = 36 : 80 : 48 : 45

O323 a : b : c : d = 156 : 104 : 234 : 120 = 1014 : 676 : 1521 : 780

O324 Kupfer: 540 kg Zink: 405 kg Eisen: 55 kg

O325 Schwefel: ca. 2.1 g, Kohle: ca. 3.1 g

O326 A: Fr. 7799.45
B: Fr. 43 454.05
C: Fr. 8746.50

O327 23.625 %, A: Fr. 5244.75
B: Fr. 7796.25
C: Fr. 3969.00

O328 A: Fr. 21 687.50
B: Fr. 18 217.50
C: Fr. 12 145.00

O329 **a)** 12 : 1 = 1000 : x; x = 83 h 20 min
b) 12 : 2.25 = 2500 : x; x = 468 h 45 min

0330 $15\,000 : x = 487.5 : 1000$; Kapital $x =$ Fr. 30 769.–

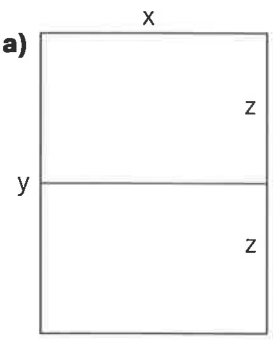
0331 **a)** $x = (\frac{h}{d} \cdot 100)\,\%$

b) $x = \frac{h}{d} \cdot 100\,\% \rightarrow x \cdot d = h \cdot 100\,\% \rightarrow x : 100\,\% = h : d$

c) $x = \frac{h}{d} \cdot 100\,\% =$

$\sqrt{235^2 - 203^2} : 203 \cdot 100\,\% \approx 58.3\,\%$

0332 **a)**



$y = 2z$
$x : y = z : x$
$x^2 = y \cdot z$
$x = \sqrt{y \cdot z} = \sqrt{2z^2} = z \cdot \sqrt{2}$
$x : z = \sqrt{2} : 1$

b) $A_{A4} = x \cdot x \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{16}\,m^2 = \frac{1}{16} \cdot 10^6\,mm^2$
$x \approx 210.2$ mm
$x \cdot \sqrt{2} \approx 297.3$ mm

0333 **a)** $2 \cdot 10^9\,cm : 55\,cm = 1\,s : t\,s$
$t = (55 : (2 \cdot 10^9))\,s = (2.75 : 10^8)\,s$
$= 2.75 \cdot 10^{-8}\,s$

b) $16 : l = 144 : 200 \rightarrow l = 22.\bar{2}$ cm
Verlängerung : $6.\bar{2}$ cm

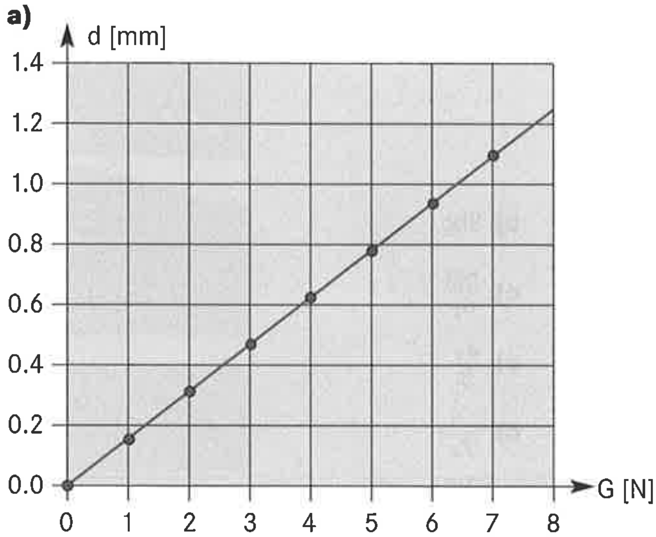
0334 **a)** $x = 937\,320\,000$ km $= 9.373\,2 \cdot 10^8$ km

b) $r = \frac{x}{2\pi} \approx 149\,179\,111$ km

a) 1 h : 8760 h = 107 000 km : x km

b) Annahme: Erdbahn ist kreisförmig, dann gilt: $x = 2r\pi$

0335 **a)**



b) beispielsweise
$G_1 : G_3 = 1\,N : 3\,N$, $d_1 : d_3 = 0.15\,mm : 0.47\,mm$
Also: $G_1 : G_3 \approx d_1 : d_3$

c) $d = k \cdot G$ mit $k = 0.15$ mm/N

d) Die Dehnung wird überproportional zum Gewicht – Reissgefahr!

O336 **a)** Fr. 3750.–
b) 525 Prospekte (à Fr. 10.–)
c) unter 500 Prospekten

O337 0.46 g

O338 –

c) $2250 + 10x = 1250 + 12x$

$1t \cdot 38 \cdot 10^6\ J = x \cdot 82 \cdot 10^{12}\ J$

Kontrollaufgaben

O339 **a)** 1 : 100 **b)** 4 : 1 **c)** 1 : 30 **d)** 1 : 1000

O340 **a)** 1.75 **b)** 0.8 **c)** 200 **d)** 0.75

O341 Länge 48 cm, Breite 12 cm

O342 a = 10.35 m, b = 8.05 m

O343 **a)** $x = \frac{65}{8} = 8\frac{1}{8}$ **b)** $x = 8.6$
c) $x = \frac{5}{42}$ **d)** $x = 2.5$

O344 **a)** $x = \pm\sqrt{2}$ **b)** $x = \frac{e^2}{9}$
c) $x = -4$ **d)** $x = \frac{19}{9}$

O345 3963.3 Meilen

O346 **a)** 2730 km **b)** 2.7 h = 2 h 42 min

O347 **a)** 56 : 40 : 15 **b)** 135 : 40 : 30 : 54

O4 Bruchgleichungen

Formales Bruchrechnen

O348 **a)** $\frac{xy}{2}$ **b)** $\frac{u}{2}$ **c)** $3bc$

O349 **a)** $\frac{s}{3}$ **b)** $2xy$ **c)** $\frac{hst}{dy}$

O350 **a)** $\frac{4x}{3}$ **b)** $\frac{3a^2}{2}$ **c)** $\frac{4v}{3}$

O351 **a)** $\frac{4s^2}{5rt}$ **b)** $\frac{5}{3m^2n}$ **c)** $\frac{5}{7x^2}$

O352 **a)** $\frac{65x^2(a-3)}{42y}$ **b)** $\frac{2b}{5a^2(4x+3y)}$ **c)** $\frac{2(2a-b)^3}{3(x+2y)}$

O353 **a)** $\frac{2}{b}$ **b)** $6u^2$ **c)** $2(a+2b) = 2a + 4b$

O354 **a)** $\frac{a}{xy}$ **b)** $\frac{2(z-w)}{zw} = \frac{2z-2w}{wz}$
c) $\frac{5a^2}{b}$

O355 **a)** $90z^2$ **b)** $36k^5$ **c)** $p(2p+q) = 2p^2 + pq$

0356 a) $\frac{a(a-3b)}{2b} = \frac{a^2-3ab}{2b}$

b) $\frac{7(4x-y)}{xy} = \frac{28x-7y}{xy}$

c) $\frac{3u(4u+v)}{2v} = \frac{12u^2+3uv}{2v}$

0357 a) $\frac{2xy^2}{5}$ b) $\frac{x^2}{18b}$ c) $\frac{9xy^3}{2}$

0358 a) $\frac{6z^2}{5}$ b) $\frac{3x}{8}$ c) $\frac{5xy^2}{4}$

0359 a) $\frac{4x}{3y}$ b) $-\frac{5a^2b^5}{108}$ c) $\frac{1}{2a^4b^3}$

0360 a) $\frac{8}{9}$ b) $\frac{11}{3x}$ c) -1

0361 a) $\frac{21by^2}{2a^2}$ b) $\frac{5}{x(x+y)^2}$ c) $\frac{a(a+1)c^2x^2(x+1)}{8y}$

0362 a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a-1}{b+1}$ c) $\frac{a-1}{1+a} = \frac{a-1}{a+1}$

0363 a) $a+b$ b) $a-b$ c) $\frac{(a-b)^2}{a(a+b)}$ (nicht kürzbar)

0364 a) $x-y$ b) $x+y$ c) $\frac{x-y}{2x}$

0365 a) $\frac{u+v}{a}$ b) $\frac{u-v}{2}$ c) $\frac{(ax+2b)^2}{a^2(x+b)}$ (nicht kürzbar)

0366 a) $x+10$ b) $1-z$ c) $2a+5b$

0367 a) $-1(a+b) = -(a+b)$
b) $-1(x-y+z) = -(x-y+z)$
c) $-1(-u+v) = -(-u+v) = -(v-u)$

0368 a) -1 b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{a}{c}$

0369 a) $-(x+y) = -x-y$ b) 1

c) $\frac{u^2+v^2}{u+v}$ (nicht kürzbar)

0370 a) $\frac{a+b}{a-b}$ b) $-(p+q) = -p-q$

c) $-\frac{p-q}{a} = \frac{q-p}{a}$

0371 a) $\frac{a^2b}{2a}$ b) $\frac{4px}{12x^2}$ c) $\frac{11bcst}{88ab^2c}$

0372 a) $\frac{60ab^4}{105b^6}$ b) $\frac{45ab^2x^2y}{42b^4y^4}$ c) $\frac{\frac{1}{2}i^2p^2}{2agip}$

0373 a) $\frac{10x}{2x}$ b) $\frac{3(a+b)}{12u} = \frac{3a+3b}{12u}$

c) $\frac{3a(x+y)}{3a^2} = \frac{3ax+3ay}{3a^2}$

0374 a) $\frac{3(3a+b)}{3(a+b)} = \frac{9a+3b}{3(a+b)}$

b) $\frac{2(6a-2b)}{8a-6b} = \frac{12a-4b}{8a-6b}$

c) $\frac{-2(6a-2b)}{6b-8a} = \frac{4b-12a}{6b-8a}$

0375 **a)** $\frac{(a-b)(4a-b)}{a^2-b^2} = \frac{4a^2-5ab+b^2}{a^2-b^2}$

b) $\frac{4a(a+b)}{a^2+2ab+b^2} = \frac{4a^2+4ab}{a^2+2ab+b^2}$

c) $\frac{x(2x+3y)}{4x^2+12xy+9y^2} = \frac{2x^2+3xy}{4x^2+12xy+9y^2}$

0376 **a)** $\frac{2a}{6}, \frac{b}{6}$ **b)** $\frac{2u}{4a}, \frac{v}{4a}$ **c)** $\frac{w}{uvw}, \frac{1}{uvw}$

0377 **a)** $\frac{z^2}{2z}, \frac{1}{2z}$ **b)** $\frac{axy}{5xy}, \frac{2}{5xy}$ **c)** $\frac{3aw}{6a^2}, \frac{4w}{6a^2}$

0378 **a)** $\frac{9}{3x}, \frac{2x}{3x}$ **b)** $\frac{35xy}{21y^2}, \frac{12}{21y^2}$ **c)** $\frac{10xz}{15yz^2}, \frac{12xy}{15yz^2}$

0379 **a)** $\frac{4(x+2)}{(x+1)(x+2)}, \frac{5(x+1)}{(x+1)(x+2)}$

b) $\frac{2(3x-1)}{2(x+1)}, \frac{4x}{2(x+1)}$

c) $\frac{3(2x+3)}{3x+3}, \frac{7x}{3x+3}$

0380 **a)** $\frac{3(x+1)}{(x+1)^2}, \frac{x+2}{(x+1)^2}$

b) $\frac{5x+77}{x^2+2x+1}, \frac{-(x+1)}{x^2+2x+1}$

c) $\frac{2-x}{x^2+2x+1}, \frac{2(x+1)}{x^2+2x+1}$

0381 **a)** $\frac{1}{x^2-4x+4}, \frac{5(x-2)}{x^2-4x+4}$

b) $\frac{5x}{x(x-2)}, \frac{5(x-2)}{x(x-2)}$

c) $\frac{x+4}{(x^2-4x+4)(x+4)}, \frac{2(x^2-4x+4)}{(x^2-4x+4)(x+4)}$

0382 **a)** $(x+3)(x-2) = x^2+x-6$
b) $(u+v)(u-v) = u^2-v^2$
c) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

0383 **a)** $a(a+b)(a-b) = a^3-ab^2$
b) a^2-b^2 oder b^2-a^2
c) $(a-b)(a+b)^2 = a^3+a^2b-ab^2-b^3$

0384 **a)** $(x-5)(x-6) = x^2-11x+30$
b) $6(u-1)(u+1)^2 = 6u^3+6u^2-6u-6$
c) $a(a-b)^2(a+b) = a^4-a^3b-a^2b^2+ab^3$

0385 **a)** $\frac{24}{6x} = \frac{4}{x}$ **b)** $\frac{17}{30a}$ **c)** $\cancel{\frac{5}{7z}}$ $\frac{95}{84z}$

a) Man könnte gerade am Anfang kürzen, dann wird es einfacher.
b) gemeinsamer Nenner: 30a
c) gemeinsamer Nenner: 28z

0386 **a)** $\frac{10+6x}{15x^2}$ **b)** $\frac{30+35y-24y^2}{75y^2}$ **c)** $\frac{8x^2-10y^2z+xyz^2}{2xyz^2}$

a) gemeinsamer Nenner: $15x^2$
b) gemeinsamer Nenner: $75y^2$
c) gemeinsamer Nenner: $2xyz^2$

0387 **a)** $\frac{12xy-7xz}{6(x-y)}$ **b)** $\frac{8x+5}{20(x^2-4)}$ **c)** $\frac{9b-16a}{6(a-b)}$

Brüche wie folgt erweitern:
a) 1. mit 2, 2. mit 3.
b) 1. mit 5, 2. mit 2.
c) 1. mit 2, 2. mit 3, 3. mit 6.

O388 a) $-\frac{1}{x(x+1)}$ b) $\frac{3+x}{2(x+1)}$ c) $\frac{3}{2x+2}$

Brüche wie folgt erweitern:
a) 1. mit x, 2. mit (x + 1)
b) 1. mit 2, 2. mit (x + 1)
c) 1. mit 2, 2. lassen

O389 a) $\frac{2s}{s^2-t^2}$ b) $\frac{3s+2t}{s^2+st}$ c) $\frac{2s^2-2s^2t+2t^3}{s^3-st^2}$

Brüche wie folgt erweitern:
a) 1. mit (s − t), 2. mit (s + t)
b) 1. mit s, 2. mit (s + t)
c) 1. mit s(s + t), 2. mit s(s − t), 3. mit (s − t)(s + t)

O390 a) $\frac{5x^2-5x}{x^2-25}$ b) $\frac{x(88x+1)}{64x^2-1}$ c) $\frac{2z^3}{z^4-1}$

Brüche wie folgt erweitern:
a) 1. mit (x + 5), 2. mit (x − 5)
b) 1. mit (8x + 1), 2. mit (8x − 1) (vorher evtl. Summanden vertauschen)
c) 1. und 3. mit (z^2-1), 2. mit (z^2+1)

O391 a) $\frac{a+b+1}{a^2-b^2}$ b) $\frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)(a-b)}$ c) $\frac{13x-5}{15(x+4)}$

Brüche wie folgt erweitern:
a) 1. lassen, 2. mit (a + b)
b) 1. mit (a − b), 2. mit (a + b)
c) 1. mit 5, 2. mit 3

O392 a) $\frac{2x^2+4x+11}{(x+2)^2}$ b) $\frac{2x^3+x^2y-xy^2-y^2}{x^2-y^2}$ c) $\frac{2x^2-5x-2}{(x-2)(x-1)}$

Brüche wie folgt erweitern:
a) 1. mit (x + 2), 2. lassen
b) 1. mit (x + y), Summand x mit (x^2-y^2), Rest lassen
c) 1. mit (x − 1), 2. mit (x − 2), 3. lassen

O393 a) $\frac{m}{m+3}$ b) $\frac{4z-7}{4z^2-49}$ c) $\frac{-x+4}{x(x-2)(x-1)(x+1)}$

a) $= \frac{m^2-8m}{(2m-5)(m+3)} = \frac{m}{2m-5} = \frac{m^2-8m+m(m+3)}{(2m-5)(m+3)} = \ldots$

b) $\frac{z+3}{(2z+7)(2z-7)} - \frac{z-2}{(2z-7)^2} = \frac{(z+3)(2z-7)-(z-2)(2z+7)}{(2z+7)(2z-7)^2} = \ldots$

c) $= \frac{1}{(x-2)(x+1)} - \frac{2}{x(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \ldots$

O394 $\frac{b}{b-a}$

$A = \frac{a+b}{ab}$, $B = \frac{b-a}{ab}$, $C = \frac{a^2+ab}{b^2-a^2}$

O395 $\frac{-b}{a(a-b)(a+b)^2} = -\frac{b}{a(a+b)(a^2-b^2)}$

$A = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a} = \frac{-b}{a(a+b)}$

$B = \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}$

$C = \frac{a^5-ab^4}{a^3-ab^2} = a^2+b^2$

0396 $\frac{1024s^5t^3}{10\,125} = \frac{2^{10}s^5t^3}{3^4 \cdot 5^3}$

$A = (\frac{4}{3}s^2t)^3 = \frac{64s^6t^3}{27}$

$B = \frac{2t^2}{3} + \frac{9t^2}{4} - \frac{5t^2}{6} = \frac{25t^2}{12}$

$C = \frac{5s^3 \cdot 9}{t^2 \cdot 4s^2} = \frac{45s}{4t^2}$

Sind sie zu stark, bist du zu schwach

0397 **a)** $\frac{1}{2(x-3)}$ **b)** $4u - 3$

a) Gemeinsamer Nenner $2(x-3)(x-2)$
b) Ausdividieren (Termdivision)

0398 **a)** $\frac{1024s^5t^3}{10\,125} = \frac{2^{10}s^5t^3}{3^4 \cdot 5^3}$ **b)** -1

a) fast gleiche Aufgabe wie 0396, siehe dort.
b) Einfachster Weg: Substituiere $A = \frac{1-d}{1+d}$ und $B = \frac{1+d}{1-d}$ und es entsteht $\frac{A-B}{B-A}$, was -1 ergibt.

0399 **a)** 2 **b)** ab

a) mit $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}$ beginnen
b) $\ldots = \frac{(a+b)(a+b+c)}{ab} = \frac{a^2+b^2+2ab-c^2}{a^2b^2} = \ldots$

0400 0

Substituiere $z := \frac{\frac{\frac{1}{x}-1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$ und der Monsterbruch M wird zu $\frac{\frac{\frac{1}{z}-1}{z} - \frac{1}{z^2}}{\frac{1}{z^2}} - x$ reduziert.

Dies enthält aber wieder einen gleichartigen Teilbruch. Nach Zusammenfassen von z erhält man $z = -x$ und $M = -z - x = x - x = 0$

Kontrollaufgaben

0401 **a)** $L = \{\frac{7a}{11b}\}$ **b)** $L = \{\frac{y^3}{2x}\}$

Kürzen mit ...
a) $5ab^2c^2$
b) $4x^2yz^2$

0402 **a)** $L = \{\frac{x}{y(a+b)}\}$ **b)** $L = \{x(x+1)\} = \{x^2 + x\}$

Kürzen mit ...
a) $x(a+b)$
b) $2xy(x+1)^2$

0403 **a)** $L = \left\{\frac{x+y}{x-y}\right\}$ **b)** $L = \{1 + bc\}$

Kürzen mit ...
a) $(a + b)$
b) $(1 + c)$

0404 **a)** $L = \left\{\frac{3}{2x}\right\}$ **b)** $L = \left\{\frac{4az + bx}{2x^2yz}\right\}$

gemeinsamer Nenner ...
a) $2x$
b) $2x^2xz$

0405 **a)** $L = \left\{\frac{-2b}{a^2 - b^2}\right\}$

b) $L = \left\{\frac{2x - ax - bx}{2(a + b)(a - b)}\right\} = \left\{\frac{x(2 - a - b)}{2(a^2 - b^2)}\right\}$

gemeinsamer Nenner ...
a) $a^2 - b^2$
b) $2(a + b)(a - b)$

0406 **a)** $L = \{0\}$ **b)** $L = \left\{\frac{x}{a + b}\right\}$

a) 2. Bruch mit -1 erweitern
b) Zähler des 1. Bruchs faktorisieren und $(a + b)$ kürzen

0407 **a)** $L = \left\{\frac{12a^2 - 35c^2}{15abc}\right\}$ **b)** $L = \left\{\frac{2(a - 2b)}{3(a + b)^2}\right\}$

gemeinsamer Nenner ...
a) $15abc$
b) $3(a + b)^2$

0408 **a)** $L = \left\{\frac{96w^3x^3y^2}{u^2v}\right\}$ **b)** $L = \left\{\frac{2(5a - 4b)y}{(5a + 4b)x}\right\}$

a) Mit Kehrwert des Divisors multiplizieren und kürzen
b) mit $39(5a - 4b)xy^2$ kürzen

0409 **a)** $L = \left\{\frac{a^2 + 12ab + 5b^2}{6(a^2 - b^2)}\right\}$

gemeinsamer Nenner
$6\,(a - b)(a + b)$

0410 Beispiel: Im Produkt $\frac{a + b}{c + d} \cdot \frac{e + f}{g + h}$ sind durch die einzelnen Bruchstriche die Summen zusammengehalten und deshalb sind keine Klammern nötig. Sobald man das Produkt auf *einen* Bruchstrich schreibt, müssen die Summen speziell geklammert werden: $\frac{(a + b)(e + f)}{(c + d)(g + h)}$.

0411 **a)** $L = \{-3\}$ **b)** $L = \{2\}$

a) $2x - x = 3x + 6$
b) $30 - 32x = 3x - 20x$

0412 **a)** $L = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ **b)** $L = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

a) $(x - 5) - 2(x - 4) = 3(x + 3)$
b) $4x - 15x = 7x + 6$

0413 **a)** $L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **b)** $L = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

a) $3x + 2(x - 1) + 3(x + 2) = 0$
b) $10x - 4(x - 2) = 3(x + 3) - 5(x - 1)$

0414 **a)** $L = \{-2\}$ **b)** $L = \left\{-\frac{12}{19}\right\}$

a) $3(2s - 5) - 2(3s - 1) = 4(s - 2) + 3$
b) $36(s - 2(s + 1)) - 108s = 12s - 91s - (2 - \frac{s}{2})$

0415 $-\frac{527}{224}$

Ausmultiplizieren bringt

$$\frac{14}{15} + \frac{11}{5} + \frac{25}{4} = 2 - \frac{10t}{3} - \frac{2t + 7}{5},$$

dann Gleichung mit 60 multiplizieren.

0416 −0.4

$$\frac{4}{5}u + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (1 + u) = u$$

0417 λ kann eine beliebige Zahl (ausser −20) sein, weil die entstehende Gleichung allgemeingültig ist.

$$\left(\frac{\frac{1}{\lambda + 20}}{4} + 3\right)(\lambda + 20) = (2^3)^2 + 3\lambda$$

0418 **a)** $x = \frac{bc}{a}$ **b)** $x = \frac{ab}{c(b-a)}$, $(a \neq b)$

c) $x = \frac{ac - b^2}{b - c}$, $(b \neq c)$

0419 **a)** $x = \frac{4ab(a+b)}{a - 2b}$, $(a + b \neq 0,\ a \neq 2b)$

b) $x = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

c) $x = 0$, $(a + b \neq 0)$

0420 **a)** $x = \frac{ab}{c - a}$

0421 Die Arbeit wird gemeinsam in $\frac{8}{9}$ Wochen beendigt sein.

In einer Woche erledigt A $\frac{1}{3}$, B $\frac{3}{8}$ und C $\frac{5}{12}$ der Arbeit. Für die Zeit von x Wochen gilt $\frac{x}{3} + \frac{3x}{8} + \frac{5x}{12} = 1$, also ...

0422 Auf der dritten Wiese reicht das Gras um 36 Rinder 18 Wochen weiden zu lassen.

Erklärung zur Lösung der Aufgabe siehe Kommentarteil.

0423 Am ersten Tag waren acht Schnitter bei der Arbeit.

Angenommen, am ersten Tag waren x Schnitter bei der Arbeit, dann gilt $\frac{x}{2} + 2 = \frac{x}{2} + \frac{x}{4}$.

Die Unbekannte im Nenner

0424 **a)** $x \neq 0$ **b)** $x \neq 0$ **c)** $x \neq 0$

0425 **a)** $x \neq +1,\ x \neq -1$ **b)** $x \neq 1$
c) keine Einschränkung

0426 **a)** $x \neq 2$ **b)** $x \neq 5$ **c)** $x \neq -4.5$

0427 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 20\}$
c) $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$

0428 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-6.5, 6.5\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \frac{1}{4}\}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{\cancel{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

0429 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, \frac{35}{3}\}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, \sqrt{8}, \sqrt{4}\}$

0430 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $L = \{2\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $L = \{\frac{2}{3}\}$

0431 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $L = \{1\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $L = \{\frac{13}{84}\}$

O432 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $L = \{-\frac{3}{2}\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$, $L = \{1\}$

O433 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$, $L = \{-8\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-10\}$, $L = \{-\frac{15}{2}\}$

O434 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, -3\}$, $L = \{5\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $L = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

O435 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $L = \{\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{6, 5\}$, $L = \{21\}$

O436 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{7\}$, $L = \{\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, $L = \{-\frac{34}{7}\}$

b) auf gemeinsamen Nenner $4(x - 2)(x + 2)$ bringen

O437 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{2, \frac{5}{2}\}$, $L = \{0\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$, $L = \{\}$

O438 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $L = \{-14\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $L = \{\}$

O439 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$, $L = \{-\frac{1}{2}\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-8, \frac{7}{2}\}$, $L = \{7\}$

O440 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$, $L = \{\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $L = \{12\}$

O441 **a)** $L = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **b)** $L = \{\}$

O442 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $L = \{1, 4\}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $L = \{-6, 10\}$

a) $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$
b) $x^2 - 4x - 60 = (x + 6)(x - 10)$

O443 **a)** $D = \mathbb{R}$, $L = \{-\frac{5}{2}, 4\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $L = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\}$

O444 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $L = \{15\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $L = \{-5\}$

O445 2

$4 - x = \frac{4}{x}$

O446 $\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{9}$ ($\frac{2}{-4.5}$ und $\frac{2}{1.5}$ sind wohl unzulässig)

$\frac{2}{x} + \frac{2}{x + 6} = \frac{8}{9}$

O447 $\frac{5}{6}$

$\frac{3x}{2(x + 1)} = \frac{4}{x}$

O448 **a)** 15 Tage **b)** 5 Tage

Zusatzmaterial O/6

Kontrollaufgaben

O449 **a)** $D = \mathbb{R}$, $L = \{\frac{25}{7}\}$ **b)** $D = \mathbb{R}$, $L = \{0\}$

O450 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $L = \{\frac{7}{6}\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $L = \{-\frac{3}{5}\}$

O451 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $L = \{-\frac{7}{2}\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, -3\}$, $L = \{7\}$

O452 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$, $L = \{\frac{7}{3}\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 2\}$, $L = \{\}$

0453 **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3, 5\}$, $L = \{9\}$
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $L = \{2, 3\}$

0454 Es ist von der Zahl $\frac{1}{5}$ die Rede.

$$\frac{1}{2x} + 2\frac{1}{x} = \frac{5^2}{2}$$

05 Einige Erweiterungen

Bruchgleichungen mit Formvariablen

0455 $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Falls $b \neq 0$, dann $L = \{\frac{a - c}{b}\}$. Andernfalls ist zu unterscheiden:
$a - c = 0$ (d. h. $a = c$), dann Gleichung allgemeingültig, d. h. $L = D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$a - c \neq 0$ (d. h. $a \neq c$), dann Gleichung unlösbar, $L = \{\}$.

0456 $D = \mathbb{R} \setminus \{-b\}$, $a \neq 0$.
Falls $a - b \neq 0$ (d. h. $a \neq b$), dann $L = \{\frac{b^2 - a^2}{a - b}\} = \{-a - b\}$,

andernfalls Gleichung allgemeingültig:
$L = D = \mathbb{R} \setminus \{-b\}$.

0457 $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{c}{2}\}$. Falls $a - 2b \neq 0$, dann $L = \{\frac{bc}{a - 2b}\}$.

Andernfalls ist zu unterscheiden:
$bc = 0$ (d. h. $b = 0$ oder $c = 0$),
dann Gleichung allgemeingültig,

d. h. $L = D = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{c}{2}\}$

$bc \neq 0$, dann Gleichung unlösbar, $L = \{\}$.

0458 $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm a\}$. $L = \{\}$.

0459 $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \neq 0$. Falls $abc \neq 0$, dann $L = \{\frac{a + b + ab}{abc}\}$.

Andernfalls ist zu unterscheiden:
$a + b + ab = 0$, dann Gleichung allgemeingültig,
d. h. $L = D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
$a + b + ab \neq 0$, dann Gleichung unlösbar, $L = \{\}$

0460 $D = \mathbb{R} \setminus \{-a, -c\}$. Falls $a + b \neq 0$, dann $L = \{-\frac{2ac}{a + b}\}$.
Andernfalls ist zu unterscheiden:
$ac = 0$ (d. h. $a = 0$ oder $c = 0$), dann Gleichung allgemeingültig, d. h. $L = D = \mathbb{R} \setminus \{-a, -c\}$.
$ac \neq 0$, dann Gleichung unlösbar, $L = \{\}$

Die Variable unter dem Wurzelzeichen

0461 **a)** $x = 2.25$ **b)** $x = 116$

0462 **a)** $x = 64$ **b)** $x = 1$

0463 **a)** $x = 0$ **b)** $x = 16$

0464 **a)** $x = 16$ **b)** $x = 1$

0465 **a)** $x = 7$ (2 ist Scheinlösung) **b)** $x = 8$

0466 unlösbar (4 ist nicht im Definitionsbereich)

Gleichung zuerst quadrieren, damit die Wurzeln wegfallen.

0467 Nach dem Quadrieren ist die Gleichung allgemeingültig. Der Radikand darf aber nicht negativ werden. Aus $3x + 9 \geq 0$ folgt also $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$

Gleichung zuerst quadrieren, damit die Wurzeln wegfallen.

0468 $x = 81$

0469 **a)** Im Nenner muss 1 stehen, also kann $x = \pm 1$ sein.
b) $5 = 5x^2 \Leftrightarrow 5(x^2 - 1) = 5(x - 1)(x + 1) = 0$

c) Direkt Wurzelziehen führt zu $\frac{\sqrt{5}}{x} = \sqrt{5}$ und somit könnte x nur 1 sein.

0470 $x = z - \sqrt{\frac{u(\alpha + 10)}{k^2 + 1}}$, $u = \frac{(z - x)^2(k^2 + 1)}{\alpha + 10}$,

$\alpha = \frac{(z - x)^2(k^2 + 1)}{u} - 10$, $k = \sqrt{\frac{u(\alpha + 10)}{(z - x)^2} - 1}$

Substitution

0471 $y = \frac{7}{2}$ und $x = \frac{49}{4} = 12.75$

Löse die Gleichung $2(y - 1) = 5$

0472 $y = 6$ und $x = 36$

Löse die Gleichung $3(y - 4) = y$

0473 $y = \frac{11}{12}$ und $x = \frac{121}{144}$

Löse die Gleichung $5(2 - y) = 7y - 1$

0474 $y = 1$ und $x = 0$

Löse die Gleichung $(3y + 1)^2 - (3y - 1)^2 = 12$

Aus $\sqrt{2x + 1}$ folgt $x = \frac{y^2 - 1}{2}$

0475 $y = 3$ und $x = 6$

Löse die Gleichung $2y - 4 = 3y - 7$

Aus $y = \sqrt{x + 3}$ folgt $x = y^2 - 3$

0476 $y = \frac{13}{4}$ und $x = \frac{185}{16}$

Löse die Gleichung $4(y + 3)(y - 1) = (2y + 1)^2$

Aus $y = \sqrt{x - 1}$ folgt $x = y^2 + 1$

0477 $z = 5$ und $x = \pm\sqrt{z-1} = \pm 2$

Substituiere $z := x^2 + 1$ und löse die Gleichung $z = 3z - 10$.

0478 $z = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{6z-1}{5} = \frac{2}{5}$

Substituiere $z := \frac{5x+1}{6}$ und löse die Gleichung $(z-1)(z+1) = z^2 - 2z$

0479 $z = 10$ und $x = \frac{10+z}{z} = 2$

Substituiere $z := \frac{3}{2z-5}$ und löse die Gleichung

$$\frac{2}{z} = \frac{3}{2z-5}$$

0480 $z^2 + 6z - 7 = (z+7)(z-1) = 0 \Rightarrow z_1 = -7$ und $z_2 = 1$. Wegen $x = 2z + 20$ erhält man die Lösungen $x_1 = 6$ und $x_2 = 22$.

Substituiere $z := \frac{x-20}{2}$ und löse die Gleichung

$$z + 6 = \frac{7}{z}$$

Stereometrie

0481 $a = \sqrt{\frac{O}{6}} = 5 \text{ m}$

$O = 6a^2$

0482 $c = \frac{O - 2ab}{2(a+b)} = 2 \text{ cm}$

$O = 2(ab + ac + bc)$

0483 $O = 2 \cdot \left(6 \cdot \frac{\sqrt{3}s^2}{4}\right) + (6s) \cdot h =$

$2s(\sqrt{3}s + 2h) \approx 1292.554 \text{ m}^2$

$V = \left(6 \cdot \frac{\sqrt{3}s^2}{4}\right) \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2} s^2 h \approx 3325.538 \text{ m}^3$

$O = 2 \cdot G + u \cdot h$

Grundfläche G besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken, Seitenlänge s.

$V = G \cdot h$

0484 $V = \frac{G \cdot h}{3} = 400 \text{ m}^3$

$r = \sqrt{\frac{G}{\pi}} \approx 5.046 \text{ m}$

$m = \sqrt{h^2 + \frac{G}{\pi}} \approx 15.826 \text{ m}$

$M = \sqrt{G^2 + G\pi h^2} = G\sqrt{1 + \frac{\pi h^2}{G}} \approx 250.896 \text{ m}^2$

$O = G + \sqrt{G^2 + G\pi h^2} = G\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\pi h^2}{G}}\right) \approx 330.896 \text{ m}^2$

$V = \frac{G \cdot h}{3}$, $G = \pi r^2$, $m = \sqrt{h^2 + r^2}$,

$M = \pi r m$, $O = G + M$

0485 $V = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{d}{2} - w\right) \approx 103.5 \text{ l}$

Sie fasst 104.38 l − 103.53 l= 0.85 l mehr.

$r = \frac{d}{2} - w$, $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$

0486 $a = \sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{2}}} \approx 20.396 \text{ cm}$

0487 $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3 \ (\approx 73.459 \text{ m}^3)$

Würfelvolumen:
a^3 ($= 27 \text{ m}^3$) macht ungefähr 36.8% aus.

$r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

0488 $V = V_{Würfel} + 6 \cdot \frac{V_{Kugel}}{2} = a^3 + 3 \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 = a^3\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$

0489 $h = \frac{3V}{G} = 10.5$ dm, $(a = \sqrt{G} = 3$ dm$)$

$$h' = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{G}{4}} = \sqrt{\left(\frac{3V}{G}\right)^2 + \frac{G}{4}} =$$

$$\frac{\sqrt{36V^2 + G^3}}{2G} \approx 10.607 \text{ dm}$$

$$m = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{2} \cdot a}{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{G}{2}} = \sqrt{\left(\frac{3V}{G}\right)^2 + \frac{G}{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{36V^2 + 2G^3}}{2G} \approx 10.712 \text{ dm}$$

$$M = 4 \cdot \frac{a \cdot h'}{2} = 2\sqrt{G} \cdot \frac{\sqrt{36V^2 + G^3}}{2G} = \sqrt{\frac{36V^2}{G} + G^2} \approx 63.640 \text{ dm}^2$$

0490 $\frac{r}{m - R} = \frac{R}{h}$, $m = \sqrt{h^2 + R^2}$

$$\frac{r}{\sqrt{h^2 + R^2} - R} = \frac{R}{h} \Leftrightarrow rh = R\left(\sqrt{h^2 + R^2} - R\right) = R\sqrt{h^2 + R^2} - R^2$$

$\Leftrightarrow rh + R^2 = R\sqrt{h^2 + R^2}$
$\Leftrightarrow r^2h^2 + 2rhR^2 + R^4 = R^2(h^2 + R^2)$
$\Leftrightarrow r^2h^2 + 2rhR^2 = R^2h^2$
$\Leftrightarrow 2rhR^2 = (R^2 - r^2)h^2 \Rightarrow h = \frac{2rR^2}{R^2 - r^2}$